7° Μάθημα Πιθανοτήτων

5/3/2010

① Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(E_iE_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(E_iE_jE_k) - \dots$$

$$+ (-1)^{n+1} P(E_1E_2\dots E_n) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le n} P(E_{i_1}E_{i_2}\dots E_{i_r})$$

② Άσκηση

Επιλογή αριθμού από το 1 μέχρι το 1.000

P(ο αριθμός δεν διαιρείται με το 2 ούτε με το 3 ούτε με το 5) =

Αν: A_1: ο αριθμός διαιρείται με το 2

A_2: —— // —— 3

A_3: —— // —— 5

Ζητάμε: $P(A_1^c A_2^c A_3^c) = P((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$

$= 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) + P(A_1A_2) + P(A_1A_3)$

$+ P(A_2A_3) - P(A_1A_2A_3)$ (1)

$P(A_1) = \dfrac{500}{1.000} = \dfrac{1}{2}$

(Για να βρούμε τα πολλαπλάσια διαιρούμε το 1.000 με τον αριθμό και παίρνουμε το ακέραιο μέρος)

$P(A_2) = \dfrac{333}{1000} = \left\lfloor \dfrac{1000}{3} \right\rfloor$

$P(A_3) = \dfrac{200}{1.000} = \dfrac{1}{5}$.

$P(A_1A_2) = \dfrac{\left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor}{1.000}$ $\quad P(A_1A_3) = \dfrac{1}{10}$ $\quad P(A_2A_3) = \dfrac{\left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor}{1.000}$

$P(A_1A_2A_3) = \dfrac{\left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor}{1.000}$

$(1) \Rightarrow P(A_1^c A_2^c A_3^c) = \dots$

3) Άσκηση

20 άτομα $\xrightarrow{\text{μοιρασιά}}$ 5 ορόφους

Κάθε άτομο επιλέγει τυχαία όροφο.

P(τουλ. ένα άτομο να αποβιβαστεί στους ορόφους 1, 2, 3) = ;

Δειγματικός Χώρος = $S = \{(i_1, i_2, \dots, i_{20}) : i_j = 1,2,3,4,5\}$

i_j = ο όροφος που θα κατέβει ο j

και $|S| = 5^{20} \longleftarrow$ Διατάξεις

Έχουμε: A_i = ενδεχόμενο δεν αποβιβάζονται άτομα στον i-όροφο, $i = 1, 2, 3$

Ζητάω $P(A_1^c A_2^c A_3^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

$$= 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) + P(A_1 A_2) + P(A_1 A_3) + P(A_2 A_3) - P(A_1 A_2 A_3)$$

$$P(A_1) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{(i_1, i_2, \dots, i_{20}) \text{ που δεν εμφ. το } 1}{5^{20}} = \frac{4^{20}}{5^{20}}$$

$$P(A_2) = P(A_3)$$

$$P(A_1 A_2) = \frac{3^{20}}{5^{20}} = P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3)$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{2^{20}}{5^{20}}$$

Άρα: $$P(A_1^c A_2^c A_3^c) = 1 - 3 \cdot \frac{4^{20}}{5^{20}} + 3\,\frac{3^{20}}{5^{20}} - \frac{2^{20}}{5^{20}}$$

Τα ενδεχόμενα αυτά που έχουμε
$P(A_i) = P(A_j) = \dots = P(A_k)$ και
οι τομές τους ανά 2, 3, … είναι
ίσες λέγονται <u>ανταλλάξιμα</u>

④ Το πρόβλημα των συναντήσεων (Matching Problem)

N άτομα

N καπέλα (αντίστοιχα)

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & N \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ k1 & k2 & k3 & & kN \end{matrix}$$

Τυχαία αντιστοίχηση ατόμων - καπέλων

P(κανένα άτομο δεν παίρνει το καπέλο του).

Δειγματικός Χώρος: $\{(i_1, i_2, \dots, i_N)$: μετάθεση των $k1, \dots, kN\} = S$
με $|S| = N!$

Έχουμε: E_i = το ενδεχόμενο το i άτομο να πάρει το καπέλο του.

Ζητάω: $P(E_1^c E_2^c \dots E_N^c)$

$$P(E_1^c E_2^c \dots E_N^c) = P((E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N)^c) = 1 - P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N) =$$

$$= 1 - \sum_{r=1}^{N} (-1)^{r+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le N} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r}) =$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{N} (-1)^r \underbrace{\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le N}}_{= \binom{N}{r} \text{ όροι}} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r})$$

$P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r}) = P$(τα άτομα $i_1, i_2, \dots, i_r$ να πάρουν τα καπέλα τους)

$$= \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{(N-r)!}{N!}$$

όπου $(N-r)!$ είναι μεταθέσεις των καπέλων των υπόλοιπων ατόμων.

Επομένως: $$P_{\text{ζητ}} = 1 + \sum_{r=1}^{N} (-1)^r \binom{N}{r} \cdot \frac{(N-r)!}{N!} =$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{N} (-1)^r \frac{\cancel{N!}}{r!\,\cancel{(N-r)!}} \cdot \frac{\cancel{(N-r)!}}{\cancel{N!}}$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{N} \frac{(-1)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{N} \frac{(-1)^r}{r!} \rightarrow e^{-1} \text{ για } N \to +\infty$$

(5) Άσκηση

Τοποθέτηση των 52 φύλλων μιας τράπουλας σε σειρά

P(το 1º φύλλο μετά τον 1º Άσσο να είναι ο A ♠)

P(το ——— // ——— 2 ♠)

Ποια πιθανότητα είναι μεγαλύτερη;

