Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ., $G \subseteq X$ ανοικτό και $x \in G$.

Έστω επίσης $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$. Ν.δ.ο. υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ $B(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq G$

Λύση

Αφού G ανοικτό και $x \in G$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq G$.

Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_1$
$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \iff x_n \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ $\forall n \geq n_1$

Υπάρχει επίσης $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_2} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Θεωρούμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε $\forall n \geq n_0$

θ.δ.ό $B(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq G$

Πράγματι, έστω $n \geq n_0$ και $y \in B(x_n, \frac{1}{n})$.

Τότε $d(y,x) \leq d(y,x_n) + d(x_n,x) \overset{n \geq n_1}{<} \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} <$

$\overset{n \geq n_2}{\leq} \frac{1}{n_2} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow y \in B(x, \varepsilon)$

Άρα $\forall n \geq n_0$ $B(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq G$

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ και $A \subseteq X$. Αν $x \in \bar{A} \setminus A$ ν.δ.ό
$\forall \varepsilon > 0$ το $B(x,\varepsilon) \cap A$ άπειρο.

Λύση

α τρόπος (θεωρία): Έχουμε ότι $\bar{A} = A \cup A'$
Άρα αν $x \in \bar{A} \setminus A \Rightarrow x \in A'$. Οπότε από θεωρία
$B(x,\varepsilon) \cap A$ άπειρο $\forall \varepsilon > 0$

β τρόπος: Έστω ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε
$B(x,\varepsilon) \cap A = \{x_1, \dots, x_n\}$ πεπερασμένο

Θεωρούμε $\delta = \min\{ d(x, x_i) : 1 \leq i \leq n \} \underset{1\leq i\leq n}{\overset{x \neq x_i}{>}} 0$

Επίσης $0 < \delta \leq \varepsilon$. Άρα $B(x,\delta) \cap A \subseteq B(x,\varepsilon) \cap A =$

$= \{x_1, \ldots, x_n\}$

Όμως $x_i \notin B(x,\delta) \cap A \quad \forall 1 \leq i \leq n \Rightarrow B(x,\delta) \cap A = \emptyset$

που είναι άτοπο αφού $x \in \overline{A}$

Άσκηση

Έστω (X,d), (Y,ρ) μ.χ και σ μια μετρική γινόμενο στον $X \times Y$. Αν $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$, τότε ν.δ.ο

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

Λύση

"$\subseteq$": Έστω $(x,y) \in \overline{A\times B}$, τότε υπάρχει $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $A\times B$, ώστε $z_n \xrightarrow{\sigma} (x,y)$.

Αφού $z_n \in A\times B$ $\forall n\in\mathbb{N}$, υπάρχουν $x_n\in A, y_n\in B$ ώστε $z_n=(x_n,y_n)$. Δηλαδή $(x_n,y_n) \xrightarrow{\sigma} (x,y) \xRightarrow[\text{γινομ}]{\sigma \text{ μετρ.}} x_n \xrightarrow{d} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$.

Αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $A \Rightarrow x\in\overline{A}$ και αφού $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $B \Rightarrow y\in\overline{B}$. Άρα $(x,y)\in\overline{A}\times\overline{B}$

"$\supseteq$" Έστω $(x,y)\in \bar{A}\times\bar{B}$. Τότε $x\in\bar{A}$ και $y\in\bar{B}$.

Άρα υπάρχουν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο B ώστε $x_n \xrightarrow{d} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$

~~Οπ~~ Τώρα $(x_n,y_n)\in A\times B$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και αφού σ μετρική γινόμενο έχουμε ότι $(x_n,y_n)\xrightarrow{\sigma}(x,y)$

Άρα $(x,y)\in\overline{A\times B}$

<u>Άσκηση</u>

Έστω (X,d) μ.χ. και $Y\subseteq X$ πυκνό.

Σωστό ή λάθος;

α) Αν ο $(Y, d|_Y)$ είναι φραγμένος, τότε και ο (X,d) είναι φραγμένος.

<u>Λύση</u>

Είναι σωστό

<u>α τρόπος)</u>: Αφού Y φραγμένο $\Rightarrow \operatorname{diam}(Y) < +\infty$

Όμως $X = \overline{Y}$ αφού Y πυκνό.

