Λύσεις του Φυλλαδίου

1. Θεωρούμε το μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Για καθεμιά από τις παρακάτω σχέσεις, δώστε παράδειγμα άπειρου υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$ που την ικανοποιεί:

(α1) $A' = \emptyset$

$A = \mathbb{N}$: Το $\mathbb{N}$ δεν έχει σημεία συσσώρευσης. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε στο διάστημα $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ να μην υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{N}$ διαφορετικό από το x.

Έχουμε τρεις περιπτώσεις:

(1) Αν $x \in \mathbb{N}$, τότε στο διάστημα $(x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2})$ δεν υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{N}$ διαφορετικό του x.

(2) Αν $x < 1$, παίρνουμε $\varepsilon = 1 - x$.

(3) Αν $x \notin \mathbb{N}$ και $x > 1$, παίρνουμε
$\varepsilon = \min\{x - [x], [x]+1-x\}$.

(α2) $A = A'$. $A = [a,b]$

(α3) $A \cap A' = \emptyset$ και $A' \neq 0$

Παίρνουμε $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, οπότε $A' = \{0\}$

(α4) $A' \subsetneq A$ και $A' \neq \emptyset$.

$A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, οπότε $A' = \{0\}$

(α5) $A \subsetneq A'$. $A = (a,b)$, οπότε $A' = [a,b]$.

(β1) $bd(A) = \emptyset$. $A = \mathbb{R}$ (Είναι το μόνο δυνατό παράδειγμα στο $\mathbb{R}$, αφού ισχύει:

$bd(A) = \emptyset \iff A$ clopen

και τα μόνα clopen σύνολα στο $\mathbb{R}$ είναι τα $\emptyset$, $\mathbb{R}$.)

(β2) $A = bd(A)$. $A = \mathbb{N}$: $bd(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N}^\circ = \mathbb{N} \setminus \emptyset = \mathbb{N}$

(β3) $A \cap bd(A) = \emptyset$. $A = (a, b)$: $bd(A) = \{a, b\}$

(β4) $bd(A) \subsetneqq A$. $A = [a, b]$: $bd(A) = \{a, b\}$

(β5) $A \subsetneqq bd(A)$. $A = \mathbb{Q}$: $bd(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

2. Εστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Ποιες από τις συνθήκες (α1) – (α5) και (β1) – (β5) της προηγούμενης άσκησης εξασφαλίζουν ότι
(i) το A είναι κλειστό, (ii) το A δεν είναι κλειστό, (iii) το A είναι ανοικτό;

Λύση

(α) Ισχύει: Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν το A περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του, δηλαδή:

$$A \text{ κλειστό} \iff A' \subseteq A.$$

Αρα:

(α1) $A' = \emptyset \Rightarrow A' \subseteq A \Rightarrow A$ κλειστό

(α2) $A = A' \Rightarrow A' \subseteq A \Rightarrow A$ κλειστό

(α3) $A \cap A' = \emptyset$ και $A' \neq \emptyset \Rightarrow A' \nsubseteq A \Rightarrow A$ όχι κλειστό (αλλά όχι κατ' ανάγκη ανοικτό)

(α4) $A' \subsetneqq A \Rightarrow A$ κλειστό

(α5) $A \subsetneqq A' \Rightarrow A' \nsubseteq A \Rightarrow A$ όχι κλειστό (αλλά όχι κατ' ανάγκη ανοικτό, π.χ. $\mathbb{Q}$)

(β) Ισχύει: $\overline{A} = A^\circ \cup bd(A)$. Αρα

$$A \text{ κλειστό} \iff A = \overline{A} \iff bd(A) \subseteq A.$$

Εχουμε:

(β1) $bd(A) = \emptyset \iff \overline{A} = A^\circ$ και, αφού γενικά $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$, παίρνουμε: $bd(A) = \emptyset \iff \overline{A} = A = A^\circ \iff A$ ανοικτό και κλειστό (clopen)

(β2) $A = bd(A) \Rightarrow bd(A) \subseteq A \Rightarrow A$ κλειστό (β3) $A \cap bd(A) = \emptyset \Rightarrow bd(A) \subseteq A^c$ και, αφού $bd(A) = bd(A^c)$, έχουμε $bd(A^c) \subseteq A^c \Rightarrow A^c$ κλειστό $\Rightarrow A$ ανοικτό.

