Άσκηση 7.26

Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε $[-A, A]$, όπου $A>0$. Ωστόσο δε συγκλίνει απόλυτα για καμία τιμή του $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θεωρούμε $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$, $t_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^2}{k^2}$

και $t_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$

Τότε $s_n(x) = t_n(x) + t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Έστω $A>0$. Τότε για $x\in[-A,A]$ έχουμε

ότι $\left|(-1)^k \dfrac{x^2}{n^2}\right| \leq \dfrac{A^2}{k^2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{A^2}{n^2} < +\infty$. Οπότε από M-test Weierstrass

η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A,A]$

με $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ από κριτήριο Dirichlet αφού

$\frac{1}{k} \downarrow 0$

Συνεπώς η $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A,A]$

• Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2+n}{n^2}$$

Διότι π.χ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{x^2+n}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+nx^2}{n^2} = 1 > 0$$

Άρα από κρ. ισοδύναμης συμπεριφοράς αφού $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2+n}{n^2}$ αποκλίνει

<u>Ορισμός</u>

Έστω X σύνολο και $f_n : X \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα λέγεται ομοιόμορφα Cauchy/βασική αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall m, n \geq n_0$ $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$ $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall m, n \geq n_0(\varepsilon)$ και $\forall x \in X$ $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

<u>Θεώρημα</u> (κριτήριο Cauchy)

Έστω X σύνολο και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $f_n : X \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια $f : X \to \mathbb{R}$ $\iff$ η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα βασική

Απόδειξη

($\Longrightarrow$) Έστω ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$
να ισχύει $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

Συνεπώς, αν $m, n \geq n_0$, τότε $\|f_m - f_n\|_\infty \leq$

$$\leq \|f_m - f\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Longleftarrow$) Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ομοιόμορφα βασική.
Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$
ώστε $\forall m, n \geq n_0$ $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$

Τότε $\forall m,n \geq n_0$ $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ $\forall m,n \geq n_0$

Άρα η $(f_n(x))_{n}$ είναι βασική ακολουθία στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ που είναι πλήρης. Άρα υπάρχει $y_x \in \mathbb{R}$ ώστε $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} y_x$

Οπότε ορίζεται $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = y_x = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Θ.δ.ό $f_n \to f$ ομοιόμορφα

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall m,n \geq n_0$ $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$

Συνεπώς αν $x \in X$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\forall m,n \geq n_0$

Κρατάμε η σταθερό και παίρνουμε $m \to +\infty$

Τότε $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ και $\forall x \in X$

Οπότε $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f$

Πόρισμα

Αν X σύνολο και $\ell^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ φραγμένη}\}$ τότε ο $(\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης χώρος με νόρμα, δηλαδή χώρος Banach

Άσκηση 7.29

Έστω (X,d) μ.χ, $A \subseteq X$ και $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A

Υποθέτουμε ότι το σ.σ του A και ότι υπάρχει το $\lim_{t \to t_0} f_n(t) = x_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

α) Ν.δ.ό η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Θ.δ.ό η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ που είναι πλήρης και άρα συγκλίνουσα.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα είναι ομοιόμορφα Cauchy. Άρα $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall m, n \geq n_0$ και $\forall t \in A$ να ισχύει $|f_m(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\xRightarrow{\lim_{t\to t_0}} |x_m - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$$

Άρα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική

β) $\lim_{t \to t_0} f(t) = \lim_{n \to \infty} x_n$, δηλαδή εδώ θα ισχύει

$$\lim_{t \to t_0} \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to t_0} f_n(t)$$

Λύση

Έστω $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. Θ.ν.δ.ο $\lim_{t \to t_0} f(t) = x$

Έστω $t \in A$

$$|f(t) - x| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - x_n| + |x_n - x| \quad (7)$$

Έστω $\varepsilon > 0$.

Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, τότε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_1$ $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall t \in A$

Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_2$

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Επιλέγουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Τότε η (1): $|f(t) - x| \leq |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - x_{n_0}| + |x_{n_0} - x|$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + |f_{n_0}(t) - x_{n_0}| + \frac{\varepsilon}{3} \quad (2)$$

Αφού $\lim_{t \to t_0} f_{n_0}(t) = x_{n_0}$, τότε υπάρχει $\delta > 0$

ώστε αν $t \in A$ και $0 < d(t, t_0) < \delta$ τότε

$$|f_{n_0}(t) - x_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Άρα στην (a) αν $t \in A$ και $0 < d(t, t_0) < \delta$

τότε $|f(t) - x| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Άρα $\lim_{t \to t_0} f(t) = x$

<u>Παρατήρηση</u>

Για να μιλάμε για όριο $\lim_{t \to t_0} f(t)$ σε ένα σύνολο A, το t_0 πρέπει να είναι σ.σ του A.

