ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ (Συνέχεια)

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

26 Οκτωβρίου 2009

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Η διερεύνηση, σε γενικές γραμμές, της δεσμευμένης πιθανότητας και η σύγκρισή της με την απόλυτη πιθανότητα αποκαλύπτει την ανάγκη εισαγωγής και μελέτης της έννοιας της στοχαστικής ανεξαρτησίας ενδεχομένων.

Σχετικά, ας θεωρήσουμε ένα δειγματικό χώρο Ω και δύο ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$.
Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας συνάγουμε ότι

(α) αν A και B είναι ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα, $AB = \emptyset$, τότε $P(B|A) = 0$, επειδή, δεδομένης της πραγματοποίησης του A, αποκλείεται η πραγματοποίηση του B, ενώ

(β) αν το ενδεχόμενο A είναι υποενδεχόμενο του B, $A \subseteq B$, τότε $P(B|A) = 1$, επειδή η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση και του B.

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Αυτές είναι οι δύο ακραίες περιπτώσεις, όπου η γνώση της πραγματοποίησης του A μας παρέχει σαφή πληροφορία καθορίζοντας την πιθανότητα πραγματοποίησης του B.
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, τόσο από θεωρητική άποψη όσο και από άποψη εφαρμογών, παρουσιάζει η περίπτωση όπου A και B ενδεχόμενα τέτοια ώστε

$$P(B|A) = P(B),$$

στην οποία η γνώση της πραγματοποίησης του A δεν έχει καμία επίδραση στην πραγματοποίηση του B.

Το ενδεχόμενο B καλείται τότε *στοχαστικώς ανεξάρτητο* του A.

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$, με $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$, σύμφωνα με το πολλαπλασιαστικό θεώρημα, ισχύουν οι σχέσεις

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A|B)P(B).$$

Επομένως, αν το ενδεχόμενο B είναι στοχαστικώς ανεξάρτητο του A, $P(B|A) = P(B)$, τότε και το ενδεχόμενο A είναι στοχαστικώς ανεξάρτητο του B, $P(A|B) = P(A)$ και αντίστροφα.
Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή, ισχύει η σχέση

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

στην οποία αντικατοπτρίζεται η συμμετρικότητα της ανεξαρτησίας δύο ενδεχομένων ως προς αυτά.

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Ορισμός

Έστω Ω *ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) και* $A, B \subseteq \Omega$. *Τα ενδεχόμενα* A *και* B *καλούνται (στοχαστικώς) ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύει η σχέση*

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{1}$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Παράδειγμα

Έστω ότι μία οικογένεια με 3 παιδιά εκλέγεται τυχαία από το σύνολο των τρίτεκνων οικογενειών.
Ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο A η εκλεγόμενη οικογένεια να έχει παιδιά και των δύο φύλων και το ενδεχόμενο B να έχει το πολύ ένα κορίτσι.
Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

Παρατηρούμε ότι η τομή AB είναι το ενδεχόμενο η εκλεγόμενη οικογένεια να έχει ακριβώς ένα κορίτσι. Εύκολα υπολογίζονται οι πιθανότητες

$$P(AB) = \frac{3}{8}, \quad P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως $P(AB) = P(A)P(B)$ και έτσι τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Η έννοια της στοχαστικής ανεξαρτησίας ενδεχομένων δύναται να επεκταθεί σε περισσότερα από δύο ενδεχόμενα.

Ας θεωρήσουμε αρχικά τρία ενδεχόμενα A_1, A_2 και A_3 και ας υποθέσουμε ότι είναι *κατά ζεύγη ανεξάρτητα*, οπότε ισχύουν οι σχέσεις

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2),\ P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3),\ P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3). \tag{2}$$

Η ανεξαρτησία του A_1 τόσο από το A_2 όσο και από το A_3 δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη την ανεξαρτησία του A_1 από την τομή A_2A_3

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Παρατηρούμε ότι αν, επιπλέον των (2), ισχύει και η σχέση

$$P[A_1(A_2A_3)] = P(A_1)P(A_2A_3), \tag{3}$$

τότε ισχύει και η σχέση

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3). \tag{4}$$

Αντίστροφα αν, επιπλέον των (2), ισχύει και η (4), τότε ισχύει και η (3), όπως επίσης και οι σχέσεις

$$P[A_2(A_1A_3)] = P(A_2)P(A_1A_3), \quad P[A_3(A_1A_2)] = P(A_3)P(A_1A_2).$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Ορισμός

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) και $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, \upsilon$.
Τα ενδεχόμενα A_i, $i = 1, 2, \ldots, \upsilon$ καλούνται (αμοιβαίως ή πλήρως) ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_\kappa}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_\kappa}), \tag{5}$$

για κάθε συνδυασμό $\{i_1, i_2, \ldots, i_\kappa\}$ των υ δεικτών $\{1, 2, \ldots, \upsilon\}$ ανά κ και για κάθε $\kappa = 2, 3, \ldots, \upsilon$.

