8º Μάθημα Πιθανοτήτων 8/3/2010

⇒ Δεσμευμένη Πιθανότητα

1. Διαίσθηση

• Τυχαίο πείραμα: Ρίψη ζαριών

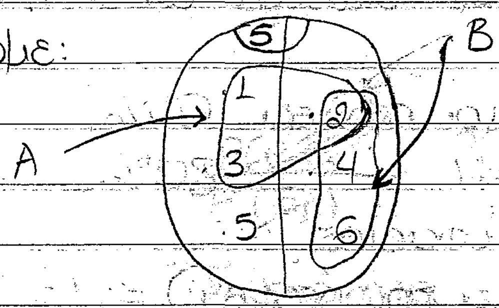
Δ.χ. = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = η ρίψη ≤ 3 = {1, 2, 3} $P(A) = \frac{1}{2}$

B = η ρίψη είναι άρτια

$P(A|B)$ = πιθανότητα του A δεδομένου του B = $\frac{1}{3}$

Σχηματικά έχουμε:



• Τυχαίο Πείραμα: Επιλογή ατόμων ⇒ Νº παπούτσι / Μέγεθος T-shirt

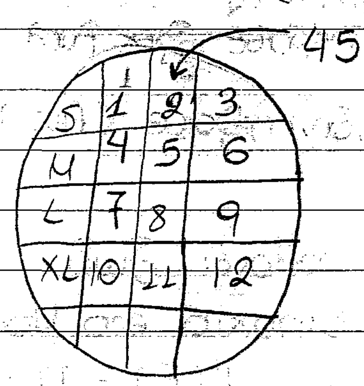
36-46 S, M, L, XL

A: φοράει Νº παπούτσι 45

B: φοράει T-shirt S

$P(B) = \frac{1+2+3}{(1+2+\dots+12)}$ $P(B|A) = \frac{2}{(2+5+8+11)}$

Σχηματικά έχουμε:



② Ορισμός

E, F ενδεχόμενα του δχ. S και $P(F)>0$ τότε:

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

τομή

δέσμευση

Δεσμευμένη πιθανότητα του E δεδομένου του F

③ Παραδείγματα

Φοιτητής θα επιλέξει ΠΚΕΜ: Ζωδιαστική Ι ή Στοχαστικές Ανελίξεις.

Αν πάρει Ζωδ. Ι πιθαν. να περάσει 60%

-||- Στοχ. Ανελ. —||— 80%.

Ρίχνει κέρμα για να αποφασίσει

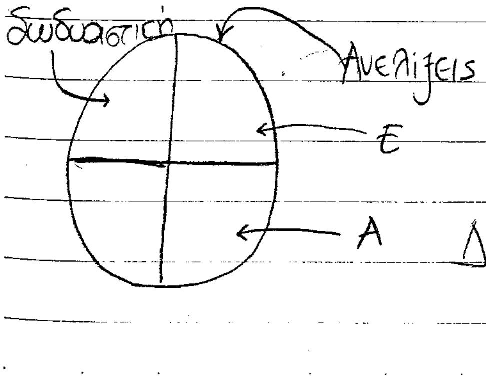
P(να επιλέξω Ζωδ. Ι κ' να την περάσει) =; $(= P(EF))$

P(να περάσει) =; $(= P(E))$

P(να επέλεξε Ζωδ. Ι / πέρασε) =; $(= P(F|E))$

Δειγματικός Χώρος:

	Επιλογή Μαθήμ.		Αποτέλεσμα		
0,5	Ζωδ. Ι	0,6	πέρασε Ζωδ. Ι	(Ζωδ, E)	0,3
		0,4	δεν πέρασε	(Ζωδ, A)	0,2
0,5	Στοχ. Ανελ.	0,8	πέρασε Στοχ. Ανελ.	(Ανελ., E)	0,4
		0,2	δεν πέρασε	(Ανελ., A)	0,1



F: παίρνει Ζωδ.

