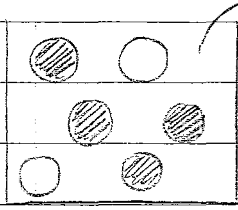
3/3/2010

Ασκήσεις - Εφαρμογές

① Επιλογή σφαιριδίων από κάλπη



επιλογή 3 χωρίς επανάθεση → $P(\exists$ ακριβώς 1 μαύρο σφαιρ. μεταξύ των επιλεχθέντων$) = ;$

κάλπη με 5Α+6Μ

Λύση: (Τα 11 σφαιρίδια ΠΑΝΤΑ διακεκριμένα)

(α) Με διατάξεις (Δειγματικός χώρος: Διατεταγμένες 3-άδες σφαιριδίων)

$$P = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} \quad (1)$$

6 5 4   5 6 4   5 4 6 ← ευνοϊκές επιλογές

Μ Α Α   Α Μ Α   Α Α Μ

11 10 9 ← δυνατές επιλογές.

$$(1) \Rightarrow P = \frac{6\cdot5\cdot4 + 5\cdot6\cdot4 + 5\cdot4\cdot6}{11\cdot10\cdot9} = \frac{360}{990} = \frac{4}{11}$$

(β) Με συνδυασμούς (Δειγματικός χώρος Συνδυασμών 11 ανά 3 σφαιρίδια)

$$P = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$$

$$\text{Ευνοϊκές} = \binom{5}{2}\binom{6}{1}$$

$$\text{Δυνατές} = \binom{11}{3}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\binom{5}{2}\binom{6}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{6}{1}}{\frac{11\cdot10\cdot9}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{4}{11}$$

2) Το πρόβλημα των γενεθλίων

n άτομα

P(τουλάχιστον 2 από αυτούς να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα) = ; $= A$

Ελάχιστο n ώστε $P \geq \frac{1}{2}$;

Λύση:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P\left(\begin{matrix}\text{όλοι γενεθλ.}\\ \text{διαφορ. μέρες}\end{matrix}\right) = 1 - \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} =$$

$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365-n+1)}{365^n}$$

Ελάχιστο $n = 23 \Rightarrow P = 0{,}5073$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ

n	P
20	0,411
23	0,507
30	0,706
40	0,891
50	0,970

ΓΕΝΙΚΑ:

Κάλπη με όμοια ή όχι αντικείμενα → Εξαγωγή αντικειμένων $\boxed{\text{χωρίς}}$ επανάθεση → Μπορώ να χρησιμοποιώ ευνοϊκές/δυνατές.

③ Χέρια Πόκερ

Τράπουλα με 52 χαρτιά

Εξαγωγή 5 χαρτιών = Χέρι πόκερ

Καρέ = 4 φύλλα ίδιου αριθμού + 1 διαφορ.

Φουλ = 3 ίδια + 2 ίδια

P(καρέ) = ;   P(φουλ) = ;

K♣ K♦ A♣ K♠ K♥

Λύση:

1) Με διατάξεις

$$P(\text{καρέ}) = \frac{\text{Ευνοϊκές}}{\text{Δυνατές}}$$

- Μια ευνοϊκή γίνεται σε στάδια:

1ο: επιλογή αριθμού 4 φύλλων ⇒ 13 επιλογές

2ο: επιλογή -"- 1 φύλλου ⇒ 12 -"-

3ο: -"- χρώματος 4 φύλλων ⇒ 1 επιλογή

4ο: -"- χρώματος 1 φύλλου ⇒ 4 επιλογές

5ο: τοποθέτηση σε σειρά ⇒ 5! επιλογές

Ευνοϊκές = $13 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5!$

Άρα: $$P(\text{καρέ}) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5!}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$$

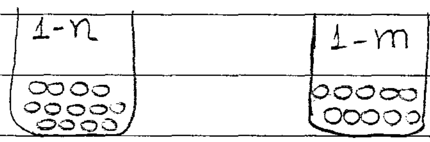
2) Με συνδυασμούς

$$P(\text{καρέ}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}}$$

$$P(\text{φουλ}) = \frac{13 \cdot 12 \binom{4}{3} \binom{4}{2} \cdot 5!}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \quad (\text{με διατάξεις})$$

$$= \frac{13 \cdot 12 \binom{4}{3} \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} \quad (\text{με συνδυασμούς})$$

4) Άσκηση



1η κάλπη   2η κάλπη

Πείραμα Τύχης: Επιλογή 2 αριθμών
1 από 1η κάλπη
1 από 2η κάλπη

$P(\underbrace{\text{αριθμός της κάλπης } 1 < \text{αριθμός της κάλπης } 2}_{=A}) = ;$

$P(\text{άθροισμα αριθμών} = k) = ;$

Δειγματικός Χώρος: $S = \{(i,j),\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$

$|S| = n \cdot m$

Έστω ότι $n > m$. Τότε $|A| = (m-1) + (m-2) + \dots + 1 + 0 + \dots + 0$

$$= \frac{(m-1)m}{2}$$

Άρα: $P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\frac{(m-1)m}{2}}{m \cdot n} = \frac{m-1}{2n}$