

Πιθανότητες και Αναλογισμός

1^η Σειρά Ασκήσεων – Οκτώβριος 2018

Αρχή Ωφελιμότητας και Ασφάλιστρο

1. Ασφαλιζόμενος με κεφάλαιο $w = 10$ και $\omega.σ$ $u(w) = 20w - w^2$ θα ασφαλιστεί για τυχαία ζημιά $X \sim f(x) = 3x^2, ; 0 < x < 1$. Επιπλέον μία ασφαλιστική εταιρεία διαθέτει κεφάλαιο $w_0 = 10^6$ και χρησιμοποιεί εκθετική $\omega.σ$ $u_I(w_0) = 1 - \exp\{-w_0\}$. Για τη περίπτωση της ολικής κάλυψης της συγκεκριμένης ζημιάς να βρεθούν

(α) Το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο από τον ασφαλιζόμενο, G_{max} .

(β) Το ελάχιστο αποδεκτό ασφάλιστρο από την εταιρεία, H_{min} .

(γ) Εξετάστε αν υπάρχει εφικτή ασφαλιστική πολιτική, και, αν ναι να βρείτε κάποια δυνατή τιμή του ασφάλιστρου.

2. Άτομο με $\omega.σ$ $u(w) = 1 - \exp\{-2w\}, ; w \geq 0$ επιθυμεί να ασφαλιστεί για μερική κάλυψη τυχαίας ζημιάς $X \sim f(x) = 4\exp\{-4x\}, ; x \geq 0$. Από μία ασφαλιστική εταιρεία του προτείνεται μερική κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς,

$$I_d(X) = \max\{0, X - d\} = \begin{cases} 0, & 0 \leq X \leq d \\ X - d, & X \geq d \end{cases} \quad (1)$$

όπου $d \geq 0$. Αν ο ασφαλιζόμενος διαθέτει ποσό $G = \frac{1}{2} \log(\frac{3}{2})$ ως ασφάλιστρο να βρείτε:

(α) τη τιμή του αφαιρετέου ποσού d , ώστε η αναμενόμενη ωφέλεια να είναι ίση είτε με την συγκεκριμένη κάλυψη είτε χωρίς κάλυψη.

(β) την πιθανότητα ο ασφαλισμένος να πληρώσει ασφάλιστρο μεγαλύτερο της κάλυψης που του παρέχεται.

(γ) το μέσο κέρδος της εταιρείας αν προχωρήσει στη συγκεκριμένη κάλυψη.

3. Ένας ασφαλιζόμενος με κεφάλαιο w και ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = 5 - e^{-\frac{w}{10}}$ επιθυμεί να ασφαλιστεί για ολική κάλυψη έναντι δύο ανεξάρτητων κινδύνων X_1, X_2 με πυκνότητες

$$f_{X_1}(x) = xe^{-x}, x > 0 \text{ και } f_{X_2}(x) = e^{-x}, x > 0, \quad (2)$$

αντίστοιχα. Για την ασφάλιση του σκέπτεται να ασφαλιστεί για τη συνολική ζημιά $X = X_1 + X_2$ σε μία εταιρεία.

(α) Προσδιορίστε το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο που δέχεται να καταβάλλει για την ολική κάλυψη της συνολικής ζημιάς X .

(β) Αν η ασφαλιστική εταιρεία έχει ωφελιμοσυνάρτηση $u_I(w_0) = 3 - e^{-\frac{w_0}{20}}$, ποιό είναι το ελάχιστο ασφάλιστρο που θα απαιτήσει από τον ασφαλιζόμενο για ολική κάλυψη της συνολικής ζημιάς X ; Υπάρχει εφικτή ασφαλιστική πολιτική;

(γ) Έστώ ότι ο ασφαλιζόμενος αντιμετωπίζει **μόνο** τον δεύτερο κίνδυνο X_2 και διαθέτει ποσό $G = \frac{10}{9} \log\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ ως ασφάλιστρο. Αν μία εταιρεία του προτείνει τη μερική κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς $I_d(X_2) = \max\{0, X_2 - d\}$, $d \geq 0$ έναντι του δεύτερου κινδύνου, να βρείτε τη τιμή του αφαιρετέου ποσού d , ώστε η αναμενόμενη ωφέλεια του ασφαλιζόμενου να είναι ίση είτε με την προτεινόμενη μερική κάλυψη είτε χωρίς κάλυψη.

4. Η ένταση Y ενός σεισμού που μπορεί να πραγματοποιηθεί στην Αθήνα σε ένα έτος είναι τ.μ. με $Y \sim U(0, 8)$, ενώ η οικονομική ζημιά δίνεται από την τ.μ.

$$X = g(Y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } Y < 3 \\ Y - 3, & \text{αν } 3 \leq Y \leq 8 \end{cases} \quad (3)$$

Ο δήμος διαθέτει κεφάλαια $W = 9$ εκατ. ευρώ και η δήμαρχος υπολογίζει με ω.σ $u(w) = \sqrt{w}$. Στη περίπτωση ολικής κάλυψης

(α) Να βρείτε το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο από τον δήμο, G_{max} .

