ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ (Συνέχεια)

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

15 Οκτωβρίου 2009

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας αφορά πεπερασμένους δειγματικούς χώρους και διατυπώθηκε αρχικά από τον De Moivre (1711) ως εξής:
Η πιθανότητα της πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι το πηλίκο με αριθμητή τον αριθμό των περιπτώσεων ευνοϊκών για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου τούτου και παρονομαστή το συνολικό αριθμό των περιπτώσεων με την προϋπόθεση ότι όλες οι περιπτώσεις είναι εξίσου πιθανές (ισοπίθανες).

Ας θεωρήσουμε έναν πεπερασμένο δειγματικό χώρο Ω του οποίου τα στοιχεία (δειγματικά σημεία), είναι εξίσου πιθανά (ισοπίθανα) και ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο A (ως προς το δειγματικό χώρο Ω). Η *πιθανότητα* του A, συμβολιζόμενη με $P(A)$, δίνεται από τη σχέση

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}, \tag{1}$$

όπου $N(A)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου A και $N \equiv N(\Omega)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω. Η συνάρτηση $P(A)$ η οποία σε κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{A}$ αντιστοιχεί τον αριθμό (1) είναι
(α) *μη αρνητική*: $P(A) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$,
(β) *νορμαλισμένη*: $P(\Omega) = 1$,
(γ) *προσθετική*: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, για οποιαδήποτε ξένα (αμοιβαίως αποκλειόμενα) ενδεχόμενα $A \subseteq \Omega$ και $B \subseteq \Omega$.

ΚΛΑΣΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Laplace

Οι ιδιότητες αυτές προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό (1) και τις αντίστοιχες ιδιότητες του αριθμού των στοιχείων πεπερασμένου συνόλου:

(α) μη αρνητικότητας, $N(A) \geq 0$, για κάθε σύνολο A, και

(β) προσθετικότητας, $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$, για ξένα μεταξύ τους σύνολα A και B.

Σημειώνουμε ότι από την προσθετική ιδιότητα συνάγεται επαγωγικά η σχέση

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\upsilon) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\upsilon),$$

για οποιαδήποτε κατά ζεύγη ξένα (αμοιβαίως αποκλειόμενα) ενδεχόμενα $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, \upsilon$.

Άμεσα συνάγονται από τον ορισμό (1) η σχέση

$$P(A) \leq 1, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο} \quad A \in \mathcal{A},$$

όπως και η σχέση

$$P(\emptyset) = 0.$$

Επίσης, αν $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ είναι ο δειγματικός χώρος συνθέτου στοχαστικού πειράματος, όπου Ω_1 και Ω_2 είναι πεπερασμένοι δειγματικοί χώροι με ισοπίθανα δειγματικά σημεία, και ισχύει η σχέση

$$P(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = P_1(\{\omega_1\})P_2(\{\omega_2\}), \tag{2}$$

για οποιαδήποτε δειγματικά σημεία $\omega_1 \in \Omega_1$ και $\omega_2 \in \Omega_2$, τότε ο δειγματικός χώρος Ω έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Επέκταση της κλασικής πιθανότητας στην περίπτωση που ο δειγματικός χώρος είναι συνεχής (μη αριθμήσιμος) αποτελεί η **γεωμετρική πιθανότητα** που ορίζεται ως εξής:
Ας θεωρήσουμε ένα συνεχή δειγματικό χώρο Ω οριζόμενο από μία περιοχή του (μονοδιαστάτου ή διδιαστάτου ή τριδιαστάτου) χώρου στην οποία οποιεσδήποτε στοιχειώδεις περιοχές είναι εξίσου πιθανές (ισοπίθανες) και ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο A οριζόμενο από μία υποπεριοχή του δειγματικού χώρου Ω. Η πιθανότητα του A δίνεται από τη σχέση

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \tag{3}$$

όπου $\mu(A)$ και $\mu(\Omega)$ είναι το μέτρο (μήκος ή εμβαδό ή όγκος) των περιοχών A και Ω, αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι η γεωμετρική πιθανότητα, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, ικανοποιεί τις ανωτέρω επισημανθείσες ιδιότητες της κλασικής πιθανότητας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία δύο ρίψεων ενός συνήθους νομίσματος και το ενδεχόμενο A_j της εμφάνισης σ΄ αυτή j φορές της όψης κεφαλή, $j = 0, 1, 2$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A_j)$, $j = 0, 1, 2$.