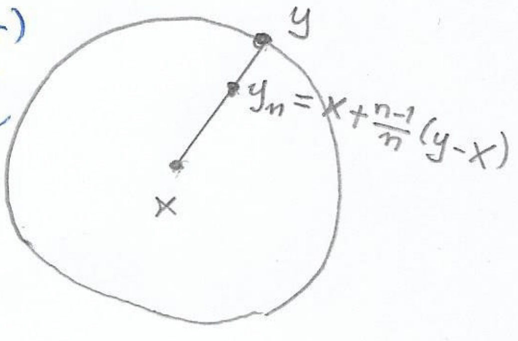
(β4) $bd(A) \subsetneqq A \Rightarrow A$ κλειστό

(β5) $A \subsetneqq bd(A) \Rightarrow A$ όχι κλειστό, αλλά ούτε και ανοικτό, αφού $A \subseteq \bar{A} \setminus A^o$
$\Rightarrow A \cap A^o = \emptyset$
$\Rightarrow A^o = \emptyset$.

3. (α) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι:
(i) Για κάθε $x \in X$ και $r > 0$, ισχύει $\hat{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$.
(ii) Αν για κάποια $x, y \in X$ και $r, s > 0$, ισχύει $B(y,s) \subseteq B(x,r)$, τότε $s \leq r$.
(β) Δείξτε με κατάλληλα παραδείγματα ότι οι ιδιότητες (i) και (ii) του ερωτήματος (α) δεν ισχύουν κατ' ανάγκη σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο.

Λύση

(α) (i) Έχουμε δει ότι, σε κάθε μετρικό χώρο X, κάθε κλειστή μπάλα $\hat{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ είναι κλειστό σύνολο και, αφού προφανώς ισχύει $B(x,r) \subseteq \hat{B}(x,r)$, έχουμε πάντα ότι $\overline{B(x,r)} \subseteq \hat{B}(x,r)$.
Θα δείξουμε ότι, αν ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, τότε ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός: $\hat{B}(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}$.
Αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $y \in S(x,r) = \hat{B}(x,r) \setminus B(x,r)$, το y είναι σημείο συσσώρευσης της $B(x,r)$.
Έστω $y \in S(x,r)$, δηλαδή $\|y - x\| = r$.
Θα βρούμε ακολουθία (y_n) στην $B(x,r)$ με $y_n \to y$. Θέτουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
$y_n = x + \frac{n-1}{n}(y-x) = \frac{1}{n}x + \frac{n-1}{n}y$



Τότε

(1) $\forall n \quad y_n \in B(x,r)$, αφού

$$\|y_n - x\| = \left\|\frac{n-1}{n}(y-x)\right\| = \frac{n-1}{n}\|y-x\| = \frac{n-1}{n}\cdot r < r$$ και

(2) $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$, αφού

$$\|y_n - y\| = \left\|-\frac{1}{n}y + \frac{1}{n}x\right\| = \frac{1}{n}\|x-y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

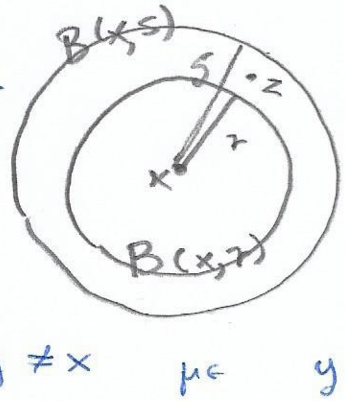
Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

(ii) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Υποθέτουμε ότι, για κάποια $x, y \in X$ και $r, s > 0$, ισχύει $B(y,s) \subseteq B(x,r)$. Θα δείξουμε ότι: $s \leq r$.

Έστω $y = x$. Επιλέγουμε $z \neq 0$ στον X και θέτουμε $u = \frac{z}{\|z\|}$. Τότε $\|u\| = 1$.

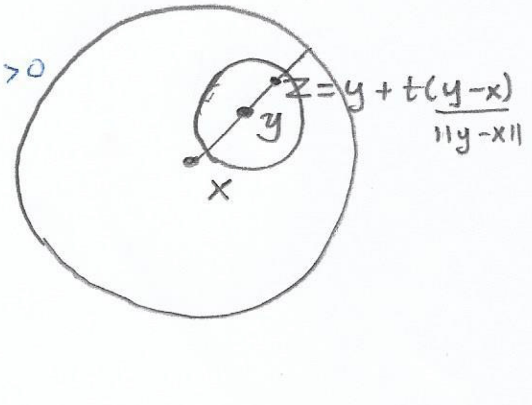
Αν ήταν $s > r$, τότε επιλέγουμε ε με $r < \varepsilon < s$ και θέτουμε $z = x + \varepsilon \cdot u$. Τότε $\|z - x\| = \varepsilon$, δηλαδή $r < \|z-x\| < s$, δηλαδή $z \in B(\ \ , s)$ και $z \notin B(x,r)$, άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι $s \leq r$.