Αντιπαράδειγμα (Η ομοιόμορφη συνέχεια είναι απαραίτητη)

Στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ θεωρούμε $A = [0,1)$ που έχει σ.σ το $t_0 = 1$.

Θεωρούμε $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = t^n$ και

$f : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1)$

Τότε $\lim\limits_{t \to 1} f_n(t) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{t \to 1} f_n(t) = 1$

Όμως $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(t) = \lim\limits_{n \to \infty} t^n = 0 \quad \forall t \in [0,1)$

Άρα $\lim_{t\to 7}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{t\to 7} 0 = 0 \neq 7 = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to 7} f_n(t)$

(Έπεται ότι f_n δε συγκλίνει ομοιόμορφα στην f διότι δεν ισχύει η παραπάνω άσκηση)

<u>Υπενθύμιση</u> (Θεώρημα Dini)

Αν (X,d) συμπαγής μ.χ. και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μονότονη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f_n \to f$ κατά σημείο, τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

Άσκηση 1.34

Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συνεχών συναρτήσεων με $f_n:[0,1)\to\mathbb{R}$ ώστε $f_n \geq f_{n+1} \geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και $f_n \to 0$ κατά σημείο. Σωστό ή λάθος;

α) Για κάθε $a\in[0,1)$ $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ομοιόμορφα στο $[0,a]$

Λύση

Είναι Σωστό.

Το $[0,a]$ είναι συμπαγές και f_n συνεχής $\forall n\in\mathbb{N}$ και $f\equiv 0$ συνεχής, $f_n \to 0$ κατά σημείο και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

φθίνουσα. Άρα από Dini $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ομοιόμορφα

β) Η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1)$

<u>Λύση</u>

Είναι λάθος

Θεωρώ $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = t^n$. συνεχής $\forall n\in\mathbb{N}$

$f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ κατά σημείο και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα

$$\|f_n\|_\infty = \|f_n - 0\|_\infty$$

Όμως $\sup\limits_{t\in[0,1)} |f_n(t) - 0| = \sup\limits_{t\in[0,1)} t^n = 1$. $\forall n\in\mathbb{N}$

Άρα $\|f_n\|_\infty = 1 \underset{}{\overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}} 0 \Rightarrow$ όχι ομοιόμορφη σύγκλιση

Άσκηση 7.35

Έστω $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων με $f_n\to f$ ομοιόμορφα, όπου $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Αν κάθε f_n έχει ρίζα στο $[0,1]$, τότε και η f έχει ρίζα στο $[0,1]$.

Λύση

Έστω $x_n\in[0,1]$ ρίζα της f_n, δηλαδή $f_n(x_n)=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολ. στο συμπαγές $[0,1]$. Οπότε υπάρχει $x\in[0,1]$ και $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολ με $x_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} x$

<u>Ισχυρισμός</u>: Το x είναι ρίζα της f, δηλ $f(x)=0$

<u>Πράγματι</u>, $|f(x)| \le |f(x)-f(x_{k_n})| + |f(x_{k_n})| \overset{f_{k_n}(x_{k_n})=0}{=}$

$$= |f(x)-f(x_{k_n})| + |f(x_{k_n}) - f_{k_n}(x_{k_n})| \le$$

$$\le |f(x) - f(x_{k_n})| + \|f - f_{k_n}\|_\infty$$

Όμως $f_n \to f$ ομοιόμορφα $\Rightarrow f_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} f$ ομοιόμορφα

και $x_{k_n} \to x \overset{f \text{ συν}}{\Longrightarrow} f(x_{k_n}) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

Οπότε $0 \le |f(x)| \le |f(x) - f(x_{k_n})| + \|f-f_{k_n}\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Άσκηση

Αν (X,d) πλήρως μετρικός και $D \subseteq X$ ώστε $D, X \setminus D$ να είναι πυκνά, τότε τουλάχιστον ένα από τα δύο δεν είναι F_σ

Λύση

Έστω ότι $D, X\setminus D$ F_σ.

Για παράδειγμα $D = \bigcup_{n\geq 1}^{+\infty} F_n$, όπου F_n κλειστό $\forall n \in$

Τότε $X \setminus D = \bigcap_{n \geq 1}^{+\infty} F_n^c$ που είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών. Άρα $X\setminus D$ G_δ

Όμοια ~~X~~ αφού $X\setminus D$ $F_\sigma \Rightarrow D$ είναι G_δ

Άρα υπάρχουν $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

$$D=\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n \ , \quad X\setminus D=\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$$ και U_n, V_n ανοικτά $\forall n\in\mathbb{N}$

Τώρα $\forall n\in\mathbb{N}$ $D\subseteq U_n \overset{D \text{ πυκνό}}{\Longrightarrow} X=\overline{D}\subseteq\overline{U_n}\Rightarrow \overline{U_n}=X$