Παρατηρούμε ότι ο δειγματικός χώρος του απλού στοχαστικού πειράματος της i-οστής ρίψης ενός συνήθους νομίσματος είναι το σύνολο

$$\Omega_i \equiv \Omega = \{\gamma, \kappa\}, \quad i = 1, 2.$$

Τα δειγματικά σημεία, λόγω του ομογενούς υλικού του νομίσματος, είναι ισοπίθανα:

$$P_i(\{\gamma\}) = P_i(\{\kappa\}) = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ακόμη, ο δειγματικός χώρος του συνθέτου στοχαστικού πειράματος μιας ακολουθίας δύο ρίψεων ενός συνήθους νομίσματος είναι το σύνολο

$$\Omega^2 = \{(\gamma, \gamma), (\gamma, \kappa), (\kappa, \gamma), (\kappa, \kappa)\},$$

το οποίο είναι το καρτεσιανό γινόμενο του $\Omega = \{\gamma, \kappa\}$ *με τον εαυτό του. Στο στοχαστικό αυτό πείραμα ισχύει η (2), επειδή προφανώς το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης, και έτσι τα 4 δειγματικά σημεία του* Ω^2 *είναι ισοπίθανα:*

$$P(\{(\gamma, \gamma)\}) = P(\{(\gamma, \kappa)\}) = P(\{(\kappa, \gamma)\}) = P(\{(\kappa, \kappa)\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας και επειδή

$$A_0 = \{(\gamma, \gamma)\}, \ \ A_1 = \{(\gamma, \kappa), (\kappa, \gamma)\}, \ \ A_2 = \{(\kappa, \kappa)\},$$

συνάγουμε τις πιθανότητες

$$P(A_0) = \frac{1}{4}, \ \ P(A_1) = \frac{1}{2}, \ \ P(A_2) = \frac{1}{4}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα

Έστω ότι ένα νόμισμα διαμέτρου r τοποθετείται τυχαία πάνω σε ορθογώνιο τραπέζι, το οποίο είναι χωρισμένο σε N ορθογώνια με πλευρές a και β, όπου $a \leq \beta$ και $r < a$. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως το νόμισμα να τοποθετηθεί στο εσωτερικό ορθογωνίου.

Ο δειγματικός χώρος Ω είναι το ορθογώνιο τραπέζι με εμβαδό

$$\mu(\Omega) = Na\beta.$$

Για τον καθορισμό της περιοχής του τραπεζιού η οποία ορίζεται από το ενδεχόμενο A, όπως το νόμισμα να τοποθετηθεί στο εσωτερικό ορθογωνίου, ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές a και β, όπου $a \leq \beta$ και ένα δεύτερο ορθογώνιο EZHΘ κείμενο στο εσωτερικό του πρώτου ορθογωνίου με πλευρές παράλληλες στις πλευρές αυτού και σε απόσταση r/2 απ' αυτές.

Ένα νόμισμα διαμέτρου r κείται στο εσωτερικό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ αν και μόνο αν το κέντρο O του νομίσματος κείται στο εσωτερικό του ορθογωνίου EZHΘ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Το εμβαδό του ορθογωνίου ΕΖΗΘ είναι $(a - r)(\beta - r)$. *Η περιοχή του τραπεζιού η οποία ορίζεται από το ενδεχόμενο A είναι η ένωση N τέτοιων ορθογωνίων και έτσι*

$$\mu(A) = N(a - r)(\beta - r).$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό της γεωμετρικής πιθανότητας (3),

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{(a - r)(\beta - r)}{a\beta} = \left(1 - \frac{r}{a}\right)\left(1 - \frac{r}{\beta}\right).$$

Σημειώνουμε ότι στη μερική περίπτωση τετραγώνων, $\beta = a$, *η πιθανότητα αυτή γίνεται*

$$P(A) = \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2.$$

ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Ο υπολογισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A στην περίπτωση πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω του οποίου τα στοιχεία (δειγματικά σημεία, περιπτώσεις) είναι ισοπίθανα ανάγεται, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας $P(A) = N(A)/N$, στον υπολογισμό του αριθμού $N(A)$ των στοιχείων του A και του αριθμού $N \equiv N(\Omega)$ των στοιχείων του Ω.
Στο εδάφιο αυτό παρουσιάζουμε μερικά βασικά στοιχεία της Συνδυαστικής, τα οποία διευκολύνουν την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων απαρίθμησης.

