Θέμα 5β Εξέτασης Ιουνίου 2019

Έστω (X,d) μετρικός χώρος, K συμπαγές υποσύνολο του X και U ανοικτό υποσύνολο του X με $K \subseteq U$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$K_\delta := \{x \in X : \mathrm{dist}(x,K) < \delta\} \subseteq U,$$

όπου dist είναι η συνάρτηση απόστασης.

Απόδειξη: Αφού $K \subseteq U$ και το U είναι ανοικτό, για κάθε $y \in K$, υπάρχει $\delta_y > 0$ με

$$B(y,\delta_y) \subseteq U. \tag{1}$$

Η οικογένεια

$$\Big\{B\Big(y, \frac{\delta_y}{2}\Big) \ : \ y \in K\Big\}$$

είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του K και, αφού το K είναι συμπαγές, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή υπάρχουν $y_1, \dots, y_n \in K$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B\Big(y_i, \frac{\delta_{y_i}}{2}\Big). \tag{2}$$

Θέτουμε

$$\delta = \min\left\{\frac{\delta_{y_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{y_n}}{2}\right\} > 0.$$

Τότε ισχύει $K_\delta \subseteq U$.
Πράγματι: Έστω $z \in K_\delta$. Τότε υπάρχει $y \in K$ με $d(z,y) < \delta$. Λόγω της (2), υπάρχει $i \in \{1,\dots,n\}$ με $d(y,y_i) < \frac{\delta_{y_i}}{2}$. Έπεται ότι

$$d(z,y_i) \le d(z,y) + d(y,y_i) < \delta_{y_i},$$

δηλαδή, με βάση και την (1),

$$z \in B\Big(y_i, \delta_{y_i}\Big) \subseteq U.$$