Άρα U_n πυκνό $\forall n\in\mathbb{N}$

Όμοια V_n πυκνό $\forall n\in\mathbb{N}$ ($X\setminus D$ πυκνό)

Οπότε αφού (X,d) πλήρης από Baire $\Rightarrow$

έχουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n \cap \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ ανοικτό $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $D \cap X \setminus D$ ανοικτό $\Leftrightarrow$ $\emptyset$ ανοικτό $\rightarrow$ άτοπο

<u>Άσκηση</u>

Έστω (X,d) μ.χ. και $F \subseteq X$

Το F είναι κλειστό $\Leftrightarrow$ $\forall\, \Omega \subseteq X$ συμπαγές ισχύει ότι $\Omega \cap F \subseteq X$ κλειστό

Λύση

(⇒) Αν $\Omega \subseteq X$ συμπαγές ⇒ Ω κλειστό. Άρα $\Omega \cap F$ κλειστό ως (πεπερασμένη) τομή κλειστών

(⇐) Έστω προς άτοπο ότι F όχι κλειστό. Τότε υπάρχει $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο F και $x \in X \setminus F$ με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Θεωρούμε λοιπόν $\Omega = \{x_n : n\in\mathbb{N}\} \cup \{x\}$ που είναι συμπαγές. Τότε $\Omega \cap F$ κλειστό από υπόθεση

Όμως $\underline{O} \cap F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\underline{O} \cap F$ κλ

στο $\underline{O} \cap F$ και $x_n \to x \Rightarrow x \in \underline{O} \cap F \Rightarrow x \in F$

άτοπο

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ.

Αν $f_n : X \to \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$ συνεχείς τέτοια να $\exists\, a>0$ ώστε $\forall x \in X$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|f_n(x)| \le n^2 + a$

Τότε ο τύπος $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$ ορίζει συνεχή συνάρτηση

Λύση

Θεωρώ $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} f_k(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Τότε $S_n : X \to \mathbb{R}$ συνεχής $\forall n \in \mathbb{N}$ αφού κάθε f_n είναι συνεχής.

Αν δείξουμε ότι η $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα τότε το όριο της θα είναι συνεχής ως ομοιόμορφο όριο συνεχών.

Ισοδύναμα αρκεί ν.δ.ό $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα

Τώρα $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall x \in X$ έχουμε ότι $\frac{|f_n(x)|}{2^n} \le \frac{n^2+a}{2^n}$

Αν δείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+a}{2^n} < +\infty$, τότε από M-test Weierstrass έχουμε τελειώσει.

Από κριτήριο ρίζας $\sqrt[n]{\frac{n^2+a}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2+a}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1$

Οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+a}{2^n} < +\infty$

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ. και $x_0 \in X$. Αν $\forall \varepsilon > 0$ το $X \setminus B(x_0,\varepsilon)$ είναι συμπαγές, τότε ν.δ.ό (X,d) συμπαγής

Λύση

Έστω $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του X.

Τότε υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x_0 \in U_{i_0}$ που είναι ανοικτό. Άρα $\exists \varepsilon_0 > 0$ ώστε $B(x_0,\varepsilon_0) \subseteq U_{i_0}$

Όμως $X \setminus B(x_0,\varepsilon_0)$ συμπαγές από υπόθεση

και $X \setminus B(x_0,\varepsilon_0) \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$

Άρα υπάρχουν $i_1,\dots,i_n \in I$ ώστε $X \setminus B(x_0,\varepsilon_0) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$

Τότε $X = B(x_0,\varepsilon_0) \cup X \setminus B(x_0,\varepsilon_0) \subseteq U_{i_0} \cup \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} =$

$$= \bigcup_{k=0}^{n} U_{i_k}$$

Άρα βρήκαμε πεπερασμένο υποκάλυμμα οπότε (X,d) συμπαγής

<u>Άσκηση</u>

Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

α) Ν.δ.ο. συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-M,M]$ $\forall M>0$ (σε ποια συνάρτηση;)

Λύση

Αρχικά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (δηλαδή η e^x είναι το κ.σ όριο της σειράς)

Έστω $M>0$. Τότε αν $x \in [-M, M)$ έχουμε

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \le \frac{M^n}{n!} \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!} = e^M < +\infty$$

Άρα από κριτήριο Weierstrass η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-M, M]$ (στην e^x)

β) Ισχύει ότι η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$;

Λύση

Δεν ισχύει

Έστω $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

Αν η σύγκλιση ήταν ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$,

τότε $0 \xleftarrow{n\to\infty} \|s_n - e^x\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right|$

Όμως $e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x \left(1 - \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}{e^x}\right)$

$\xrightarrow{x \to +\infty} +\infty(1-0) = +\infty$ [διότι έχουμε ότι $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}{e^x} = 0$ (κάνοντας DLH n-φορές)]