Άρα $\operatorname{diam}(X) = \operatorname{diam}(\overline{Y}) = \operatorname{diam}(Y) < +\infty$

<u>β τρόπος)</u>: Έστω $x, y \in X$. Τότε υπάρχουν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο Y ώστε $d(x_n,x), d(y_n,y) < \frac{1}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, αφού Y πυκνό.

Τότε όμως $|d(x_n, y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$

$\Rightarrow d(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} d(x,y)$

Όμως $d(x_n, y_n) \leq diam(Y)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\xRightarrow{n\to\infty} d(x,y) \leq diam(Y)$

Συνεπώς $diam(X) = \sup\{d(z,w) : z,w \in X\} \leq diam(Y)$

β) Αν ο $(Y, d|_Y)$ είναι διαχωρίσιμος, τότε και ο (X,d) είναι διαχωρίσιμος.

Λύση

Είναι σωστό

Έστω $D \subseteq Y$ πυκνό στον Y και αριθμήσιμο.

Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αφού Y πυκνός στον X, υπάρχει $y \in Y$ με $d(y,x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Αφού D πυκνός στον Y, υπάρχει $d_0 \in D$ ώστε $d(y,d_0) < \frac{\varepsilon}{2}$

Τότε $d(x,d_0) \leq d(x,y) + d(y,d_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Δηλαδή δείξαμε ότι $\forall x \in X$ και $\forall \varepsilon > 0$ $B(x,\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$

Άρ

Άρα D πυκνό στον X και αριθμήσιμο.
Οπότε (X,d) διαχωρίσιμος

γ) Αν ο $(Y,d|_Y)$ είναι πλήρης τότε και
ο (X,d) είναι πλήρης

<u>Λύση</u>

Είναι σωστό.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία στον X.

Αφού Y πυκνός στον X $\forall n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $y_n\in Y$
ώστε $d(y_n, x_n) < \frac{1}{n}$

Ισχυρισμός: Η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία

Πράγματι, $\forall m,n\in\mathbb{N}$ $d(y_m,y_n)\leq d(y_m,x_m)+d(x_m,x_n)+d(x_n,y_n)$
$< \frac{1}{m} + d(x_m,x_n) + \frac{1}{n}$ (1)

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall m,n\geq n_1$
να ισχύει $d(x_m,x_n)<\frac{\varepsilon}{3}$ (αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική)

Επίσης υπάρχει $n_2\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_2}<\frac{\varepsilon}{3}$
Άρα θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Τότε $\forall m,n\geq n_0$
η (1): $d(y_m,y_n)<\frac{1}{m}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_2}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{n_2}<\varepsilon$
Άρα $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική

Αφού ο $(Y, d|_Y)$ είναι πλήρης, θα υπάρχει $y \in Y$ ώστε $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$

Θ.δ.ό. $x_n \xrightarrow{n\to\infty} y$. Πράγματι, $d(x_n, y) \le d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$

$$\le \frac{1}{n} + d(y_n, y) \xrightarrow{n\to\infty} 0 + 0 = 0$$

Άρα $x_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ και άρα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα

οπότε (X, d) πλήρης

Άσκηση 6.75, γ)

Έστω (X,d) μ.χ συμπαγής και $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$ κλειστών συνόλων.

Ν.δ.ό ότι αν $\bigcap_{n\geq 1}^{+\infty} F_n$ είναι μονοσύνολο, τότε $\operatorname{diam}(F_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Λύση (σκιαγράφηση)

Αφού $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$ τότε $(\operatorname{diam}(F_n))_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$ και κάτω φραγμένη (από το 0).

Οπότε υπάρχει $\delta\geq 0$ ώστε $\operatorname{diam}(F_n) \downarrow \delta$

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $\delta > 0$

Τότε έχουμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $diam(F_n) \geq \delta > \frac{\delta}{2} > 0$

Άρα $\underset{\sup\{d(x,y) : x,y \in F_n\}}{\underset{\shortparallel}{diam(F_n)}} > \frac{\delta}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Οπότε από ισοδ. χαρακτ. supremum υπάρχουν $x_n, y_n \in F_n$ ώστε $d(x_n, y_n) > \frac{\delta}{2}$

Αφού $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \downarrow$ και $x_n, y_n \in F_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_n, y_n \in F_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Τώρα F_n κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς

(X,d). Άρα F_n συμπαγές $\forall n\in\mathbb{N}$.