?. Τα δύο ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

P(το 1º φύλλο μετά τον 1º Άσσο να είναι το "τάδε") $= \frac{\text{Ευνοϊκές}}{\text{Δυνατές}} =$

$= \frac{\text{Όλες οι μεταθέσεις που το "τάδε" είναι μετά τον 1º Άσσο}}{\text{Όλες οι μεταθέσεις των τραπουλ.}} = \frac{51!}{52!} = \frac{1}{52}$

γιατί

Μια ευνοϊκή φτιάχνεται σε 2 στάδια:

1º Στάδιο: Βάζω τα φύλλα εκτός από το "τάδε" σε σειρά $\Rightarrow$ 51! τρόποι

2º Στάδιο: Βάζω το τάδε μετά τον ~~Άσσο~~ πρώτο $\Rightarrow$ 1 τρόπος

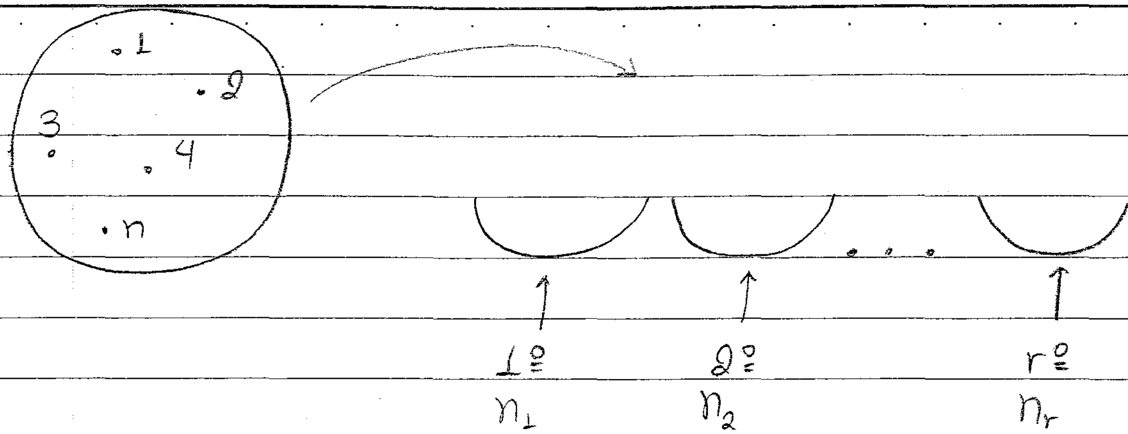
(6) Πολυωνυμικοί Συντελεστές

$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!} = \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_r)!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!} \Longleftarrow \text{Πολ/κοί Συντελεστές}$$

\# διαιρέσεων ενός συνόλου n στοιχείων σε r διακεκρ. υποσύνολα με $n_1, n_2, \ldots, n_r$ στοιχεία το καθένα.

\# μεταθέσεων n στοιχείων r ειδών με n_i στοιχεία από το είδος i



Μοιρασιά σε r στάδια:

1° Επιλογή στοιχείων για 1° σύνολο $\longrightarrow \binom{n}{n_1}$

2° 2° σύνολο $\longrightarrow \binom{n-n_1}{n_2}$

⋮

r° r° σύνολο $\longrightarrow \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}}{n_r}$

Από πολ/κή αρχή # διαιρέσεων $= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}}{n_r}$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_r!}$$

Για μεταθέσεις r ειδών:

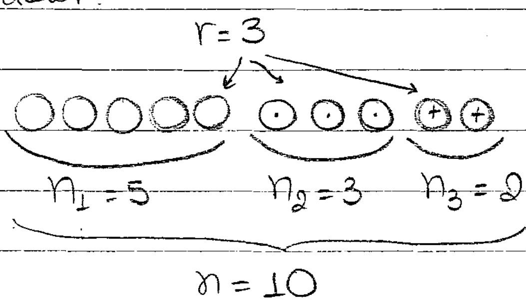
Π.χ. $n=10$

$r=3$

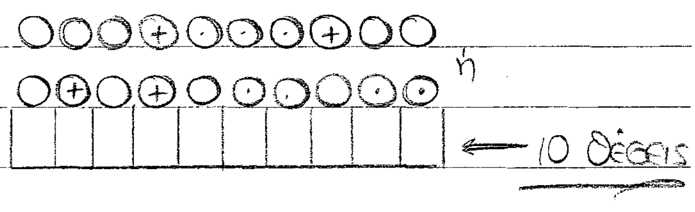
$n_1=5$

$n_2=3$

$n_3=2$



Είναι το ίδιο σα να χωρίσω τις 10 θέσεις σε 3 σύνολα με 5, 3, 2 στοιχεία



7) Άσκηση

Τράπουλα μοιράζεται ισόποσα σε 4 παίκτες

π.χ. Μπριτζ

P(ένας παίκτης παίρνει όλα τα ♣) = ;

P(κάθε παίκτης παίρνει από 1 άσσο) = ;

S: Δειγματικός Χώρος

Διαιρέσεις των 52 φύλλων σε 13, 13, 13, 13

με $|S| = \dfrac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}$

A: ένας παίκτης όλα τα ♣

ποιος παίρνει τα ♣ — Μοιράζω τα υπόλοιπα

$$P(A) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{\text{όλες οι διαιρέσεις που 1 παίρνει τα ♣}}{\text{όλες οι διαιρέσεις των 52 σε 13,13,13,13}} = \frac{4 \cdot \dfrac{39!}{13!\,13!\,13!}}{\dfrac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}}$$

B: ένας A ο καθένας

$$P(B) = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \cdot \dfrac{48!}{(12!)^4}}{\dfrac{52!}{(13!)^4}}$$