Η **αρχή του αθροίσματος** και η **αρχή του γινομένου** (ή **πολλαπλασιαστική αρχή**), οι οποίες αποτελούν τις δύο βασικές αρχές απαρίθμησης, μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Αρχή του αθροίσματος. *Αν ένα στοιχείο (αντικείμενο)* a_1 *μπορεί να εκλεγεί κατά* κ_1 *τρόπους και ένα στοιχείο* a_2 *μπορεί να εκλεγεί κατά* κ_2 *τρόπους και η εκλογή του ενός αποκλείει την ταυτόχρονη εκλογή του άλλου, τότε το στοιχείο* a_1 *ή* a_2 *μπορεί να εκλεγεί κατά* $\kappa_1 + \kappa_2$ *τρόπους.*

Αρχή του γινομένου ή πολλαπλασιαστική αρχή. *Αν ένα στοιχείο (αντικείμενο)* a_1 *μπορεί να εκλεγεί κατά* κ_1 *τρόπους και για κάθε ένα απ΄ αυτούς ένα* a_2 *μπορεί να εκλεγεί κατά* κ_2 *τρόπους, τότε και τα δύο στοιχεία* a_1 *και* a_2 *μπορούν να εκλεγούν κατά* $\kappa_1 \cdot \kappa_2$ *τρόπους.*

Σημειώνουμε ότι οι αρχές αυτές επεκτείνονται άμεσα και σε ν στοιχεία (αντικείμενα) $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$.

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

Ας θεωρήσουμε ένα πεπερασμένο σύνολο υ στοιχείων $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\upsilon\}$.
Διάταξη των υ ανά κ καλείται μία διατεταγμένη συλλογή κ στοιχείων $(a_1, a_2, \dots, a_\kappa)$ με $a_r \in \Omega$, $r = 1, 2, \dots, \kappa$.
Συνδυασμός των υ ανά κ καλείται μία (μη διατεταγμένη) συλλογή κ στοιχείων $\{a_1, a_2, \dots, a_\kappa\}$ με $a_r \in \Omega$, $r = 1, 2, \dots, \kappa$.

Τα στοιχεία μιας διάταξης ή ενός συνδυασμού είναι είτε διαφορετικά είτε όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά στοιχεία του Ω.
Για την πρώτη περίπτωση διατηρούμε την ονομασία διάταξη ή συνδυασμός των υ ανά κ, ενώ στη δεύτερη περίπτωση, όπου τα στοιχεία του Ω επιτρέπεται να επαναλαμβάνονται, χρησιμοποιούμε την ονομασία **διάταξη ή συνδυασμός των υ ανά κ με επανάληψη**.

Η ειδική περίπτωση διάταξης των υ ανά υ (όλων των θεωρουμένων στοιχείων) καλείται ειδικότερα **μετάθεση** υ στοιχείων.

Θεώρημα

(α) Ο αριθμός των διατάξεων των υ ανά κ, συμβολιζόμενος με $(\upsilon)_\kappa$, δίνεται από τη σχέση

$$(\upsilon)_\kappa = \upsilon(\upsilon - 1)\cdots(\upsilon - \kappa + 1) = \frac{\upsilon!}{(\upsilon - \kappa)!}, \tag{4}$$

όπου το γινόμενο όλων των ακεραίων από το 1 μέχρι το υ καλείται υ παραγοντικό και συμβολίζεται με $\upsilon! = 1 \cdot 2 \cdots (\upsilon - 1)\upsilon$.
Ειδικά, ο αριθμός των μεταθέσεων υ στοιχείων ισούται με $\upsilon!$.
(β) Ο αριθμός των διατάξεων των υ ανά κ με επανάληψη, συμβολιζόμενος με $U(\upsilon, \kappa)$, είναι ίσος με

$$U(\upsilon, \kappa) = \upsilon^\kappa. \tag{5}$$

Απόδειξη.

(α) Σε μια οποιαδήποτε διάταξη $(a_1, a_2, \ldots, a_\kappa)$ των υ στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\upsilon\}$ ανά κ, το πρώτο στοιχείο a_1 μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο των υ στοιχείων, ενώ μετά την εκλογή του πρώτου στοιχείου, το δεύτερο στοιχείο a_2, επειδή πρέπει να είναι διαφορετικό από το a_1, μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο των υπολοίπων $\upsilon - 1$ στοιχείων.

Τελικά, μετά την εκλογή των στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_{\kappa-1}$, το τελευταίο στοιχείο a_κ, επειδή πρέπει να είναι διαφορετικό από τα $\kappa - 1$ προηγούμενα στοιχεία, μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο των υπολοίπων $\upsilon - (\kappa - 1) = \upsilon - \kappa + 1$ στοιχείων. Έτσι, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, συνάγουμε το πρώτο μέρος της (4).

