ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

12 Οκτωβρίου 2009

Η **ένωση** δύο ενδεχομένων A και B (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω), συμβολιζόμενη με $A \cup B$, είναι το **ενδεχόμενο**

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \ \text{ ή } \ \omega \in B\},$$

της πραγματοποίησης ενός τουλάχιστο από τα ενδεχόμενα A **και** B.

Γενικότερα, η **ένωση** των ενδεχομένων $A_1, A_2, \ldots, A_\upsilon$, συμβολιζόμενη με $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\upsilon$ ή συνοπτικά με $\bigcup_{j=1}^{\upsilon} A_j$, είναι το **ενδεχόμενο**

$$\bigcup_{j=1}^{\upsilon} A_j = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\upsilon$$
$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_j \ \text{ για έναν τουλάχιστο δείκτη } \ j = 1, 2, \ldots, \upsilon\},$$

της πραγματοποίησης ενός τουλάχιστο από τα υ **ενδεχόμενα** $A_1, A_2, \ldots, A_\upsilon$.

Η έννοια της ένωσης επεκτείνεται άμεσα και σε άπειρο πλήθος ενδεχομένων $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots,$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu \cup \cdots$$

$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_j \text{ για έναν τουλάχιστο δείκτη } j = 1, 2, \ldots\}.$$

Η **τομή** δύο ενδεχομένων A και B (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω), συμβολιζόμενη με $A \cap B \equiv AB$, είναι το **ενδεχόμενο**

$$A \cap B \equiv AB = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \ \text{ και } \ \omega \in B\},$$

της πραγματοποίησης και των δύο ενδεχομένων A **και** B**.**
Γενικότερα, η **τομή** των ενδεχομένων $A_1, A_2, \ldots, A_\upsilon$, συμβολιζόμενη με $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\upsilon \equiv A_1 A_2 \cdots A_\upsilon$ ή συνοπτικά με $\bigcap_{j=1}^{\upsilon} A_j$, είναι το **ενδεχόμενο**

$$\bigcap_{j=1}^{\upsilon} A_j = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\upsilon \equiv A_1 A_2 \cdots A_\upsilon$$
$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_j \ \text{ για όλους τους δείκτες } \ j = 1, 2, \ldots, \upsilon\},$$

της πραγματοποίησης και των υ **ενδεχομένων** $A_1, A_2, \ldots, A_\upsilon$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Τομή ενδεχομένων (Συνέχεια)

Η έννοια της τομής επεκτείνεται άμεσα και σε άπειρο πλήθος ενδεχομένων $A_1, A_2, \ldots,$
$A_\upsilon, \ldots,$

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\upsilon \cap \cdots \equiv A_1 A_2 \cdots A_\upsilon \cdots$$
$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_j \text{ για όλους τους δείκτες } j = 1, 2, \ldots\}.$$

Δύο ενδεχόμενα A και B καλούνται **ξένα** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα** αν δεν περιέχουν κοινά στοιχεία, $A \cap B = \emptyset$.

Γενικότερα, τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_\upsilon$ καλούνται **κατά ζεύγη ξένα** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα** αν $A_i \cap A_j = \emptyset$ για όλα τα ζεύγη (σύνολα) δεικτών $\{i, j\}$, $i \neq j$, από το σύνολο των δεικτών $\{1, 2, \ldots, \upsilon\}$.

Το **συμπλήρωμα** ενός ενδεχομένου A (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω), συμβολιζόμενο με A' ή A^c, είναι το **ενδεχόμενο**

$$A' = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\},$$

της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου A.

Το ενδεχόμενο A' καλείται **αντίθετο** (ή **συμπληρωματικό**) του ενδεχομένου A.

Η **διαφορά** του ενδεχομένου B από το ενδεχόμενο A (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω), συμβολιζόμενη με $A - B$, είναι το **ενδεχόμενο**

$$A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \ \text{ και } \ \omega \notin B\},$$

της πραγματοποίησης του ενδεχομένου A **και της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου** B.

Σημειώνουμε ότι $A - B = A \cap B'$.

Τύποι De Morgan

Αν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ είναι ενδεχόμενα ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω, τότε

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu)' = A_1' \cap A_2' \cap \cdots \cap A_\nu',$$
$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\nu)' = A_1' \cup A_2' \cup \cdots \cup A_\nu'$$

και γενικότερα για άπειρο πλήθος ενδεχομένων $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots,$

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu \cup \cdots)' = A_1' \cap A_2' \cap \cdots \cap A_\nu' \cap \cdots \,,$$
$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\nu \cap \cdots)' = A_1' \cup A_2' \cup \cdots \cup A_\nu' \cup \cdots \,.$$

Ένα ζεύγος στοιχείων α και β (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικών) στο οποίο το α θεωρείται ως πρώτο και το β ως δεύτερο στοιχείο καλείται **διατεταγμένο ζεύγος** και σημειώνεται με (α, β).