Οπότε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες στο συμπαγές F_1.

Άρα υπάρχει $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και $x,y\in F_1$ ώστε $x_{k_n}\xrightarrow{n\to\infty} x$, $y_{k_n}\xrightarrow{n\to\infty} y$

<u>Ισχυρισμός</u>: $x,y\in F_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (το έχουμε δείξει σε παλιότερες Ασκήσεις)

Οπότε $x,y\in\bigcap_{n=1}^{+\infty}F_n$ που είναι μονοσύνολο $\Rightarrow$

$\Rightarrow x=y$

Όμως $d(x_{k_n}, y_{k_n}) > \frac{\delta}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\xRightarrow{n\to\infty} d(x,y) \geq \frac{\delta}{2} > 0$

$\Rightarrow x \neq y \rightarrow$ άτοπο

Άσκηση

Έστω $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Σωστό ή λάθος;

α) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό και $F \subseteq \mathbb{R}$ πεπερασμένο, τότε $A \setminus F$ ανοικτό

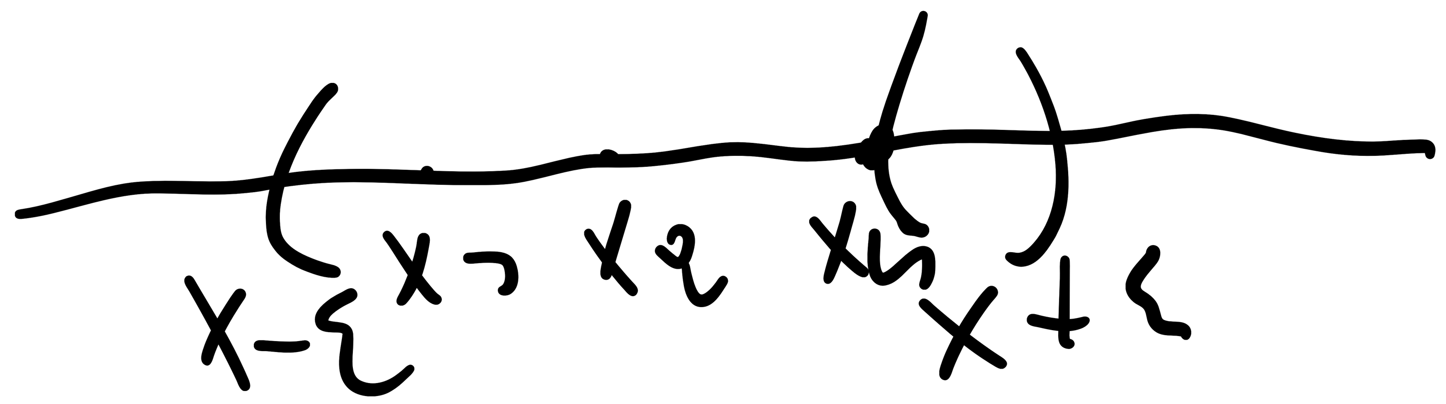
Λύση

Είναι Σωστό

<u>Ισχυρισμός</u>: $\forall x \in \mathbb{R}$ και $\forall \varepsilon > 0$ το $B(x,\varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο

Πράγματι, έστω ότι υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ με $B(x,\varepsilon) \cap A$ πεπερασμένο, δηλαδή

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$$



Τότε όμως $(x_n, x+\varepsilon) \cap A \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \{x_1, \dots, x_n\}$

Όμως $x_1, \dots, x_n \notin (x_n, x+\varepsilon) \cap A \Rightarrow (x_n, x+\varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Άρα A όχι πυκνό $\longrightarrow$ άτοπο

Οπότε αν $x\in\mathbb{R}$ και $\varepsilon>0$, έχουμε ότι $B(x,\varepsilon)\cap A$ άπειρο σύνολο. Άρα $B(x,\varepsilon)\cap A\setminus F$ άπειρο, αφού F πεπερασμένο. Άρα $B(x,\varepsilon)\cap A\setminus F\neq\emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow A\setminus F$ πυκνό

