ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ (Συνέχεια)

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

19 Οκτωβρίου 2009

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ορισμός

Έστω Ω *δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου).*
Μία συνάρτηση, η οποία σε κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ *αντιστοιχεί (εκχωρεί) έναν πραγματικό αριθμό* $P(A)$*, καλείται πιθανότητα αν ικανοποιεί τα αξιώματα (ιδιότητες):*
(α) μη αρνητικότητας: $P(A) \geq 0$*, για κάθε ενδεχόμενο* $A \subseteq \Omega$*,*
(β) νορμαλισμού: $P(\Omega) = 1$*, και*
(γ) αριθμήσιμης προσθετικότητας:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\upsilon \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\upsilon) + \cdots ,$$

για οποιαδήποτε ακολουθία $A_i \subseteq \Omega$*,* $i = 1, 2, \ldots \upsilon \ldots,$ *κατά ζεύγη ξένων (αμοιβαίως αποκλειομένων) ενδεχομένων.*

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Στην περίπτωση πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω αντί του αξιώματος της αριθμήσιμης προσθετικότητας αρκεί το ασθενέστερο αξίωμα

(γ′) *προσθετικότητας:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

για οποιαδήποτε ξένα ενδεχόμενα $A \subseteq \Omega$ και $B \subseteq \Omega$, από το οποίο συνάγεται επαγωγικά η σχέση

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\nu),$$

για οποιαδήποτε κατά ζεύγη ξένα ενδεχόμενα $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Σημειώνουμε ότι ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας δεν καθορίζει κάποια έκφραση (τύπο) υπολογισμού της (συνάρτησης) πιθανότητας $P(A)$ για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$. Απλώς περιορίζεται στον καθορισμό των συνθηκών που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $P(A)$, $A \subseteq \Omega$, για να είναι πιθανότητα.

Η ύπαρξη πρόσθετων στοιχείων σχετικών με το δειγματικό χώρο Ω και τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του δύναται να οδηγήσει στον προσδιορισμό μιας έκφρασης (τύπου) υπολογισμού της πιθανότητας οποιουδήποτε ενδεχομένου. Τέτοιες περιπτώσεις εξετάζουμε στα επόμενα παραδείγματα. για οποιαδήποτε κατά ζεύγη ξένα ενδεχόμενα $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ *δ.χ. και* $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_\kappa}\} \subseteq \Omega$ *ενδεχ.*
Η πιθανότητα $P(A)$ *δύναται να εκφρασθεί συναρτήσει των πιθανοτήτων των στοιχειωδών ενδεχομένων του* Ω *:*

$$P(\{\omega_i\}) = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας την έκφραση
$A = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{\omega_{i_\kappa}\}$ *και το αξίωμα της προσθετικότητας, συνάγουμε τον τύπο*

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_\kappa}.$$

Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με το αξίωμα του νορμαλισμού και επειδή $P(\Omega) = p_1 + p_2 + \cdots + p_N$, *οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ικανοποιούν τη σχέση* $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Συμπερασματικά, στην περίπτωση πεπερασμένου δειγματικού χώρου, η γνώση των πιθανοτήτων των στοιχειωδών ενδεχομένων επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας οποιουδήποτε ενδεχομένου. Οι αρχικές αυτές πιθανότητες δύνανται να προκύψουν από την εξέταση και ανάλυση των συνθηκών και των οργάνων εκτέλεσης του συγκεκριμένου στοχαστικού πειράματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση ισοπιθάνων δειγματικών σημείων,

$$p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

η ανωτέρω έκφραση της πιθανότητας $P(A)$ απλοποιείται στη μορφή

$$P(A) = \frac{N(A)}{N},$$

η οποία συμφωνεί με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό πείραμα της ρίψης ενός κύβου. Καταγράφοντας την ένδειξη της επάνω έδρας του κύβου, ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

με $N = N(\Omega) = 6$ δειγματικά σημεία.
(α) Στην περίπτωση συνήθους κύβου, ο οποίος είναι συμμετρικός και κατασκευασμένος από ομοιογενές υλικό, όλες οι έδρες έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης:

$$p_j = P(\{j\}) = \frac{1}{6}, \quad j = 1, 2, \ldots, 6.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου A δίνεται τότε από τον τύπο

$$P(A) = \frac{N(A)}{6},$$

της κλασικής πιθανότητας.
Έτσι, αν A είναι το ενδεχόμενο εμφάνισης αριθμού μεγαλυτέρου ή ίσου του 5, τότε $A = \{5, 6\}$ και $N(A) = 2$, οπότε