Το **καρτεσιανό γινόμενο** δύο συνόλων A και B, συμβολιζόμενο με $A \times B$, είναι το σύνολο

$$A \times B = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A, \ \beta \in B\}.$$

Ο ορισμός αυτός επεκτείνεται και για ν σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ ως εξής:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_\nu = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) : \alpha_1 \in A_1, \ \alpha_2 \in A_2, \ldots, \alpha_\nu \in A_\nu\}.$$

Ειδικά, αν $A_1 = A_2 = \cdots = A_\nu \equiv A$, το καρτεσιανό γινόμενο συμβολίζεται με A^ν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

Παράδειγμα

(α) Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος. Ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{\gamma, \kappa\},$$

όπου σημειώνεται με γ η όψη γράμματα και με κ η όψη κεφαλή (ή κορώνα). Τα υποσύνολα του Ω

$$A = \{\gamma\} \ \text{και} \ B = \{\kappa\}$$

είναι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα εμφάνισης της όψης γράμματα και κεφαλή, αντίστοιχα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

(β) Ας θεωρήσουμε τώρα το στοχαστικό πείραμα μιας ακολουθίας 2 ρίψεων ενός νομίσματος. Το οποιοδήποτε αποτέλεσμα των 2 ρίψεων δύναται να παρασταθεί από ένα διατεταγμένο ζεύγος του οποίου το πρώτο στοιχείο είναι το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης και το δεύτερο στοιχείο το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης. Έτσι ο δειγματικός χώρος του συνθέτου στοχαστικού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega^2 = \{(\gamma,\gamma),(\gamma,\kappa),(\kappa,\gamma),(\kappa,\kappa)\},$$

το οποίο είναι το καρτεσιανό γινόμενο του $\Omega = \{\gamma,\kappa\}$ *με τον εαυτό του. Τα υποσύνολα του* Ω^2,

$$A_0 = \{(\gamma,\gamma)\},\ A_1 = \{(\gamma,\kappa),(\kappa,\gamma)\}\ \text{και}\ A_2 = \{(\kappa,\kappa)\}$$

είναι τα ενδεχόμενα εμφάνισης 0, 1 και 2 φορές της όψης κεφαλή, αντίστοιχα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

(γ) Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό πείραμα μιας ακολουθίας ρίψεων ενός νομίσματος, η οποία τερματίζεται όταν εμφανισθεί για πρώτη φορά η όψη κεφαλή (ή κορώνα). Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος είναι το σύνολο

$$W = \{(\kappa), (\gamma, \kappa), (\gamma, \gamma, \kappa), \ldots, (\gamma, \gamma, \ldots, \gamma, \kappa), \ldots\}.$$

Παρατηρούμε ότι οι δειγματικοί χώροι Ω *και* Ω^2 *είναι πεπερασμένοι, ενώ ο δειγματικός χώρος* W *είναι αριθμησίμως άπειρος.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

Παράδειγμα

(α) Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό πείραμα της ρίψης ενός κύβου. Ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Τα σύνολα

$$A_1 = \{1\},\ A_2 = \{2\},\ A_3 = \{3\},\ A_4 = \{4\},\ A_5 = \{5\}\ \text{και}\ A_6 = \{6\}$$

είναι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα της εμφάνισης του αριθμού $1, 2, 3, 4, 5$ *και 6, αντίστοιχα.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

Τα σύνολα

$$B_1 = \{1\},\ B_2 = \{1,2\},\ B_3 = \{1,2,3\},\ B_4 = \{1,2,3,4\},$$

$$B_5 = \{1,2,3,4,5\}\ \textit{και}\ B_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

είναι τα ενδεχόμενα εμφάνισης αριθμού μικροτέρου ή ίσου του $1, 2, 3, 4, 5$ *και* 6*, αντίστοιχα.*

Ας σημειωθεί ότι

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_1 \cup A_2,\ B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

$$B_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,\ B_5 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5,\ B_6 = \Omega.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

(β) Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια το στοχαστικό πείραμα της ρίψης δύο κύβων. Στην περίπτωση που οι κύβοι είναι διακεκριμένοι (άσπρος και μαύρος), το οποιοδήποτε αποτέλεσμα του πειράματος δύναται να παρασταθεί από ένα διατεταγμένο ζεύγος του οποίου το πρώτο στοιχείο είναι το αποτέλεσμα της ρίψης του άσπρου και το δεύτερο στοιχείο το αποτέλεσμα της ρίψης του μαύρου κύβου. Έτσι ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega^2 = \{(i,j) : i = 1,2,\ldots,6,\ j = 1,2,\ldots,6\},$$

το οποίο είναι το καρτεσιανό γινόμενο του $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ *με τον εαυτό του και περιλαμβάνει 36 δειγματικά σημεία. Το σύνολο*

$$A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$$

είναι το ενδεχόμενο το άθροισμα των ενδείξεων των δύο κύβων να είναι 4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