Έστω τώρα $y \neq x$ με $y \in B(x,r)$ και $B(y,s) \subseteq B(x,r)$.
Θα δείξουμε ότι $s \leq r$.

Αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $t > 0$ με $t < s$ ισχύει $t < r$.
(αν ήταν $r < s$, τότε θα υπήρχε t με $r < t < s$).



Εστω $t \in \mathbb{R}$, με $0 < t < s$.
Θέτουμε $z = y + t \dfrac{y-x}{\|y-x\|}$. Τότε

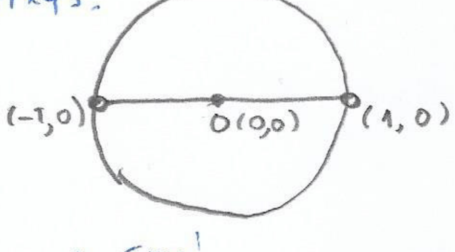
$$\|z-y\| = t\dfrac{\|y-x\|}{\|y-x\|} = t < s \quad , \text{ άρα } \quad z \in B(y,s).$$

Επεται ότι $z \in B(x,r)$, δηλαδή $\|z-x\| < r$.

Όμως, $\|z-x\| = \left\|(y-x) + \dfrac{t}{\|y-x\|}(y-x)\right\| = \dfrac{(\|y-x\|+t)\|y-x\|}{\|y-x\|}$

$\Rightarrow \|z-x\| = \|y-x\| + t$ και, αφού $\|z-r\| < r$,
παίρνουμε $t < r$.
Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη

(6) (i) Είναι εύκολο να δούμε ένα παράδειγμα σε έναν διακριτό μετρικό χώρο. Δίνουμε και ένα διαφορετικό παράδειγμα:
Εστω $X = \{u=(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \cup \{u=(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=0, |x| \leq 1\}$
με τον περιορισμό της Ευκλείδειας μετρικής.
Τότε
$B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=0, |x|<1\}$



οπότε
$\overline{B((0,0),1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=0, |x| \leq 1\}$, ενώ
$\hat{B}((0,0),1) = X \neq B((0,0),1)$

(ii) Σε έναν χώρο με τη διακριτή μετρική ισχύει
$B(x,\frac{1}{2}) = B(x,\frac{1}{3}) = \{x\}$, οπότε $B(x,\frac{1}{2}) \subseteq B(x,\frac{1}{3})$, αν και $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.
Θα δώσουμε ένα διαφορετικό παράδειγμα, όπου θα έχουμε
$B(y,s) \subsetneqq B(x,r)$, ενώ $s > r$.

Θεωρούμε ως X το τρισύνολο

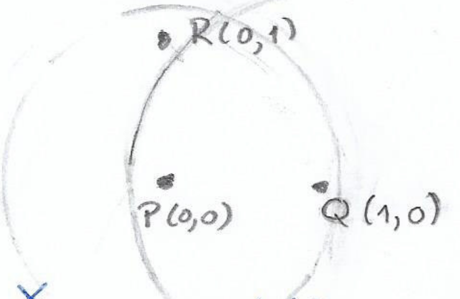
$$X = \{ P(0,0),\ Q(1,0),\ R(0,1) \} \subseteq \mathbb{R}^2$$

με τον περιορισμό της Ευκλείδειας μετρικής.

Τότε, για

$s = 1{,}2$ και $r = 1{,}1$,

έχουμε



$PR = PQ = 1$

$QR = \sqrt{2} > 1{,}2$

$B(P, 1{,}1) = X$, ενώ

$B(Q, 1{,}2) = \{P, Q\} \subsetneq X$, παρ' όλο που $s > r$.

4. (a) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$$

(i) Αν το $x \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A, δείξτε ότι το x είναι οριακό σημείο της ακολουθίας (x_n), δηλαδή υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to x$ καθώς $n \to \infty$.