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(β) Στην περίπτωση κύβου με ανομοιογενές υλικό κατασκευής, τέτοιο ώστε η πιθανότητα εμφάνισης οποιασδήποτε έδρας να είναι ανάλογη του αριθμού (των κουκκίδων) που φέρει, τότε

$$p_j = P(\{j\}) = c \cdot j, \quad j = 1, 2, \ldots, 6.$$

όπου c είναι ο συντελεστής αναλογίας. Όμως $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$, οπότε $c \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1$ και έτσι $c = 1/21$. Επομένως η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου $A = \{j_1, j_2, \ldots, j_\kappa\}$ δίνεται από τον τύπο

$$P(A) = \frac{j_1 + j_2 + \cdots + j_\kappa}{21}$$

Έτσι, αν A είναι το ενδεχόμενο εμφάνισης αριθμού μεγαλυτέρου ή ίσου του 5, τότε $A = \{5, 6\}$ και

$$P(A) = \frac{5 + 6}{21} = \frac{11}{21}.$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Θεώρημα

(α) *Αν* $\emptyset$ *είναι το αδύνατο ενδεχόμενο ως προς το δειγματικό χώρο* Ω, *τότε*

$$P(\emptyset) = 0. \tag{1}$$

(β) *Αν* $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \dots, \upsilon$ *είναι κατά ζεύγη ξένα ενδεχόμενα, τότε*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\upsilon) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\upsilon). \tag{2}$$

Απόδειξη.

(α) Θέτοντας $A_i = \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots,$ έχουμε $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu \cdots = \emptyset$ και χρησιμοποιώντας το αξίωμα της αριθμήσιμης προσθετικότητας, συνάγουμε τη σχέση

$$\begin{aligned} P(\emptyset) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_\nu) + \cdots \\ &= P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots + P(\emptyset) + \cdots . \end{aligned}$$

Επιπλέον, σύμφωνα με το αξίωμα της μη αρνητικότητας, έχουμε $P(\emptyset) \geq 0$ και επομένως η σειρά μη αρνητικών όρων

$$P(\emptyset) + \cdots + P(\emptyset) + \cdots = 0$$

ως μηδενική, συνεπάγεται ότι $P(\emptyset) = 0$. □

(β) Ας θεωρήσουμε και τα ενδεχόμενα $A_i = \emptyset$, $i = \upsilon + 1, \upsilon + 2, \ldots$. Τότε, χρησιμοποιώντας το αξίωμα της αριθμήσιμης προσθετικότητας και την (1), συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\upsilon) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\upsilon \cup A_{\upsilon+1} \cup \cdots) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\upsilon) + P(A_{\upsilon+1}) + \cdots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\upsilon). \end{aligned}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Θεώρημα

(α) Αν A' είναι το συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου A ως προς το δειγματικό χώρο Ω, τότε

$$P(A') = 1 - P(A). \tag{3}$$

(β) Αν $A \subseteq \Omega$ και $B \subseteq \Omega$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) \tag{4}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(B), \quad \text{για} \ B \subseteq A. \tag{5}$$

(γ) Αν $A \subseteq \Omega$ και $B \subseteq \Omega$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{6}$$

$$P(A'B') = 1 - P(A) - P(B) + P(AB). \tag{7}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Απόδειξη.

(α) Τα ενδεχόμενα A και A' είναι ξένα, $A \cap A' = \emptyset$, και $A \cup A' = \Omega$. Επομένως

$$P(A) + P(A') = P(A \cup A') = P(\Omega) = 1.$$

(β) Τα ενδεχόμενα $A - B = A \cap B'$ και $A \cap B$ είναι ξένα μεταξύ τους και $(A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap \Omega = A$. Επομένως

$$P(A) = P[(A \cap B') \cup (A \cap B)] = P(A \cap B') + P(A \cap B)$$

και έτσι

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(AB).$$

Στην περίπτωση που $B \subseteq A$ έχουμε $AB = B$ και επομένως

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

$\square$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

(γ) Τα ενδεχόμενα A και $B - A = B \cap A'$ είναι ξένα μεταξύ τους και

$$A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A') = (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B.$$