(β) Αν η ασφαλιστική εταιρεία έχει $w_0 = 100$ εκ. ευρώ. και ω.σ. $u_I(w_0) = 1 - \exp\{-\frac{w_0}{20}\}$; $w_0 \geq 0$. να βρείτε το ελάχιστο αποδεκτό ασφάλιστρο από την εταιρεία, H_{min} . Υπάρχει εφικτή ασφαλιστική πολιτική.

(γ) Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος και την πιθανότητα να ζημιωθεί η εταιρεία αν το καταβληθέν ασφάλιστρο είναι ίσο με $G = G_{max}$.

5. Άτομο με περιουσία $w = 10^4$ χρησιμοποιεί ω.σ $u(w) = 1 - \exp\{-\frac{w}{1000}\}$; $w \geq 0$. Επιθυμεί να ασφαλιστεί για μερική κάλυψη $I(X)$ από ζημιά X με $X \sim U(0, 1000)$ και διαθέτει για ασφάλιστρο $G = 100$. Η πολιτική μίας εταιρείας για μερική κάλυψη προσδιορίζει το ασφάλιστρο σύμφωνα με $G = (1 + \theta)E[I(X)]$ με $\theta = 25\%$.

(α) Αν ακολουθηθεί η μερική κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς, $I_d(X)$, να προσδιοριστεί η τιμή της παραμέτρου d .

(β) Αν ακολουθηθεί η αναλογική μερική κάλυψη, δηλ. η $I_p(X) = p \cdot X$ για $p \in [0, 1]$, να προσδιοριστεί η τιμή της παραμέτρου p .

(γ) Για το ασφάλιστρο $G = 100$ που διαθέτει θα προχωρήσει ο ασφαλιζόμενος σε κάποια κάλυψη, και αν ναι, σε ποιά από τις δύο.

Σημείωση: Για το (γ) ερώτημα θα πρέπει να συγκρίνεται τις αναμενόμενες ωφέλειες που προκύπτουν στις τρεις περιπτώσεις: **I.** Χωρίς κάλυψη, **II.** Με μερική κάλυψη $I_d(X)$, **III.** Με μερική κάλυψη $I_p(X)$ για τις τιμές των d και p που βρήκατε στα ερωτήματα (α) και (β).

6. Ένας ασφαλιζόμενος με κεφάλαιο $w = 5$ και ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = \sqrt{w}$ επιθυμεί να ασφαλιστεί έναντι τυχαίας ζημιάς X με πυκνότητα $f_X(x) = \frac{2}{25}(5 - x)$, $0 \leq x \leq 5$.

(α) Προσδιορίστε το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο $G = G_{max}$ που δέχεται να καταβάλλει για ολική κάλυψη έναντι της ζημιάς X , καθώς και τό μέσο κέρδος της εταιρείας.

(β) Αν μία εταιρεία έχει ωφελιμοσυνάρτηση $u_I(w) = 2 - \frac{3}{5} \exp(-\frac{3w}{5})$ και αρχικό κεφάλαιο w_0 , ποιο είναι το ελάχιστο ασφάλιστρο που θα απαιτήσει για την ολική κάλυψη της συνολικής ζημιάς X ; Υπάρχει εφικτή ασφαλιστική πολιτική;

(γ) Αν ο ασφαλιζόμενος προχωρήσει σε μερική κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς,

$$I_d(X) = \max\{0, X - d\}, \quad (4)$$

να βρείτε την $E[I_d(X)]$, $0 \leq d \leq 5$, ως συνάρτηση του d , και να αποδείξετε ότι για κάθε P με $0 < P < \frac{5}{3}$, η εξίσωση $E[I_d(X)] = P$ έχει μοναδική λύση ως προς d . Να βρεθεί το ποσό αποκοπής d για $P = \frac{9}{25}$.

7. Μία ασφαλιστική εταιρεία απαιτεί ασφάλιστρο $G = \frac{6}{5}E[I(X)]$ για μερική κάλυψη $I(X)$ μίας τυχαίας ζημιάς X . Ένας ασφαλιζόμενος διαθέτει ποσό $G = 34.2$ για να ασφαλιστεί μερικώς από ζημιά $X \sim f(x) = P(X = x) = \frac{1}{100}$, $x = 1, 2, \dots, 100$.

(α) Να προσδιοριστεί η τιμή της παραμέτρου d για μερική κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς, $I_d(X)$.

(β) Με βάση την ασφαλιστική πολιτική στο (α) να βρείτε την πιθανότητα να ζημιωθεί η εταιρεία και το αναμενόμενο κέρδος της.

Επιμέλεια Ασκήσεων: Γιάννης Δημητρακόπουλος