(ii) Έστω y οριακό σημείο της ακολουθίας (x_n). Είναι κατ' ανάγκη το y σημείο συσσώρευσης του συνόλου A; Είναι κατ' ανάγκη το y σημείο επαφής του συνόλου A;

(β) Δώστε παράδειγμα φραγμένης ακολουθίας (x_n) στο $\mathbb{R}$, με την ιδιότητα: Το σύνολο $A = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ έχει ακριβώς ένα σημείο συσσώρευσης, αλλά η ακολουθία (x_n) δεν συγκλίνει.

(γ) Δώστε ένα παράδειγμα ακολουθίας (u_n) στον $(\mathbb{R}^2, d_2)$ με την ιδιότητα κάθε $v \in \mathbb{R}^2$ να είναι όριο κάποιας υπακολουθίας της (u_n).

Λύση

(a)(i) Έστω x σημείο συσσώρευσης του συνόλου $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$.
Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μία υπακολουθία x_{k_n} της (x_n) με $x_{k_n}\to x$:
Για $\varepsilon=1$, έχουμε ότι το σύνολο $B(x,1)\cap A$ είναι άπειρο. Επιλέγουμε $k_1\in\mathbb{N}$ ώστε $x_{k_1}\in B(x,1)\cap A$, οπότε έχουμε $d(x_{k_1},x)<1$.
Για $\varepsilon=\frac{1}{2}$, έχουμε ότι το σύνολο $B(x,\frac{1}{2})\cap A$ είναι άπειρο. Άρα υπάρχει $k_2\in\mathbb{N}$ με $k_2>k_1$ ώστε $x_{k_2}\in B(x,\frac{1}{2})\cap A$, οπότε $d(x_{k_2},x)<\frac{1}{2}$.
Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι έχουμε επιλέξει $k_1<k_2<\dots<k_n$ ώστε, για κάθε $i=1,2,\dots,n$ να ισχύει $d(x_{k_i},x)<\frac{1}{i}$.
Το σύνολο $B(x,\frac{1}{n+1})\cap A$ είναι άπειρο.
Άρα υπάρχει $k_{n+1}>k_n$ με $x_{k_{n+1}}\in B(x,\frac{1}{n+1})$, οπότε $d(x_{k_{n+1}},x)<\frac{1}{n+1}$.
Είναι φανερό ότι η υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) συγκλίνει στο x.

(ii) Όχι. Παράδειγμα: Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε την ακολουθία (x_n) με
$$x_n=\begin{cases}1, & \text{αν } n \text{ περιττός}\\ \frac{1}{n}, & \text{αν } n \text{ άρτιος}\end{cases}$$
δηλαδή
$$\left(1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{4},1,\frac{1}{6},1,\frac{1}{8},\dots\right)$$
Είναι φανερό ότι το $y=1$ είναι οριακό σημείο της ακολουθίας (x_n), αλλά δεν είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\dots\}$
(Οποιαδήποτε σταθερή ακολουθία (x_n) θα έδινε επίσης ένα παράδειγμα)

Αν υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to y$, τότε το y είναι σημείο επαφής του συνόλου $A = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$.

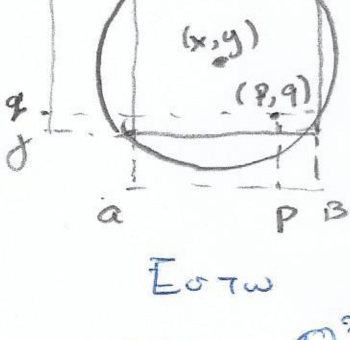
Πράγματι: Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $x_{k_n} \in B(y, \varepsilon)$.

Άρα $B(y,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Έπεται ότι το y είναι σημείο επαφής του A.

(β) Το παράδειγμα που δώσαμε στο α(ii) απαντάει και σε αυτό το ερώτημα. Το σύνολο A έχει ένα μόνο σημείο συσσώρευσης, το 0, αλλά η ακολουθία (x_n) δεν συγκλίνει, αφού οι υπακολουθίες της (x_{2k-1}) και (x_{2k}) συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.

(γ) Στον $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Q}^2 = \{ (p,q) \in \mathbb{R}^2 : p, q \in \mathbb{Q} \}$ των σημείων με ρητές συντεταγμένες.

Είναι εύκολο να δούμε ότι, για κάθε $v=(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $u=(p,q) \in \big(B(v,\varepsilon) \setminus \{v\}\big) \cap \mathbb{Q}^2$.



Δηλαδή, κάθε $v \in \mathbb{R}^2$ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{Q}^2$.

