c_{00}

$x_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$

$x_2 = (1, \frac{1}{2}, 0, 0, 0 \dots)$

$\vdots$

$x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \dots) \in c_{00}$

$c_{00} \subseteq \ell_\infty$

Τότε (στον ℓ_∞) $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x$, όπου

$x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots)$

Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.
Τότε $\forall n \geq n_0$

$\|x - x_n\|_\infty = \|(0, 0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{0}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots)\|_\infty = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

Άρα $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x$. Όμως $x \notin c_{00}$, άρα c_{00} όχι κλειστό.

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

και $A \subseteq X$. Το A σαν υποσύνολο του μετρικού χώρου X είναι φραγμένο, αν $\operatorname{diam}(A) = \sup\{\|x-y\| : x, y \in A\} < +\infty$

Ισοδύναμα: $\exists\, x_0 \in X$ και $r > 0$ με

$A \subseteq B(x_0, r)$

Ισοδύναμα: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x\| \leq M$ $\forall\, x \in A$ (δηλαδή $A \subseteq B(0, M)$)

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι $\operatorname{diam}(A) = C$

δηλαδή $\|x - y\| \leq C \quad \forall x, y \in A$.

Έστω $x_0 \in A$. Τότε $\forall x \in A$

$$\|x - x_0\| \leq C \implies A \subseteq \hat{B}(x_0, C)$$

Θέτοντας $M = \|x_0\| + C$.

Τότε $\forall x \in A$:

$$\|x\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| \leq C + \|x_0\| = M$$

$$\implies A \subseteq \hat{B}(0, M)$$