Επομένως, σύμφωνα με την ιδιότητα της προσθετικότητας,

$$P(A \cup B) = P[A \cup (B - A)] = P(A) + P(B - A),$$

και χρησιμοποιώντας την (4), συνάγουμε την έκφραση (6). Επίσης, από τον τύπο του De Morgan

$$(A \cup B)' = A'B'$$

και σύμφωνα με την (3), παίρνουμε τη σχέση

$$P(A'B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B),$$

στην οποία εισάγοντας την έκφραση (6), συνάγουμε την (7).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Πόρισμα

Αν $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, 3$, *είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ & - \{P(A_1A_2) + P(A_1A_3) + P(A_2A_3)\} \\ & + P(A_1A_2A_3) \end{aligned} \tag{8}$$

και

$$\begin{aligned} P(A_1'A_2'A_3') = 1 & - \{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)\} \\ & + \{P(A_1A_2) + P(A_1A_3) + P(A_2A_3)\} \\ & - P(A_1A_2A_3). \end{aligned} \tag{9}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Απόδειξη.

Η πιθανότητα της ένωσης των ενδεχομένων $A = A_1 \cup A_2$ και $B = A_3$, σύμφωνα με την (6), εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P[(A_1 \cup A_2)A_3] \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) + P(A_3) \\ &- P[(A_1A_3) \cup (A_2A_3)]. \end{aligned}$$

Επίσης, σύμφωνα και πάλιν με την (6),

$$P[(A_1A_3) \cup (A_2A_3)] = P(A_1A_3) + P(A_2A_3) - P(A_1A_2A_3)$$

και έτσι συνάγεται η έκφραση (8). Επειδή $A_1'A_2'A_3' = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)'$, εφαρμόζοντας διαδοχικά τις (3) και (8), συμπεραίνουμε την (9). □

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Θεώρημα

Η πιθανότητα P λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$*,*

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad \textit{για κάθε} \;\; A \subseteq \Omega, \tag{10}$$

και είναι αύξουσα συνολοσυνάρτηση,

$$P(A) \leq P(B), \quad \textit{για κάθε} \;\; A \subseteq \Omega, \;\; B \subseteq \Omega \;\; \textit{με} \;\; A \subseteq B. \tag{11}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Απόδειξη.

Σύμφωνα με το αξίωμα της μη αρνητικότητας, $P(A) \geq 0$, για κάθε $A \subseteq \Omega$. Ομοίως $P(A') \geq 0$ και επειδή

$$P(A') = 1 - P(A),$$

συνάγουμε και το δεξιό μέλος της διπλής ανισότητας (10). Επίσης, σύμφωνα με το αξίωμα της μη αρνητικότητας, η πιθανότητα του ενδεχομένου $B - A \subseteq \Omega$ είναι μη αρνητική, $P(B - A) \geq 0$, και επειδή

$$P(B - A) = P(B) - P(A),$$

εφόσον $A \subseteq B$, συνάγουμε την (11). $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε μία σειρά τριών γεννήσεων σ' ένα μαιευτήριο και το ενδεχόμενο B της γέννησης ενός τουλάχιστο αγοριού. Υποθέτοντας ότι η γέννηση αγοριού είναι εξίσου πιθανή με τη γέννηση κοριτσιού, να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(B)$.

Το συμπληρωματικό του ενδεχομένου B είναι το ενδεχόμενο B' της γέννησης κοριτσιού και στις τρεις γεννήσεις. Η πιθανότητα $P(B')$ υπολογίζεται πιο εύκολα από την $P(B)$.
Ο δειγματικός χώρος Ω των τριών γεννήσεων περιλαμβάνει $N(\Omega) = 2^3 = 8$ ισοπίθανα δειγματικά σημεία, από τα οποία μόνο ένα ανήκει στο B', οπότε

$$P(B') = \frac{1}{8}$$

και

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της πιθανότητας $P(B)$ είναι να θεωρήσουμε το ενδεχόμενο B ως ένωση των κατά ζεύγη ξένων ενδεχομένων A_1, A_2 και A_3 της γέννησης $1, 2$ και 3 αγοριών, αντίστοιχα. Τότε

$$\begin{aligned} P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα

Το πρόβλημα των γενεθλίων. Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο κ *ατόμων των οποίων καταγράφουμε τα γενέθλια. Σημειώνουμε ότι ένα έτος έχει 365 ημέρες εκτός και αν είναι δίσεκτο οπότε έχει 366 ημέρες. Επίσης έχει παρατηρηθεί ότι ο αριθμός των γεννήσεων δεν είναι αρκετά σταθερός καθ΄ όλη τη διάρκεια του έτους. ΄Ομως, σε πρώτη προσέγγιση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα έτος έχει 365 ημέρες οι οποίες είναι εξίσου πιθανές ως ημέρες γενεθλίων. Να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου* A *όπως δύο τουλάχιστον από τα* κ *άτομα έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.*

