υπερβαίνει το $\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{1}{q}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)-1\right]$ στο 18(i), το $\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{1}{q}\left(1+\alpha^2\right)-1\right]$ στο 18(ii) και το $\frac{3}{\varepsilon^2}$ στο 18(iii).

20. (i) Δίδονται χαρτοφυλάκιο n_B κινδύνων $(q,\ b)$ και χαρτοφυλάκιο n_E κινδύνων $(q,\ Exp(\beta))$. Αν τα δύο χαρτοφυλάκια έχουν την ίδια τιμή του πηλίκου $\frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}$ να δειχθεί ότι $\frac{n_E}{n_B}=\frac{2-q}{1-q}$. (ii) Αν το χαρτοφυλάκιο $(q_B,\ b)$ και το χαρτοφυλάκιο $(q_E,\ Exp(\beta))$ έχουν τον ίδιο αριθμό κινδύνων και την ίδια τιμή $\frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}$, να δειχθεί ότι $q_E=2q_B$. (iii) Αν χαρτοφυλάκιο n_B κινδύνων $(q_B,\ b)$ και n_E κινδύνων $(q_E,\ Exp(\beta))$ απαιτούν την ίδια τιμή του θ προκειμένου να επιτευχθεί $\Pr(S>(1+\theta)E(S))=\alpha$, να δειχθεί ότι $\frac{m_E}{m_B}=\frac{2-q_E}{1-q_B}$ (m ο αναμενόμενος αριθμός αποζημιώσεων).

21. Δίδεται χαρτοφυλάκιο 10.000 κινδύνων $(q=0{,}01,\ X\sim U(100))$ και επιδιώκεται $\Pr(S>(1+\theta)E(S))=0{,}01$. (i) Να δειχθεί ότι το αναγκαίο θ είναι περίπου 0,2677. (ii) Να δειχθεί ότι, για να αρκεί θ = 0,1, το πλήθος των κινδύνων πρέπει να αυξηθεί σε 71.658.

22. Δίδεται χαρτοφυλάκιο n κινδύνων με q = 0,01 και $f(x)=e^{-x},\ x>0$. (i) Αν $\frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}=\frac{1}{10}$, να δειχθεί ότι n = 19.900. (ii) Αν το θ που απαιτείται για $\Pr(S>(1+\theta)E(S))=0{,}025$ είναι 0,0392, να δειχθεί ότι n = 497.500. (iii) Αν το θ που απαιτείται για n_1 κινδύνους και $\Pr(S>(1+\theta)E(S))=\alpha$ είναι θ_1, να δειχθεί ότι το θ που απαιτείται για $2n_1$ κινδύνους (και την ίδια πιθανότητα) είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}\theta_1$. (iv) Αν το θ που απαιτείται για n κινδύνους και $\Pr(S>(1+\theta)E(S))=0{,}05$ είναι θ_1, να δειχθεί ότι το θ που απαιτείται για $\Pr(S>(1+\theta)E(S))=0{,}01$ (και το ίδιο πλήθος κινδύνων) είναι περίπου $1{,}4146\theta_1$.

23. Δίδονται n κίνδυνοι με q = 0,01 και $f(x)=e^{-\frac{3}{2}x}+e^{-3x},\ x\geq 0$. (i) Να δειχθεί, ότι η ανισότητα $\frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}<\varepsilon$ συνεπάγεται $n>\frac{215}{\varepsilon^2}$ (ii) Αν n = 860 και $\theta=\frac{3}{2}$, να δειχθεί ότι $\Pr(S>(1+\theta)E(S))=0{,}00135$. (iii) Αν το θ μειωθεί σε $\theta=\frac{1}{2}$, πόσοι κίνδυνοι απαιτούνται για να διατηρηθεί η πιθανότητα στο 0,00135;

24. (i) Ένα χαρτοφυλάκιο n κινδύνων με $q = \frac{1}{2}$, $E(X) = \mu$ και $Var(X) = \mu^2$ έχει $\theta = 0{,}01$ και πιθανότητα ότι το ασφάλιστρο δεν θα επαρκέσει $\leq 0{,}025$. Να δειχθεί ότι $n \geq 115.248$. (ii) Ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων με $q = \frac{1}{2}$, $E(X) = \mu$, $Var(X) = \mu$ έχει τέτοιο αριθμό κινδύνων ώστε $\theta \cdot \frac{E(S)}{\sqrt{Var(S)}}$ είναι ίσο με μια συγκεκριμένη τιμή του z_α. Να δειχθεί ότι $n = \left(1 + \frac{2}{\mu}\right)\left(\frac{z_\alpha}{\theta}\right)^2$. (iii) Αν, στο (ii), $n = 10.000$ και $z_\alpha = 2$, να δειχθεί ότι $\theta = \sqrt{\frac{2}{m} + \frac{4}{E(S)}}$.

25. (i) Για χαρτοφυλάκιο $\left(q_i,\ X\left(\mu,\ \sigma^2\right)\right)$ (διαφορετικά q, αλλά ισόνομα X), να δειχθεί, ότι η επιλογή $\theta = z_\alpha \sqrt{\frac{1}{m} \frac{E\left(X^2\right)}{(E(X))^2}}$ είναι "συντηρητική" (άνω φράγμα για την απαιτούμενη). (ii) Να δειχθεί, ότι το πλήθος των κινδύνων που απαιτείται για να έχουμε $\Pr(S > (1+\theta)E(S)) \leq \alpha$ για κάποιο (προεπιλεγμένο) θ είναι $n \geq \frac{1}{q}\left(\frac{z_\alpha}{\theta}\right)^2 \frac{E\left(X^2\right)}{(E(X))^2}$.

26. (i) Να δειχθεί ότι $\int_0^x g(y) f(x-y)\, dy = \int_0^x f(y)\, g(x-y)\, dy$. (ii) Η ροπογεννήτρια $M_{X_1+X_2}(t) = \int_0^\infty e^{tx} f_{X_1+X_2}(x)\, dx$ μπορεί να γραφεί $M_{X_1+X_2}(t) = \int_0^\infty e^{tx} \int_0^x f_{X_1}(y) f_{X_2}(x-y)\, dydx$. Να χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα αυτό για να δοθεί μια εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος Ι.6.5. (iii) Να δειχθεί το αντίστοιχο (προς το Θεώρημα Ι.6.5) Θεώρημα για το μετασχηματισμό Laplace, δηλαδή, ότι $L_{f*g}(t) = L_f(t) \cdot L_g(t)$.

27. Οι τ.μ. X_1 και X_2 είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[0,\ 1]$ και ανεξάρτητες. (i) Να δειχθεί, τόσο με τη συνέλιξη των f_{X_1}, f_{X_2} όσο και με γεωμετρικά επιχειρήματα, ότι $f_{X_1+X_2}(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$.

(ii) Η ροπογεννήτρια της $X \sim U(0,\ 1)$ είναι $\frac{e^t - 1}{t}$ και, κατά συνέπεια,