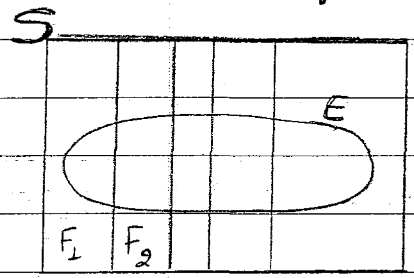
10° Μάθημα Πιθανοτήτων

15/3/2010

Ασκήσεις σε Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας και Bayes.

① Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας



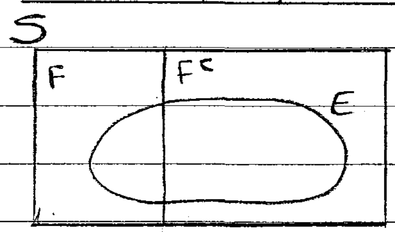
S : δειγματικός χώρος

$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, F_i ασυμβίβαστα

$\Downarrow$

$$P(E) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i)P(E/F_i)$$

Απλοποιημένη Εκδοχή:



$S = F \cup F^c$

$$P(E) = P(F)P(E/F) + P(F^c)P(E/F^c)$$

② Θεώρημα Bayes

$P(E/F) \leftrightarrow P(F/E)$

$$P(F/E) = \frac{P(FE)}{P(E)} = \frac{P(F)\cdot P(E/F)}{P(E)}$$

③ Άσκηση

Ασφαλιστική εταιρία χωρίζει τους πελάτες σε:

F = επιρ. σε ατυχήματα (30% του πληθυσμού)

E = μη επιρ. — // — (70% — // —)

P(προκάλεσε ατύχημα σε 1 χρόνο δεδομένου ότι είναι επιρ.) = 40%

P(— // — δεν είναι επιρ.) = 20%

P(επιρ. κ' προκάλεσε ατύχημα σε 1 χρόνο) = ;
P(προκάλεσε ατυχ. σε 1 χρόνο) = ;
P(επιρ / προκαλ. ατύχημα σε 1 χρόνο) = ;

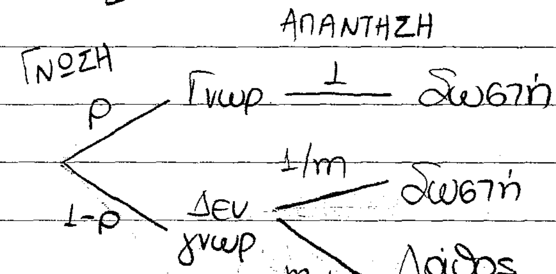
Έχουμε: $P(F)=0,3$ $\qquad P(E|F)=0,4$
$P(\ )=0,7$ $\qquad P(E|F^c)=0,2$

$$P(FE) \overset{\text{Πολ/κός}}{=} P(F)P(E|F)=0,3\cdot 0,4=\underline{\underline{0,12}}$$

$$P(E) \overset{\text{θ.ο.π.}}{=} P(F)P(E|F)+P(F^c)P(E|F^c)=0,3\cdot 0,4+0,7\cdot 0,2=\underline{\underline{0,26}}$$

$$P(F|E)=\frac{P(F)P(E/F)}{P(E)}=\frac{0,12}{0,26}$$

7) Άσκηση (τεστ πολλαπλής επιλογής)
Τεστ πολλαπλής επιλογής με m εναλλακτικές επιλογές/ερωτ.
Μαθητής γνωρίζει ($=F$) την 1η ερωτ. με πιθανότητα p
—||— μαντεύει $=F^c$ —— // —— $1-p$
Όταν μαντεύει διαλέγει στην τύχη.
P(μαντεύει / απάντησε σωστά) = ; $\quad E=$



$$P(F^c|E)=\frac{\underbrace{P(F^c)}_{1-p}\,\underbrace{P(E/F^c)}_{\frac{1}{m}}}{P(E)}=(1)$$

$$P(E)=P(F)P(E|F)+P(F^c)P(E/F^c)=p\cdot 1+(1-p)\frac{1}{m} \qquad \frac{1-p}{mp+1-p}$$

$$(1) \Rightarrow P(F^c/E) = \frac{(1-p)\frac{1}{m}}{p\cdot 1+(1-p)\cdot\frac{1}{m}} = \frac{1-p}{mp+1-p}$$

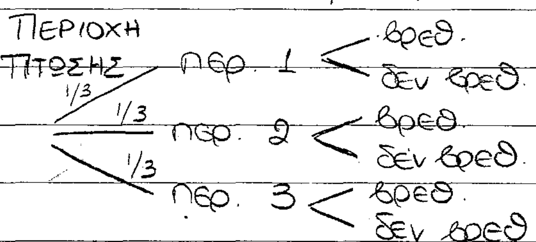
⑤ Άσκηση (Έρευνες διάσωσης)

Αεροπλάνο έχει πέσει σε κάποια από 3 περιοχές.
(ισοπίθανο να έχει πέσει στην καθε μία).
Η επιχ. διάσωσης θα ψάξει όλες τις περιοχές.

