

Πραγματική Ανάλυση
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Θεωρούμε το μετρικό χώρο \mathbb{R} με τη συνήθη μετρική. Για καθεμιά από τις παρακάτω σχέσεις, δώστε παράδειγμα άπειρου υποσυνόλου A του \mathbb{R} που την ικανοποιεί. Όπου είναι δυνατόν, βρείτε $A \neq \mathbb{R}$:

(α1) $A' = \emptyset$.

(α2) $A = A'$.

(α3) $A \cap A' = \emptyset$ και $A' \neq \emptyset$.

(α4) $A' \subsetneq A$ και $A' \neq \emptyset$.

(α5) $A \subsetneq A'$.

(β1) $\text{bd}(A) = \emptyset$.

(β2) $A = \text{bd}(A)$.

(β3) $A \cap \text{bd}(A) = \emptyset$.

(β4) $\text{bd}(A) \subsetneq A$.

(β5) $A \subsetneq \text{bd}(A)$.

2. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Ποιες από τις συνθήκες (α1) - (α5) και (β1) - (β5) της προηγούμενης άσκησης εξασφαλίζουν ότι (i) το A είναι κλειστό, (ii) το A δεν είναι κλειστό, (iii) το A είναι ανοικτό;

3. (α) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι για κάθε $x \in X$ και $r > 0$, ισχύει $\widehat{B}(x, r) = \overline{B(x, r)}$.

(β) Είναι εύκολο να δούμε ότι σε έναν χώρο με τη διακριτή μετρική, μπορούμε να βρούμε μπάλα $B(x, r)$ με $\widehat{B}(x, r) \neq \overline{B(x, r)}$. Βρείτε ένα άλλο τέτοιο παράδειγμα στον υπόχωρο Y του \mathbb{R}^2 με την Ευκλείδεια μετρική, όπου

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ και } y = 0\}.$$

(γ) Δείξτε ότι σε έναν μετρικό χώρο, δεν ισχύει κατ' ανάγκη η συνεπαγωγή

$$B(y, s) \subseteq B(x, r) \implies s \leq r.$$

Μπορείτε να θεωρήσετε τον μετρικό χώρο $X = \{P(0, 0), Q(1, 0), R(0, 1)\}$ με τον περιορισμό της Ευκλείδειας μετρικής του \mathbb{R}^2 .

4. (α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X . Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(i) Αν το $x \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A , δείξτε ότι το x είναι οριακό σημείο της ακολουθίας (x_n) - δηλαδή υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \rightarrow x$, καθώς $n \rightarrow \infty$.

(ii) Έστω y οριακό σημείο της ακολουθίας (x_n) . Είναι κατ' ανάγκη το y σημείο συσσώρευσης του συνόλου A ; Είναι κατ' ανάγκη το y σημείο επαφής του συνόλου A ;

(β) Δώστε παράδειγμα φραγμένης ακολουθίας (x_n) στο \mathbb{R} , με την ιδιότητα: Το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει ακριβώς ένα σημείο συσσώρευσης, αλλά η ακολουθία (x_n) δεν συγκλίνει.

(γ) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (u_n) στον \mathbb{R}^2 με την Ευκλείδεια μετρική, με την ιδιότητα κάθε $v \in \mathbb{R}^2$ να είναι όριο κάποιας υπακολουθίας της (u_n) .

5. Θεωρούμε το σύνολο των φυσικών αριθμών \mathbb{N} με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του \mathbb{R} . Δείξτε ότι:

(α) Οι μόνες συγκλίνουσες ακολουθίες στο \mathbb{N} είναι οι τελικά σταθερές.

(β) Για οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X, d) , κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ είναι συνεχής.

(γ) Δεν υπάρχει συνεχής 1-1 συνάρτηση $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$, όπου \mathbb{Q} το σύνολο των ρητών με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του \mathbb{R} .

6. Στο \mathbb{R} θεωρούμε τη συνήθη μετρική d και τη μετρική ρ με $\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$.

(α) Αποδείξτε ότι οι μετρικοί χώροι (\mathbb{R}, d) και (\mathbb{R}, ρ) έχουν:

(i) τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες (δηλαδή μια ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x στον (\mathbb{R}, d) αν και μόνο αν η (x_n) συγκλίνει στο x στον (\mathbb{R}, ρ)),

(ii) τα ίδια κλειστά σύνολα,

(iii) τα ίδια ανοικτά σύνολα.

(β) Βρείτε μια ακολουθία (x_n) η οποία είναι βασική στον (\mathbb{R}, ρ) , αλλά δεν είναι βασική στον (\mathbb{R}, d) .

7. Έστω X μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν το $x \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του A , τότε υπάρχει ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων του A , η οποία συγκλίνει στο x .

8. Έστω X διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και S υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X . Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in S$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του S .