β) Αν $D_1, D_2\subseteq\mathbb{R}$ πυκνά, τότε $D_1\cap D_2$ πυκνό

<u>Λύση</u>

Είναι λάθος

Θεωρώ $D_1=\mathbb{Q}$, $D_2=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ που είναι πυκνά και $D_1\cap D_2=\emptyset$ που δεν είναι πυκνό γ) Αν G_1, G_2 πυκνά G_δ, τότε το $G_1 \cap G_2$ είναι πυκνό

Λύση

Είναι σωστό

Αφού G_1, G_2 G_δ, υπάρχουν ακολουθίες $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανοιχτών ώστε $G_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$, $G_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$

Τότε αν $n\in\mathbb{N}$ έχουμε ότι $G_1 \subseteq U_n \Rightarrow \mathbb{R} = \overline{G_1} \subseteq \overline{U_n}$
$\Rightarrow \overline{U_n} = \mathbb{R}$

Όμοια $\overline{V_n} = \mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Οπότε U_n, V_n ανοικτά και πυκνά θα έπεται

συνεπώς από Baire I αφού $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ πλήρης

έχουμε ότι $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} U_n \cap \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} V_n$ πυκνό

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n \cap \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n = C_1 \cap C_2$$

δ) Κάθε G_δ πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο

Λύση

Είναι σωστό

Έστω ότι υπάρχει $C \subseteq \mathbb{R}$ G_δ πυκνό, και αριθμήσιμο.

Τότε $C = \bigcap_{n\geq 1}^{+\infty} U_n$ όπου U_n ανοιχτό $\forall n \in \mathbb{N}$

και $C = \bigcup_{n\geq 1}^{+\infty} \{x_n\}$, όπου $C = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ λόγω

αριθμησιμότητά του

Τότε $\mathbb{R} \setminus C = \bigcap_{n\geq 1}^{+\infty} \mathbb{R} \setminus \{x_n\}$

Οπότε έχουμε ότι U_n ανοιχτό και πυκνό $\forall n \in \mathbb{N}$ (από προηγούμενο ίδιο επιχείρημα) και

$\mathbb{R} \setminus \{x_n\}$ ανοιχτό και πυκνό (διότι $\{x_n\}$ σ.σ.)

Οπότε αφού $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ πλήρης, από Baire ~~θα~~

έχουμε ότι $\bigcap_{n\geq 1}^{+\infty} \mathbb{R}\setminus\{x_n\} \cap \bigcap_{n\geq 1}^{+\infty} U_n$ πυκνό

$$\parallel$$

$\mathbb{R}\setminus C \cap C = \emptyset$ — άτοπο

Παρατήρηση

Η ίδια απόδειξη θα ήταν και στην περίπτωση που είχαμε το εξής: Αν (X,d) πλήρης μ.χ. που δεν έχει μεμονωμένα σημεία, τότε κάθε G_δ πυκνό υποσύνολο του X είναι υπεραριθμήσιμο

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ. και $\emptyset \neq A \subseteq X$. και $x \in X$

Να δειχθεί ότι $dist(x,A)=0 \iff x \in \overline{A}$

Λύση

$(\Rightarrow)$ Έχουμε ότι $0 = dist(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$.

Συνεπώς $\forall n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $y_n \in A$ ώστε $d(x,y_n) < \frac{1}{n}$

$\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} d(x,y_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff y_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Άρα $x \in \overline{A}$

$(\Leftarrow)$ Αν $x \in \overline{A}$. Τότε υπάρχει $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A

με $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Τότε όμως $0 \leq dist(x,A) \leq d(x,y_n)$

$\xRightarrow{n\to\infty} dist(x,A) = 0$

Άσκηση

Αν $f:(\mathbb{R},|\cdot|) \to (\mathbb{Q},|\cdot|)$ συνεχής, τότε ισχύει ότι η f είναι σταθερή

Λύση

Είναι γνωστό.