$P($να μην βρεθεί στην περιοχή i / έχει πέσει στην περιοχή $1) = \beta_i$

$P(\underbrace{\text{έχει πέσει στην περιοχή } i}_{F_i} / \underbrace{\text{δεν βρέθηκε στην περιοχή } 1}_{E})$, $i=1,2,3$

ΑΠΟΤΕΛ. ΑΝΑΖΗΤ. ΣΤΗΝ 1.



$$P(F_1/E) = \frac{P(F_1)P(E/F_1)}{P(E)} = \frac{1/3\cdot\beta_1}{P(E)}$$

$$P(F_2/E) = \frac{P(F_2)P(E/F_2)}{P(E)} = \frac{1/3\cdot 1}{P(E)}$$

$$P(F_3/E) = \frac{P(F_3)P(E/F_3)}{P(E)} = \frac{1/3\cdot 1}{P(E)}$$

$$P(E) = P(F_1)P(E/F_1) + P(F_2)P(E/F_2) + P(F_3)P(E/F_3) =$$
$$= \frac{1}{3}\beta_1 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{\beta_1+2}{3}.$$

Άρα: $P(F_1/E) = \frac{\beta_1}{\beta_1+2}$, $P(F_2/E) = \frac{1}{\beta_1+2}$, $P(F_3/E) = \frac{1}{\beta_1+2}$

6) Άσκηση

Κάλπη με r κόκκινα και b μπλε σφαιρίδ.

Εξάγουμε διαδοχ. n σφαιρ. $(m \le r+b)$

χωρίς επανάθεση

$$P(\overbrace{\boxed{\text{1ο σφ. να είναι μπλε}}}^{F}, \overbrace{\boxed{\text{συνολικά να εξαχθούν } k \text{ μπλε}}}^{E}) = ;$$

$P(\text{συνολικά να εξαχθούν } k \text{ μπλε}) = ;$

$P(\text{1ο σφ. να είναι μπλε} \,/\, \text{εξήχθησαν συνολ. } k \text{ μπλε}) = ;$

$$P_1 = P(F)\,P(E/F) = \frac{b}{1+b} \cdot \frac{\binom{b-1}{k-1}\binom{r}{n-k}}{\binom{r+b-1}{n-1}}$$

$$P_2 = P(E) = \frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{r+b}{n}}$$

$$P_3 = P(F/E) = \frac{P(F)\,P(E/F)}{P(E)} = \frac{\dfrac{b}{r+b}\,\dfrac{\binom{b-1}{k-1}\cancel{\binom{r}{n-k}}}{\binom{r+b-1}{n-1}}}{\dfrac{\binom{b}{k}\cancel{\binom{r}{n-k}}}{\binom{r+b}{n}}} \qquad (1)$$

Από συνδυαστική $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

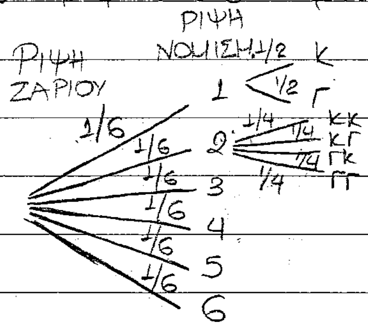
$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\dfrac{\cancel{b}}{\cancel{r+b}} \cdot \dfrac{\cancel{r+b}}{n}}{\dfrac{\cancel{b}}{k}} = \frac{k}{n}$$

7) Άσκηση

Ρίχνουμε ζάρι και μετά δίκαιο νόμισμα όσες φορές δείξει το ζάρι.

P(να μην εμφανιστεί κορώνα) = ;



F_i : το ζάρι έφερε i , $i=1,\dots,6$

πιθ. σε i ρίψεις νομισ. όλες Γ

$$\text{Θ.Ο.Π.} \Rightarrow P(E) = \sum_{i=1}^{6} P(F_i)\,P(E|F_i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^i =$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{127}{128}}{\frac{1}{2}}$$

8) Λόγος Πιθανοφάνειας Ενδεχομένου (odds)

$$\text{odds του } A = \frac{P(A)}{P(A^c)} =$$ Πόσο είναι πιθανότερο να συμβεί το A από το να μη συμβεί.

9) Bayes σε Μορφή Λόγου Πιθανοφάνειας

$$\frac{P(H|E)}{P(H^c|E)} = \frac{\frac{P(H)P(E/H)}{\cancel{P(E)}}}{\frac{P(H^c)P(E/H^c)}{\cancel{P(E)}}} = \frac{P(H)P(E/H)}{P(H^c)P(E/H^c)}$$

10) Παράδειγμα

Υπάρχουν δύο νομίσματα σε 1 συρτάρι.

A ⟶ φέρνει K με πιθαν. 1/2

B ⟶ φέρνει K —"— 3/4

Διαλέγω νόμισμα στην τύχη

H: διαλέγω το A

Αρχικά odds του H $= \dfrac{P(H)}{P(H^c)} = \dfrac{1/2}{1/2} = 1$

Ρίχνω το νόμισμα και φέρνει Κ

Ε: φέρνει κορώνα

odds του H μετά το πείραμα $= \dfrac{P(H/E)}{P(H^c/E)} = 1 \cdot \dfrac{1/2}{3/4} = \dfrac{2}{3}$