Από την άλλη μεριά, το $\mathbb{Q}^2$ είναι αριθμήσιμο, αφού το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

Έστω $\mathbb{Q}^2 = \{ u_1, u_2, u_3, \dots \}$ μία αρίθμηση του $\mathbb{Q}^2$. Από το α(i) παίρνουμε ότι, για κάθε $v \in \mathbb{R}^2$ - αφού το v είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{Q}^2$ - υπάρχει υπακολουθία (u_{k_n}) της (u_n) με $u_{k_n} \to v$.

5. Αποδείξτε ότι στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν υπάρχουν σύνολα διαφορετικά από το κενό και το $\mathbb{R}$ που να είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι το $A \neq \emptyset$ είναι ένα clopen υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $A = \mathbb{R}$.
Αφού το A είναι ανοικτό, ξέρουμε ότι υπάρχει μία (πεπερασμένη ή άπειρη αριθμήσιμη) οικογένεια $\{(a_i, b_i) : i \in I\}$ ανοικτών διαστημάτων, τα οποία είναι ξένα ανά δύο, ώστε να ισχύει $A = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$.

Μπορεί κάποιο a_i να είναι $-\infty$ ή/και κάποιο b_i να είναι $+\infty$. Θα δείξουμε ότι αναγκαστικά $a_i = -\infty$ και $b_i = +\infty$, οπότε $A = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.
Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει $i \in I$ με $b_i \in \mathbb{R}$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο δείχνοντας ότι το b_i δεν μπορεί να ανήκει ούτε στο A ούτε στο A^c.
Αν $b_i \in A$, θα υπάρχει $j \neq i$ με $b_i \in (a_j, b_j)$.
Αφού το (a_j, b_j) είναι ανοικτό, θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(b_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon) \subseteq (a_j, b_j)$. Όμως $(b_i - \varepsilon, b_i) \cap (a_i, b_i) \neq \emptyset$, άρα $(a_j, b_j) \cap (a_i, b_i) \neq \emptyset$, άτοπο.
Αν $b_i \in A^c$, τότε, αφού και το A^c είναι ανοικτό, θα υπάρχει $\delta > 0$ με $(b_i - \delta, b_i + \delta) \subseteq A^c$, και, όπως πριν, παίρνουμε ότι $A^c \cap (a_i, b_i) \neq \emptyset$, άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι $b_i = +\infty$

Άρα, στην οικογένεια $\{(a_i, b_i) : i \in I\}$ υπάρχει μόνο ένα διάστημα και αυτό είναι της μορφής $(a, +\infty)$ και, ανάλογα με πριν παίρνουμε ότι το a δεν μπορεί να είναι αριθμός, άρα $a = -\infty$ και τελικά $A = \mathbb{R}$.

6. Θεωρούμε το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

(α) Οι μόνες συγκλίνουσες ακολουθίες στο $\mathbb{N}$ είναι οι τελικά σταθερές.

(β) Για οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X, d), κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$ είναι συνεχής.

(γ) Δεν υπάρχει συνεχής 1-1 συνάρτηση $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη</u>

(α) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και ακολουθία (n_k) στο $\mathbb{N}$ με $n_k \to n$. Για $\varepsilon = \frac{1}{2}$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $k \geq k_0$ να ισχύει $|n_k - n| < \frac{1}{2}$. Αφού οι n_k, n είναι φυσικοί, έπεται ότι $n_k = n$ για κάθε $k \geq k_0$. Άρα η (n_k) είναι τελικά σταθερή.

(β) Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς:

Έστω (n_k) ακολουθία στο $\mathbb{N}$ με $n_k \xrightarrow[k\to\infty]{} n$. Από το (α) συμπεραίνουμε ότι η (n_k) είναι τελικά σταθερή, δηλαδή υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_k = n$, για κάθε $k \geq k_0$. Έπεται ότι $f(n_k) = f(n)$, για κάθε $k \geq k_0$, άρα και $(f(n_k))$ είναι τελικά σταθερή και $f(n_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(n)$.

Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

(γ) Υποθέτουμε ότι η $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ είναι μία συνεχής και 1-1 συνάρτηση. Θα καταλήξουμε σε άτοπο, χρησιμοποιώντας και πάλι την αρχή της μεταφοράς.

Έστω $q \in \mathbb{Q}$. Επιλέγουμε μία γνησίως αύξουσα ακολουθία (q_k) στο $\mathbb{Q}$ με $q_k \xrightarrow[k\to\infty]{} q$. (αυτό που χρειαζόμαστε είναι να ισχύει $q_k \neq q$ $\forall k$).