Μπορούμε να την δούμε σαν $\tilde{f}:(\mathbb{R},|\cdot|) \to (\mathbb{R},|\cdot|)$ που είναι συνεχής (π.χ αρχή μεταφοράς) και

$\tilde f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{Q}$

Συνεπώς αν υπάρχουν $q_1 < q_2$ με $q_1, q_2 \in \tilde f(\mathbb{R})$,
τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $\tilde f(x_1) = q_1$, $\tilde f(x_2) = q_2$
όμως υπάρχει $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ με $q_1 < a < q_2$
Επομένως αφού $\tilde f$ συνεχής από Θ.Ε.Τ υπάρχει
$\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $\tilde f(\xi) = a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ — άτοπο

Άσκηση

Έστω (X,d) συμπαγής και (Y,ρ) μ.χ
Θεωρούμε σ μια μετρική γινόμενο στον

$X \times Y$. Αν $f:(X,d) \to (Y,\rho)$ συνεχής, τότε να δείξετε ότι $Gr(f) = \{(x,f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ συμπαγές

Λύση

Έστω $((x_n, f(x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο $Gr(f)$.
Θ.δ.ό. έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $Gr(f)$.

Έχουμε ότι $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολ. στον συμπαγή X.
Άρα υπάρχει $x \in X$ και $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ υπακολ. της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{n \to \infty} x$. (1)

Αφού f συνεχής, τότε $f(x_{k_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{\rho} f(x)$ (ε)

Από (δ), (ε) αφού σ μετρική γινόμενο

έχουμε ότι $(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \xrightarrow{\sigma} (x, f(x)) \in Gr(f)$

Επομένως $Gr(f)$ συμπαγές

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ. και $G \subseteq X$. Ν.δ.ό τα παρακάτω

είναι ισοδύναμα:

i) Το G είναι ανοικτό

ii) Για κάθε $A \subseteq X$ $\quad G \cap \bar{A} \subseteq \overline{G \cap A}$

iii) Για κάθε $A \subseteq X$ $\quad \overline{G \cap \bar{A}} = \overline{G \cap A}$

Λύση

i)⇒ii) Έστω $A \subseteq X$. Έστω $x \in G \cap \overline{A}$. Αφού $x \in G$ που είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ με $B(x, \varepsilon_0) \subseteq G$.
Αφού $x \in \overline{A}$, υπάρχει $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.
Συνεπώς για το $\varepsilon_0 > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε
$\forall n \geq n_0 \quad d(x_n, x) < \varepsilon_0$, δηλαδή $x_n \in B(x, \varepsilon_0) \subseteq G$
$\forall n \geq n_0$.
Οπότε η $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n)_{n \geq n_0}$ είναι ακολουθία στο $A \cap G$ ($\pi.\chi.$ $y_n = x_{n-n_0+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$) και $y_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.
Άρα $x \in \overline{A \cap G}$. Οπότε $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$

ii) ⇒ iii) Έστω $A \subseteq X$. Τότε $G \cap \bar{A} \subseteq \overline{G \cap A}$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\overline{G \cap \bar{A}} \supseteq \overline{G \cap A}$

"$\subseteq$" Έχουμε ότι $G \cap \bar{A} \subseteq \overline{G \cap A}$ και το $\overline{G \cap A}$ είναι κλειστό. Άρα $\overline{G \cap \bar{A}} \subseteq \overline{G \cap A}$

"$\supseteq$" Έχουμε ότι $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow G \cap A \subseteq G \cap \bar{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{G \cap A} \subseteq \overline{G \cap \bar{A}}$

iii) ⇒ i) Έστω ότι $\forall A \subseteq X$ ισχύει ότι $\overline{G \cap \bar{A}} = \overline{G \cap A}$

Θέλουμε να δείξουμε ότι G ανοικτό.

Θέλουμε $A = G^c$

Τότε $\overline{G \cap \overline{G^c}} = \overline{G \cap G^c} = \overline{\phi} = \phi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \phi = \overline{G \cap \overline{G^c}} = \overline{G \cap (G^o)^c} \Leftrightarrow G \cap (G^o)^c = \phi$

<u>Ισχυρισμός</u>: $G \subseteq G^o$

Έστω $x \in G$. Τότε $x \notin (G^o)^c \Rightarrow x \in ((G^o)^c)^c \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in G^o$

Άρα τελικά $G = G^o$ και άρα G ανοιχτό

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ και $A, B \subseteq X$

α) Αν $A \cup B = X$, τότε $\bar{A} \cup B^\circ = X$

Λύση

Έστω $x \in X$. Αν $x \in \bar{A}$ τότε $x \in \bar{A} \cup B^\circ$ ✓

Έστω ότι $x \notin \bar{A}$. Θ.δ.ό $x \in B^\circ$. Πράγματι, αφού $x \notin A$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$