Παράδειγμα

Κατά ζεύγη αλλά όχι πλήρως ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Ας θεωρήσουμε δύο διαδοχικές ρίψεις ενός κύβου και έστω A_i *το ενδεχόμενο εμφάνισης άρτιου αριθμού στην* i*-οστή ρίψη,* $i = 1, 2$*, και* A_3 *το ενδεχόμενο το άθροισμα των αριθμών που εμφανίζονται στις δύο ρίψεις να είναι άρτιος αριθμός.*

Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα A_1, A_2 *και* A_3 *είναι ανεξάρτητα.*

Ο δειγματικός χώρος Ω *του τυχαίου πειράματος των δύο ρίψεων κύβου περιλαμβάνει* $N(\Omega) = 36$ *ισοπίθανα δειγματικά σημεία, τα οποία είναι οι διατάξεις των 6 εδρών* $\{1, 2, \ldots, 6\}$ *ανά 2 με επανάληψη.*

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Επίσης

$$A_1 = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(4,1),(4,2),(4,3),\\ (4,4),(4,5),(4,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\},$$

$$A_2 = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6),\\ (4,2),(4,4),(4,6),(5,2),(5,4),(5,6),(6,2),(6,4),(6,6)\},$$

$$A_3 = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),\\ (4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\}$$

και

$$A_1A_2 = A_1A_3 = A_2A_3 = A_1A_2A_3\\ = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}.$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας,

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$

και

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = P(A_1A_2A_3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Επομένως τα ενδεχόμενα A_1, A_2 και A_3 είναι κατά ζεύγη ανεξάρτητα, επειδή ισχύουν οι σχέσεις

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2),\ P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3),\ P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

αλλά δεν είναι πλήρως ανεξάρτητα, επειδή δεν ισχύει και η σχέση

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία τριών ρίψεων ενός συνήθους νομίσματος. Έστω A_j το ενδεχόμενο της εμφάνισης στην j-οστή ρίψη της όψης κεφαλή (κορώνα), $x = 1, 2, 3$.
Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα A_1, A_2 και A_3 είναι ανεξάρτητα.

Ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{(\gamma,\gamma,\gamma),(\gamma,\gamma,\kappa),(\gamma,\kappa,\gamma),(\kappa,\gamma,\gamma),\\ (\gamma,\kappa,\kappa),(\kappa,\gamma,\kappa),(\kappa,\kappa,\gamma),(\kappa,\kappa,\kappa)\}$$

και

$$A_1 = \{(\kappa,\gamma,\gamma),(\kappa,\gamma,\kappa),(\kappa,\kappa,\gamma),(\kappa,\kappa,\kappa)\},$$

$$A_2 = \{(\gamma,\kappa,\gamma),(\gamma,\kappa,\kappa),(\kappa,\kappa,\gamma),(\kappa,\kappa,\kappa)\},$$

$$A_3 = \{(\gamma,\gamma,\kappa),(\gamma,\kappa,\kappa),(\kappa,\gamma,\kappa),(\kappa,\kappa,\kappa)\}.$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Επίσης

$$A_1A_2 = \{(\kappa, \kappa, \gamma), (\kappa, \kappa, \kappa)\}, \quad A_1A_3 = \{(\kappa, \gamma, \kappa), (\kappa, \kappa, \kappa)\},$$

$$A_2A_3 = \{(\gamma, \kappa, \kappa), (\kappa, \kappa, \kappa)\}, \quad A_1A_2A_3 = \{(\kappa, \kappa, \kappa)\}.$$

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας,

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{8}$$

και έτσι

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2), \; P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3), \; P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3),$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

Επομένως τα ενδεχόμενα A_1, A_2 και A_3 είναι πλήρως ανεξάρτητα.

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ

Η έννοια των ανεξαρτήτων δοκιμών ενός στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος αποτελεί βασικό στοιχείο των περισσοτέρων στοχαστικών προτύπων (μοντέλων) που μελετά η Θεωρία Πιθανοτήτων.

Για την εισαγωγή της έννοιας αυτής ας θεωρήσουμε αρχικά δύο στοχαστικά πειράματα με δειγματικούς χώρους Ω_1 και Ω_2.