Αφού η g είναι συνεχής θα ισχύει $g(q_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} g(q)$. Όμως η $(g(q_k))$ είναι ακολουθία στο $\mathbb{N}$, και από το (α) παίρνουμε ότι, αφού συγκλίνει, θα είναι τελικά σταθερή, δηλαδή θα υπάρχει k_0 ώστε, για κάθε $l, k \geq k_0$ να ισχύει $g(q_k) = g(q_l)$.

Όμως η g είναι 1-1, άρα $q_k = q_l$ για κάθε $k, l \geq k_0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού η (q_k) έχει επιλεγεί γνησίως αύξουσα.

7. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνήθη μετρική d και τη μετρική ρ με $\rho(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$.

(α) Αποδείξτε ότι οι μετρικοί χώροι $(\mathbb{R}, d)$ και $(\mathbb{R}, \rho)$ έχουν:

(i) τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες,

(ii) τα ίδια κλειστά σύνολα,

(iii) τα ίδια ανοικτά σύνολα.

(β) Βρείτε μια ακολουθία (x_n) η οποία είναι βασική στον $(\mathbb{R}, \rho)$, αλλά δεν είναι βασική στον $(\mathbb{R}, d)$.

<u>Απόδειξη</u>

(α) Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι: η συνάρτηση $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \tan x$

καθώς και η αντίστροφή της $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με $f^{-1}(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχείς (εδώ θεωρούμε και τα δύο σύνολα με τη συνήθη μετρική. Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι ομοιομορφισμός μεταξύ του $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και του $\mathbb{R}$.)

(i) Έστω ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ και $x_n \in \mathbb{R}$ με $x_n \xrightarrow{d} x$ καθώς $n \to \infty$, δηλαδή $|x_n - x| \to 0$. Έπεται ότι $\arctan x_n \to \arctan x$ καθώς $n \to \infty$, δηλαδή $|\arctan x_n - \arctan x| \to 0$, δηλαδή $\rho(x_n, x) \to 0$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Αντίστροφα, έστω ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$ καθώς $n \to \infty$, δηλαδή $\underbrace{|\arctan x_n - \arctan x|}_{\rho(x_n, x)} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Από τη συνέχεια της συνάρτησης $t \to \tan t$, παίρνουμε ότι

$$|\tan(\arctan x_n) - \tan(\arctan x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

δηλαδή

$$|x_n - x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

δηλαδή $x_n \longrightarrow x$ με τη μετρική d.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

(ii) Έπεται από το (i) και τον χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων μέσω των συγκλινουσών ακολουθιών: Έστω $K \subseteq \mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι το K είναι κλειστό στον $(\mathbb{R}, d)$ και θα δείξουμε ότι είναι κλειστό στον $(\mathbb{R}, \rho)$. Έστω (x_n) ακολουθία στο K με $x_n \longrightarrow x$ με τη μετρική ρ. Από το (i) έχουμε ότι $x_n \longrightarrow x$ με την d. Αφού το K είναι d-κλειστό συμπεραίνουμε ότι $x \in K$. Αφού η ακολουθία (x_n) ήταν τυχούσα, με $x_n \xrightarrow{\rho} x$, έπεται ότι το K είναι κλειστό με τη μετρική ρ.

Όμοια, αν το K είναι κλειστό στον $(\mathbb{R}, \rho)$, παίρνουμε ότι είναι κλειστό και στον $(\mathbb{R}, d)$.

(iii) Έστω $G \subseteq \mathbb{R}$. Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$G \ d\text{-ανοικτό} \iff \mathbb{R}\setminus G \ d\text{-κλειστό} \overset{(ii)}{\iff} \mathbb{R}\setminus G \ \rho\text{-κλειστό}$$

$$\iff G \ \rho\text{-ανοικτό}.$$

(β) Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) με $x_n = n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Τότε $x_n \longrightarrow +\infty$ με την d, άρα η (x_n) δεν είναι βασική στον $(\mathbb{R}, d)$ - αφού δεν είναι φραγμένη.

Όμως $\arctan x_n = \arctan n \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\pi}{2}$,

άρα η ακολουθία $(\arctan x_n)$. είναι βασική στον $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική), δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε, για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει

$|\arctan x_n - \arctan x_m| < \varepsilon$, δηλαδή

$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Έπεται ότι η ακολουθία (x_n) είναι βασική στον $(\mathbb{R}, \rho)$.