Πραγματική Ανάλυση

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ως μετρικούς χώρους με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι οι χώροι $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ και $(A, |\cdot|)$ είναι ομοιομορφικοί.

(β) Δείξτε ότι ο $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ είναι πλήρης, αλλά ο $(A, |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης.

2. Υποθέτουμε ότι οι μετρικοί χώροι (X, ρ) και (Y, d) είναι ομοιομορφικοί. Αν ο (X, d) είναι πλήρης, αποδείξτε ότι ο (Y, d) ικανοποιεί το Θεώρημα του Baire: Αν (G_n) είναι μια ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του Y, τότε το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό στον Y. (Παρατηρήστε ότι, με βάση και την προηγούμενη άσκηση, ο χώρος Y δεν είναι κατ᾽ ανάγκη πλήρης.)

3. Δίνονται δύο μετρικοί χώροι (X, ρ) και (Y, d) και απεικόνιση $T : X \to Y$ η οποία είναι ισομετρία, δηλαδή $d(T(x), T(y)) = \rho(x, y)$, για κάθε $x, y \in X$. Αποδείξτε ότι, αν ο X είναι πλήρης, τότε η εικόνα $T(X)$ είναι πλήρης υπόχωρος του Y και, κατά συνέπεια, το $T(X)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y.

4. Δίνονται τα κλειστά διαστήματα $I = [0, 1]$ και $J = [2, 3]$. Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης Urysohn που διαχωρίζει τα I, J και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

5. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $D \subset X$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το D είναι πυκνό στον X.

(β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0 \ \forall x \in D$, ισχύει $f \equiv 0$.

6. Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και Y ένας γνήσιος γραμμικός υπόχωρος του X. Αποδείξτε ότι το σύνολο $D = X \setminus Y$ είναι πυκνό στον X.

7. Έστω (X, d) μετρικός χώρος με την εξής ιδιότητα: Κάθε κλειστό υποσύνολο F του X με $\mathrm{diam}(F) \leq 1$ είναι συμπαγές.

(α) Δείξτε ότι ο (X, d) είναι πλήρης.

(β) Είναι σωστό ότι κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι συμπαγές; (*Υπόδειξη*: Θεωρήστε ένα άπειρο σύνολο X εφοδιασμένο με μια παραλλαγή της διακριτής μετρικής.)

8. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση f.

(α) Δείξτε ότι, για κάθε ακολουθία (x_n) στον X η οποία συγκλίνει σε ένα $x \in X$, ισχύει $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_n) = f(x)$.

(β) Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι το συμπέρασμα του ερωτήματος (α) μπορεί να μην ισχύει, αν η σύγκλιση της (f_n) στην f δεν είναι ομοιόμορφη.

9. *Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δούμε πώς και με ποιες προϋποθέσεις κάποια από τα βασικά θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού γενικεύονται στο ευρύτερο πλαίσιο των μετρικών χώρων.*
(α) Ποια ιδιότητα του μετρικού χώρου (X, d) εξασφαλίζει ότι αυτός ικανοποιεί το "Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής", δηλαδή ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή; (*Θεωρία*)

(β) Ένας μετρικός χώρος (X, d) λέγεται *συνεκτικός* αν τα μόνα υποσύνολα του X που είναι ταυτόχρονα ανοιχτά και κλειστά (clopen) είναι ο X και το $\emptyset$. Για παράδειγμα, ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι συνεκτικός, όπως και κάθε διάστημα, ενώ ο $\mathbb{N}$ δεν είναι. Αποδείξτε ότι κάθε συνεκτικός χώρος ικανοποιεί το ακόλουθο "Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής":

Αν η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2 \in X$ με $f(x_1) < f(x_2)$, τότε, για κάθε αριθμό c με $f(x_1) < c < f(x_2)$, υπάρχει $z \in X$ με $f(z) = c$.
(*Υπόδειξη*: Αν $c \notin f(X)$, τι μπορείτε να πείτε για το σύνολο $\{x \in X \ : \ f(x) < c\}$;)