Η διαδοχική (ή και ταυτόχρονη) εκτέλεση των δύο αυτών πειραμάτων ορίζει ένα *(διδιάστατο) σύνθετο στοχαστικό (τυχαίο) πείραμα*.
Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος για τη μελέτη του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι το καρτεσιανό (ή συνδυαστικό) γινόμενο

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2\}.$$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ

Ένα διδιάστατο σύνθετο στοχαστικό πείραμα, το οποίο συνίσταται στη διαδοχική εκτέλεση ενός στοχαστικού πειράματος με δειγματικό χώρο Ω, καλείται ειδικότερα *ακολουθία δύο δοκιμών* του στοχαστικού αυτού πειράματος.
Στην ειδική αυτή περίπτωση, στην οποία $\Omega_1 = \Omega$ και $\Omega_2 = \Omega$, ο δειγματικός χώρος είναι το καρτεσιανό γινόμενο του Ω με τον εαυτό του,

$$\Omega^2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega,\ \omega_2 \in \Omega\}.$$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ

Ας θεωρήσουμε ένα ενδεχόμενο $A_i \subseteq \Omega_i$ (ως προς το δειγματικό χώρο Ω_i), $i = 1, 2$.
Το ενδεχόμενο αυτό ως προς το δειγματικό χώρο $\Omega_1 \times \Omega_2$, του συνθέτου πειράματος, εκφράζεται από το σύνολο $B_i \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$, $i = 1, 2$, όπου $B_1 = A_1 \times \Omega_2$ και $B_2 = \Omega_1 \times A_2$.
Τα ενδεχόμενα B_1 και B_2 αναφέρονται ως ενδεχόμενα εξαρτώμενα από το πρώτο και δεύτερο στοχαστικό πείραμα, αντίστοιχα. Ειδικότερα, στην περίπτωση που $\Omega_1 = \Omega$ και $\Omega_2 = \Omega$ τα ενδεχόμενα B_1 και B_2 αναφέρονται ως ενδεχόμενα εξαρτώμενα από την πρώτη και δεύτερη δοκιμή του στοχαστικού πειράματος, αντίστοιχα.
Η πραγματοποιήση ή μη του ενδεχομένου B_i εξαρτάται αποκλειστικά από το αποτέλεσμα του i-οστού πειράματος (ή της i-οστής δοκιμής), $i = 1, 2$.
Η έννοια της στοχαστικής ανεξαρτησίας ενδεχομένων μεταφέρεται και σε στοχαστικά πειράματα και κατά συνέπεια και σε δοκιμές στοχαστικού πειράματος.

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ

Δύο στοχαστικά (τυχαία) πειράματα με δειγματικούς χώρους Ω_1 *και* Ω_2 *καλούνται ανεξάρτητα αν και μόνο αν η ισχύει η σχέση*

$$P(B_1 B_2) = P(B_1)P(B_2), \tag{6}$$

όπου $B_1 = A_1 \times \Omega_2$ *και* $B_2 = \Omega_1 \times A_2$ *ενδεχόμενα (ως προς το δειγματικό χώρο* $\Omega_1 \times \Omega_2$ *) εξαρτώμενα από το πρώτο και δεύτερο στοχαστικό πείραμα, αντίστοιχα.*

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ

Η σημασία των ανεξαρτήτων στοχαστικών πειραμάτων και ειδικότερα των ανεξαρτήτων δοκιμών ενός στοχαστικού πειράματος έγκειται κυρίως στο ότι δύνανται να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή χρησίμων στοχαστικών προτύπων (μοντέλων).

Στην περίπτωση αυτή δεν αρχίζει κάποιος ορίζοντας αξιωματικά την πιθανότητα $P(B)$, $B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$, και μετά, εξετάζοντας κατά πόσον ικανοποιούνται όλες οι σχέσεις της μορφής (6), διαπιστώνει την ανεξαρτησία ή μη των στοχαστικών πειραμάτων.

Αντίθετα μάλιστα, πρώτα ορίζονται οι πιθανότητες $P_i(A_i)$, $A_i \subseteq \Omega_i$, $i = 1, 2$ και μετά, υποθέτοντας ότι τα στοχαστικά πειράματα είναι ανεξάρτητα, ορίζεται η πιθανότητα $P(B)$, $B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις (6).

Σημειώνουμε ότι, από πρακτική άποψη, η υπόθεση της ανεξαρτησίας των στοχαστικών πειραμάτων διατυπώνεται μετά την εξέταση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελούνται και σύμφωνα με τα αποτελέσματα σειράς παρατηρήσεων.