Στην περίπτωση που οι κύβοι δεν είναι διακεκριμένοι, το οποιοδήποτε αποτέλεσμα του πειράματος που μπορούμε να διακρίνουμε δύναται να παρασταθεί από ένα μη διατεταγμένο ζεύγος με στοιχεία τα δύο αποτελέσματα της ρίψης των κύβων. Έτσι ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$W = \{\{i, j\} : i = 1, 2, \ldots, j,\ j = 1, 2, \ldots, 6\},$$

το οποίο περιλαμβάνει 21 δειγματικά σημεία. Σημειώνουμε ότι το ενδεχόμενο το άθροισμα των ενδείξεων των δύο κύβων να είναι 4 εκφράζεται στην περίπτωση αυτή από το σύνολο

$$B = \{\{1, 3\}, \{2, 2\}\}.$$

Παράδειγμα 2 (Συνέχεια)

Θεωρητικά και οι δύο δειγματικοί χώροι Ω^2 και W είναι κατάλληλοι για τη πιθανοθεωρητική μελέτη του στοχαστικού πειράματος της ρίψης δύο κύβων ανεξάρτητα από το αν είναι ή όχι διακεκριμένοι.

Το πλεονέκτημα του Ω^2 έναντι του W έχει σχέση με τη δυνατότητα εφαρμογής του ισοπιθάνου των δειγματικών σημείων. Το στοιχείο αυτό εξετάζεται μετά την εισαγωγή της κλασικής πιθανότητας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε μία κληρωτίδα η οποία περιέχει 5 σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 μέχρι το 5. Έστω ότι σε μία πρώτη κλήρωση ένα σφαιρίδιο εξάγεται τυχαία.
Ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$W_1 = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Έστω ότι, χωρίς επανάθεση στην κληρωτίδα του σφαιριδίου που εξάγεται στην πρώτη κλήρωση, σε μία δεύτερη κλήρωση ένα σφαιρίδιο εξάγεται τυχαία.
Ο δειγματικός χώρος του επίσης απλού στοχαστικού πειράματος της δεύτερης κλήρωσης είναι ένα υποσύνολο W_2 *του* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *με 4 άγνωστα στοιχεία εκτός αν το αποτέλεσμα της πρώτης κλήρωσης καταστεί γνωστό.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

Συνθέτοντας τα δύο αυτά στοχαστικά πειράματα, ας θεωρήσουμε το σύνθετο στοχαστικό πείραμα της διαδοχικής εξαγωγής δύο σφαιριδίων χωρίς επανάθεση. Το οποιοδήποτε αποτέλεσμα του πειράματος δύναται να παρασταθεί από ένα διατεταγμένο ζεύγος του οποίου το πρώτο στοιχείο είναι από το σύνολο W_1 *και το δεύτερο στοιχείο από το σύνολο* W_2. *Έτσι ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι το σύνολο*

$$\begin{aligned} W = \{&(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),\\ &(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}, \end{aligned}$$

το οποίο περιλαμβάνει $5 \cdot 4 = 20$ *δειγματικά σημεία. Το ενδεχόμενο* A *εξαγωγής των σφαιριδίων με τους αριθμούς 1 και 2 είναι το σύνολο*

$$A = \{(1,2),(2,1)\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

Στην περίπτωση που δεν ενδιαφέρει η σειρά εξαγωγής των σφαιριδίων, κατάλληλος δειγματικός χώρος για το σύνθετο πείραμα της διαδοχικής εξαγωγής δύο σφαιριδίων χωρίς επανάθεση (ή της ταυτόχρονης εξαγωγής δύο σφαιριδίων) είναι και το σύνολο

$$S = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\},$$

το οποίο περιλαμβάνει 10 δειγματικά σημεία. Σημειώνουμε ότι το ενδεχόμενο εξαγωγής των σφαιριδίων με τους αριθμούς 1 και 2 εκφράζεται στην περίπτωση αυτή από το μονοσύνολο

$$B = \{\{1,2\}\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

Παράδειγμα

Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνικών κλήσεων σ΄ ένα τηλεφωνικό κέντρο παροχής πληροφοριών, λόγω διαφόρων αστάθμητων παραγόντων, δεν είναι προκαθορισμένος. Έτσι το φαινόμενο αυτό δύναται να θεωρηθεί ως στοχαστικό. Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος για τη μελέτη του είναι το σύνολο

$$\Omega = \{t \in R : 0 < t < \partial\},$$

όπου t παριστάνει τον ενδιάμεσο χρόνο μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνικών κλήσεων και ο μέγιστος ενδιάμεσος χρόνος ∂ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

Το ενδεχόμενο A ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνικών κλήσεων να μη ξεπεράσει συγκεκριμένο χρόνο a, με $0 < a < \partial$, είναι το σύνολο

$$A = \{t \in R : 0 < t \leq a\},$$

ενώ το συμπληρωματικό του ενδεχόμενο είναι το σύνολο

$$A' = \{t \in R : a < t < \partial\}.$$

Σημειώνουμε ότι ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι μη αριθμήσιμος και ειδικότερα είναι συνεχής.