E: επιτυχία στο Μάθημα

Δεδομένα: $P(F) = P(F^c) = 0,5$

$P(E|F) = 0,6 \quad P(E|F^c) = 0,8$

Άρα: $P(E|F) = \dfrac{P(EF)}{P(F)} \Rightarrow P(EF) = P(E|F) \cdot P(F) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3$

$$P(E) = P(EF \cup EF^c) = P(EF) + P(EF^c) =$$
$$= P(F) \cdot P(E|F) + P(F^c)P(E|F^c) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}7$$

$$P(F|E) = \frac{P(EF)}{P(E)} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7}$$

4 Πολλαπλασιαστικός Νόμος

$$P(E_1E_2 \ldots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2) \ldots P(E_n|E_1E_2 \ldots E_{n-1})$$

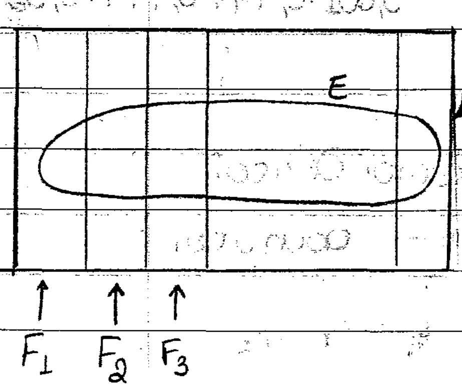
Απόδειξη:

$$P(E_1E_2 \ldots E_n) = \cancel{P(E_1)} \cdot \frac{\cancel{P(E_1E_2)}}{\cancel{P(E_1)}} \cdot \frac{P(\cancel{E_1E_2}E_3)}{P(\cancel{E_1E_2})} \cdots \frac{P(E_1E_2 \ldots E_n)}{P(E_1E_2 \ldots E_{n-1})}$$

5 Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Δειγματικός Χώρος: $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, F_i ασυμβίβαστα → ενδεχόμενα ανά δύο

$$P(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{P(F_i) \cdot P(E|F_i)}_{P(EF_i)}$$



Απόδειξη:

$$P(E) = P(E \cap S) = P\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)\right) =$$
$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(EF_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(EF_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i)P(E|F_i)$$

(6) Θεώρημα Bayes

Δειγματικός Χώρος: $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, F_i ασυμβίβαστα ενδεχόμενα $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(F_j|E) = \frac{P(F_jE)}{P(E)} \overset{\text{Πολλ/κός Νόμος}}{=} \frac{P(F_j)P(E|F_j)}{P(E)} \underset{\text{θ. ολικής πιθανότητας}}{=} \frac{P(F_j)P(E|F_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(F_i)P(E|F_i)}$$

Το Bayes συνδέει: $P(E/F)$ & $P(F/E)$

(7) Τεστ αίματος

Αιματολογικό τεστ για μια σπάνια ασθένεια ($\frac{1}{1.000}$ πιθ. ασθένειας στον πληθυσμό)

πιθ. σωστό θετικό = 99% , πιθ. λάθος θετικό = 2%

$P(\text{τεστ θετικό} \mid \text{ασθενής}) = 0,99$, $P(\text{τεστ θετικό} \mid \text{όχι ασθενής}) = 0,02$

$$P(\text{ασθενής} \mid \text{τεστ θετικό}) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(B/A)P(A)}{P(A)P(B/A) + P(A^c)P(B/A^c)} = \frac{0,99 \cdot 0,001}{0,001 \cdot 0,99 + 0,999 \cdot 0,02}$$

$$= \underline{\underline{0,0472}}$$

Άτομα 100.000
- 100 ασθενείς
  - 99 άρρωστοι θετικοί
  - 1 -"- αρνητικοί
- 99.900 υγιείς
  - 1.998 υγιείς θετικοί
  - 97.902 -"- αρνητικοί

$$P(\text{ασθενών} \mid \text{τεστ θετικό}) = \frac{99}{99 + 1.998} \cong \underline{0,04}$$