Πολλαπλασιάζοντας την έκφραση αυτή με $(\upsilon - \kappa)(\upsilon - \kappa - 1) \cdots 2 \cdot 1$ και μετά διαιρώντας με $(\upsilon - \kappa)! = 1 \cdot 2 \cdots (\upsilon - \kappa - 1)(\upsilon - \kappa)$, συμπεραίνουμε το δεύτερο μέρος της (4). $\square$

Στη μερική περίπτωση $\kappa = \nu$ συνάγουμε τον αριθμό των μεταθέσεων ν στοιχείων. Σημειώνουμε ότι το παραγοντικό του μηδενός λαμβάνεται, κατά συμφωνία, ίσο με τη μονάδα, $0! = 1$.

(β) Παρατηρούμε ότι σε μία οποιαδήποτε διάταξη $(a_1, a_2, \ldots, a_\kappa)$ των ν στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ ανά κ με επανάληψη οποιοδήποτε στοιχείο a_i μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο των ν στοιχείων του Ω. Έτσι, σύμφωνα με την πολλαπλαιαστική αρχή, συνάγεται η (5).

Πόρισμα

Ο αριθμός των συνδυασμών των υ *ανά* κ *συμβολιζόμενος με* $\binom{\upsilon}{\kappa}$*, δίνεται από τη σχέση*

$$\binom{\upsilon}{\kappa} = \frac{(\upsilon)_\kappa}{\kappa!} = \frac{\upsilon!}{\kappa!(\upsilon-\kappa)!}, \tag{6}$$

Απόδειξη.

Σε κάθε συνδυασμό $\{a_1, a_2, \ldots, a_\kappa\}$ των υ στοιχείων του Ω ανά κ αντιστοιχούν $\kappa!$ διατάξεις των υ ανά κ, οι οποίες προκύπτουν με μετάθεση των κ στοιχείων του κατά όλους τους $\kappa!$ το πλήθος δυνατούς τρόπους.
Επιπλέον σε κάθε διάταξη $(a_1, a_2, \ldots, a_\kappa)$ των υ στοιχείων του Ω ανά κ αντιστοιχεί ένας και μόνο συνδυασμός των υ ανά κ και συγκεκριμένα ο συνδυασμός $\{a_1, a_2 \ldots, a_\kappa\}$ που περιλαμβάνει τα στοιχεία της διάταξης ανεξάρτητα σειράς.
Επομένως ο αριθμός των διατάξεων των υ ανά κ είναι ίσος με $\kappa!$ φορές τον αριθμό των συνδυασμών των υ ανά κ και έτσι χρησιμοποιώντας την (4) συνάγουμε την (6). $\square$

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

Ο υπολογισμός του αριθμού των συνδυασμών υ στοιχείων ανά κ με επανάληψη δύναται να αναχθεί στον υπολογισμό των συνδυασμών $\upsilon + \kappa - 1$ στοιχείων ανά κ (χωρίς επανάληψη). Οι λεπτομέρειες της αναγωγής αυτής είναι αρκετά τεχνικές και παραλείπονται.

Πόρισμα

Ο αριθμός των συνδυασμών των υ ανά κ με επανάληψη είναι ίσος με

$$\binom{\upsilon+\kappa-1}{\kappa} = \frac{\upsilon(\upsilon+1)\cdots(\upsilon+\kappa-1)}{\kappa!} = \frac{(\upsilon+\kappa-1)!}{\kappa!(\upsilon-1)!}. \tag{7}$$

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Ο Richard Von Mises (1883-1953) διατύπωσε τον ακόλουθο ορισμό της πιθανότητας.
Ας υποθέσουμε ότι ένα στοχαστικό πείραμα ή φαινόμενο, με δειγματικό χώρο Ω, μπορεί να εκτελεσθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες απεριόριστο αριθμό φορών και ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο A.
Έστω ότι σε υ εκτελέσεις του στοχαστικού αυτού πειράματος ή φαινομένου το ενδεχόμενο A έχει πραγματοποιηθεί $n_\upsilon(A)$ φορές.
Αν υπάρχει το όριο της σχετικής συχνότητας $n_\upsilon(A)/\upsilon$ όταν το υ τείνει στο άπειρο τούτο ορίζει, σύμφωνα με τον Von Mises, την πιθανότητα του ενδεχομένου A,

$$P(A) = \lim_{\upsilon\to\infty} \frac{n_\upsilon(A)}{\upsilon}. \tag{8}$$

Η πιθανότητα αυτή αναφέρεται ως **εμπειρική ή στατιστική πιθανότητα**.