Σχετικά με τη δυνατότητα ορισμού της πιθανότητας $P(B)$, για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$, μέσω των πιθανοτήτων $P_i(A_i)$, $A_i \subseteq \Omega_i$, $i = 1, 2$, στην περίπτωση που υποθέσουμε ότι τα στοχαστικά πειράματα είναι ανεξάρτητα με διακριτούς δειγμτικούς χώρους, επιτυγχάνεται ως εξής:

Αρχικά, χρησιμοποιώντας την (6), ορίζεται η πιθανότητα για κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο $\{(\omega_1, \omega_2)\}$ του δειγματικού χώρου $\Omega_1 \times \Omega_2$:

$$P(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = P_1(\{\omega_1\})P_2(\{\omega_2\}).$$

Η πιθανότητα $P(B)$, για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$, ορίζεται τότε από τη σχέση

$$P(B) = \sum_{(\omega_1, \omega_2) \in B} P(\{(\omega_1, \omega_2)\})$$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ

Παρατηρούμε ότι, αν $B_1 = A_1 \times \Omega_2$ και $B_2 = \Omega_1 \times A_2$, τότε

$$P(B_1) = P_1(A_1), \quad P(B_2) = P_2(A_2).$$

Επίσης

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2)$$

και

$$P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2).$$

Σημειώνουμε ότι τα συμπεράσματα αυτά επεκτείνονται, χωρίς καμμιά πρόσθετη δυσκολία, σε οποιοδήποτε πεπερασμένο αριθμό υ στοχαστικών πειραμάτων (ή δοκιμών στοχαστικού πειράματος).

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία 3 ρίψεων ενός ζεύγους διακεκριμένων κύβων.
Να υπολογισθεί η πιθανότητα εμφάνισης του αποτελέσματος $(6, 6)$ *σε 2 τουλάχιστο από τις 3 ρίψεις.*
Ας θεωρήσουμε, αρχικά, το στοχαστικό πείραμα της ρίψης ενός ζεύγους διακεκριμένων κύβων με δειγματικό χώρο

$$\Omega = \{(i, j) : i = 1, 2, \ldots, 6, \;\; j = 1, 2, \ldots, 6\},$$

ο οποίος περιλαμβάνει $N(\Omega) = 6^2 = 36$ *ισοπίθανα δειγματικά σημεία.*

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ

Το ενδεχόμενο A εμφάνισης του αποτελέσματος $(6,6)$ έχει πιθανότητα $P(A) = 1/36$.
Χαρακτηρίζοντας ως επιτυχία ε το ενδεχόμενο A εμφάνισης $(6,6)$ και ως αποτυχία a το συμπληρωματικό ενδεχόμενο A', ο δειγματικός χώρος Ω δύναται να παρασταθεί ως $\Omega = \{a, \varepsilon\}$.
Τότε

$$P(\{\varepsilon\}) = P(A) = \frac{1}{36}, \quad P(\{a\}) = P(A') = 1 - P(A) = \frac{35}{36}.$$

Περαιτέρω, ο δειγματικός χώρος του τυχαίου πειράματος μιας ακολουθίας 3 ρίψεων ενός ζεύγους διακεκριμένων κύβων είναι το

$$\Omega^3 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{a, \varepsilon\},\ i = 1, 2, 3\}.$$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ

Το ενδεχόμενο B_κ πραγματοποίησης κ επιτυχιών σε 3 ρίψεις (δοκιμές),

$$B_\kappa = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i = \varepsilon \text{ για } \kappa \text{ ακριβώς δείκτες } i \in \{1, 2, 3\}\},$$

περιλαμβάνει $\binom{3}{\kappa}$ δειγματικά σημεία, όσα και ο αριθμός των επιλογών των κ θέσεων για τις επιτυχίες από τις 3 συνολικά θέσεις. Επιπλέον κάθε τέτοιο δειγματικό σημείο, το οποίο περιλαμβάνει σε κ θέσεις το ε και σε $3 - \kappa$ θέσεις το α, έχει πιθανότητα

$$P(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\}) = P_1(\{\omega_1\})P_1(\{\omega_2\})P_3(\{\omega_3\}) = \left(\frac{1}{36}\right)^{\kappa}\left(\frac{35}{36}\right)^{3-\kappa}.$$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ

Επομένως η πιθανότητα του ενδεχομένου B_κ δίνεται από την

$$P(B_\kappa) = \binom{3}{\kappa}\left(\frac{1}{36}\right)^{\kappa}\left(\frac{35}{36}\right)^{3-\kappa}, \quad \kappa = 0, 1, 2, 3.$$

Η πιθανότητα εμφάνισης του αποτελέσματος $(6, 6)$ σε 2 τουλάχιστο από τις 3 ρίψεις, είναι ίση με

$$P(B_0' B_1') = 1 - P(B_0) - P(B_1) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^3 - 3\frac{1}{36}\left(\frac{35}{36}\right)^2$$