Οι ημέρες γενεθλίων ενός συνόλου κ *ατόμων μπορούν να παρασταθούν από μία διάταξη* $(i_1, i_2, \ldots, i_\kappa)$ *του συνόλου των 365 ημερών* $\{1, 2, \ldots, 365\}$ *ανά* κ *με επανάληψη, όπου* i_r *είναι η ημέρα γέννησης του* r*-οστού ατόμου,* $r = 1, 2, \ldots, \kappa$*. Επομένως ο αριθμός των στοιχείων του δειγματικού χώρου* Ω *είναι ίσος με* $N(\Omega) = 365^\kappa$*.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Το συμπληρωματικό του ενδεχομένου A είναι το ενδεχόμενο A', όπως και τα κ άτομα έχουν διαφορετικές ημέρες γενεθλίων, το οποίο περιλαμβάνει τις διατάξεις του συνόλου των 365 ημερών ανά κ χωρίς επανάληψη. Συνεπώς $N(A') = (365)_\kappa$, οπότε

$$P(A') = \frac{(365)_\kappa}{365^\kappa}$$

και

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{(365)_\kappa}{365^\kappa}.$$

Σημειώνουμε ότι για $\kappa = 23$ έχουμε $P(A) = 0{,}5073 > 1/2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα

Έστω ότι από μία κληρωτίδα που περιέχει 10 σφαιρίδια αριθμημένα από το 0 μέχρι το 9 κληρώνεται κάθε εβδομάδα ένας αριθμός. Μετά από κάθε κλήρωση το εξαγόμενο σφαιρίδιο επανατοποθετείται στην κληρωτίδα. Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό πείραμα τρεις (διαδοχικών) κληρώσεων. Να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου όπως ο μεγαλύτερος από τους τρεις αριθμούς των κληρώσεων είναι το 5.

Το ενδεχόμενο όπως ο μεγαλύτερος από τους τρεις αριθμούς των κληρώσεων είναι το 5 δύναται να παρασταθεί ως διαφορά $A - B$ του ενδεχομένου A όπως ο μεγαλύτερος από τους τρεις αριθμούς της κλήρωσης είναι ένας από τους αριθμούς $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ και του ενδεχομένου B όπως ο μεγαλύτερος από τους τρεις αριθμούς της κλήρωσης είναι ένας από τους αριθμούς $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Παρατηρούμε ότι $B \subseteq A$ και σύμφωνα με την (5),

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ο αριθμός των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω των τριων κληρώσεων είναι ίσος με $N(\Omega) = 10^3$, τον αριθμό των διατάξεων των 10 αριθμών $\{0, 1, \ldots, 9\}$ ανά 3 με επανάληψη.
Ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου A είναι ίσος με $N(A) = 6^3$, τον αριθμό των διατάξεων των 6 αριθμών $\{0, 1, \ldots, 5\}$ ανά 3 με επανάληψη. Ομοίως $N(B) = 5^3$. Τα δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα και έτσι

$$P(A - B) = \frac{6^3}{10^3} - \frac{5^3}{10^3} = 0{,}091.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα

(Συνέχεια). Να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου να κληρωθούν οι αριθμοί 0 και 1 (από μια τουλάχιστο φορά ο καθένας).

Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα A και B να μη κληρωθούν οι αριθμοί 0 και 1, αντίστοιχα. Τότε, $A'B'$ είναι το ενδεχόμενο κληρωθούν οι 0 και 1 (από μια τουλάχιστο φορά ο καθένας) και

$$P(A'B') = 1 - P(A) - P(B) + P(AB).$$

Επίσης: $N(A) = 9^3$ *(αριθμός των διατάξεων των 9 αριθμών* $\{1, 2, \ldots, 9\}$ *ανά 3 με επανάληψη),* $N(B) = 9^3$ *(αριθμός των διατάξεων των 9 αριθμών* $\{0, 2, 3, \ldots, 9\}$ *ανά 3 με επανάληψη), και* $N(AB) = 8^3$*, (αριθμός των διατάξεων των 8 αριθμών* $\{2, 3, \ldots, 9\}$ *ανά 3 με επανάληψη). Επομένως*

$$P(A'B') = 1 - 2\frac{9^3}{10^3} + \frac{8^3}{10^3} = 0{,}054.$$