Οπότε $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sup_{x \in \mathbb{R}} |e^x - S_n(x)| = +\infty \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ. με την εξής ιδιότητα:

Κάθε $F \subseteq X$ κλειστό με $\operatorname{diam}(F) \leq 1$ είναι συμπαγές

Να δειχθεί ότι ο (X,d) είναι πλήρης

Λύση

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία στον X

Για $\varepsilon=1$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall m,n\geq n_0$ να ισχύει $d(x_m,x_n)<1$

Θέτουμε $A = \{x_n : n \geq n_0\}$, όπου $diam(A) \leq 1$

αφού αν $x_m, x_n \in A$ με $m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1$

$\overset{\sup}{\Longrightarrow} diam(A) \leq 1$

Θεωρούμε $F = \overline{A}$. Τότε F κλειστό και

$diam(F) = diam(\overline{A}) = diam(A) \leq 1$

Άρα F συμπαγές και $(x_n)_{n \geq n_0}$ ακολουθία στο F.

Οπότε υπάρχει $x \in F$ και $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ υπακολουθία

της $(x_n)_{n \geq n_0}$ με $x_{k_n} \xrightarrow{n \to \infty} x$

Όμως η $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Άρα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Οπότε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα (στο x)

Άρα (X,d) πλήρης

<u>Άσκηση</u>

Έστω (X,d) μ.χ και $\emptyset \neq A \subseteq X$.

α) Αν $\forall x,y\in A$ με $x\neq y$ ισχύει ότι $d(x,y)\geq \delta$ (για κάποιο $\delta>0$) τότε το A είναι κλειστό

Λύση

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο A με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Θ.δ.ό $x\in A$

Αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα $\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική.

Άρα για το $\delta>0$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall m,n\geq n_0$ $d(x_m,x_n)<\delta \overset{x_m,x_n\in A}{\Longrightarrow} x_m = x_n$ $\forall m,n\geq n_0$ (από υποθ)

Άρα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τελικά σταθερή και $x = x_{n_0}\in F$

<u>Παράδειγμα</u> (σύνολο που έχει μόνο μεμονωμένα και δεν είναι κλειστό)

$A=\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Τότε $\forall n\in\mathbb{N}$

θέλουμε $\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$ και $B(\frac{1}{n}, \varepsilon)\cap A = \{\frac{1}{n}\}$

Άρα όλα είναι μεμονωμένα.

Όμως $0\in \bar{A}\setminus A$, δηλαδή A όχι κλειστό

(διότι $\frac{1}{n}\in A$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$)

β) Ισχύει ότι $\partial A = \phi \Leftrightarrow A$ ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό

Λύση

$\partial A = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \phi$ και $B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \phi\}$

$= \bar{A} \setminus A^o$

Οπότε $\partial A = \phi \Leftrightarrow \bar{A} \setminus A^o = \phi \overset{A^o \subseteq \bar{A}}{\underset{(*)}{\Leftrightarrow}} A^o = \bar{A}$

$\Leftrightarrow A$ ανοικτό και κλειστό (διότι $A^o \subseteq A \subseteq \bar{A}$ γενικά)

(*) ($\Rightarrow$) Αφού $A^o \subseteq \bar{A}$, τότε αν $x \in \bar{A}$ και $x \notin A^o \Rightarrow x \in \bar{A} \setminus A^o = \partial A = \emptyset \rightarrow$ άτοπο

Οπότε $\bar{A} = A^o$

($\Leftarrow$) Προφανής

Άσκηση

Αν η $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (Y, d)$ συνεχής, όπου d διακριτή μετρική, τότε η f είναι σταθερή

Λύση

Θεωρώ $y = f(0) \in Y$.

Με την διακριτή μετρική έχουμε ότι $\{y\}$ είναι ανοικτό και κλειστό.

Οπότε αφού f συνεχής $f^{-1}(\{y\}) \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό και κλειστό. Όμως αν $E \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό και κλειστό, τότε $E = \emptyset$ ή $E = \mathbb{R}$ (γνωστό, σαν θεωρία)

Όμως $0 \in f^{-1}(\{y\})$, αφού $f(0) = y$.

Άρα $f^{-1}(\{y\}) = \mathbb{R}$. $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $x \in f^{-1}(\{y\})$
$\Rightarrow f(x) = y$

(σκιαγράφηση)

β' τρόπος) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ και $f(x) \neq f(y)$

Θέτουμε $A = \{a \geq x : f(x) = f(z) \ \forall z \in [x, a]\}$

Τότε $A \neq \emptyset$, άνω φραγμένο (από το y)

Άρα υπάρχει το $\sup A$. Δείχνουμε ότι $\sup(A) \in A$ και καταλήγουμε σε άτοπο διότι θα υπάρχει $\delta > 0$ με $f/(\sup(A) - \delta, \sup(A) + \delta) =$ σταθ