Ισχυρισμός: $B(x,\varepsilon) \subseteq B$ και άρα $x \in B^\circ$

Πράγματι, έστω $y \in B(x,\varepsilon)$. Αφού $y \notin A$ και $X = A \cup B$
$\Rightarrow y \in B$. Άρα $B(x,\varepsilon) \subseteq B \Rightarrow x \in B^o$ ✓

β) Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε $\bar{A} \cap B^o = \emptyset$

<u>Λύση</u>

Έστω $x \in \bar{A} \cap B^o$. ~~Αφού~~ Τότε $x \in B^o$. Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq B$

<u>Ισχυρισμός</u>: $B(x,\varepsilon) \subseteq A^c$

Πράγματι, αν $y \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow y \in B$. Όμως $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow y \notin A \Rightarrow y \in A^c$. Άρα $B(x,\varepsilon) \subseteq A^c$

Οπότε $x \in (A^c)^o = (\bar{A})^c \Rightarrow x \notin \bar{A} \to$ άτοπο αφού $x \in \bar{A} \cap B^o$

Άρα $\bar{A} \cap B^o = \phi$

<u>Άσκηση</u>

Θεωρούμε $(\mathbb{N}, |\cdot|)$, $(X, |\cdot|)$, όπου $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

α) Οι $(\mathbb{N}, |\cdot|)$, $(X, |\cdot|)$ είναι πλήρεις μ.χ;

<u>Λύση</u>

Ο $(X, |\cdot|)$ <u>δεν</u> είναι πλήρης, διότι το X δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$

και $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ πλήρης (π.χ διότι $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και
$0 \notin X$ και $\frac{1}{n} \in X \ \forall n \in \mathbb{N}$)

· ο $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ είναι πλήρης διότι κάθε βασική ακολουθία είναι τελικά σταθερή και άρα συγκλίνουσα.

β) Να εξεταστεί αν οι $(\mathbb{N}, |\cdot|)$, $(X, |\cdot|)$ είναι ομοιομορφικοί

<u>Λύση</u>

Είναι σωστό.

Θεωρώ $f:(\mathbb{N}, |\cdot|) \to (X, |\cdot|)$, $f(n) = \frac{1}{n}$

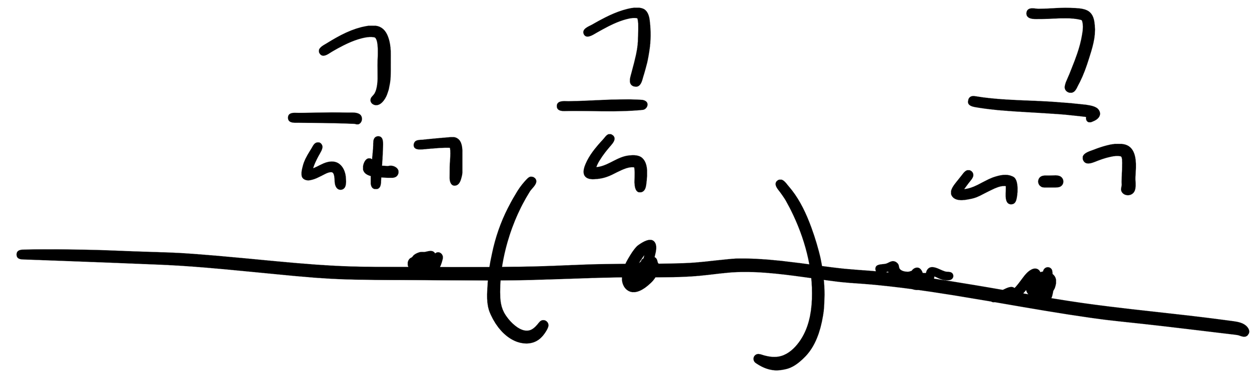
Προφανώς είναι 1-1 και επί.

<u>f συνεχής</u>: Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρώ $\delta = \frac{1}{2} > 0$. Τότε αν $m, n \in \mathbb{N}$ με $|m-n| < \frac{1}{2} \Rightarrow m = n \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(m) - f(n)| = 0 < \varepsilon$ (δείξαμε μάλιστα ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής.

f^{-1} συνεχής : $f^{-1}:(X,|\cdot|)\to(\mathbb{N},|\cdot|)$ με

$f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)=n$

Έστω $\frac{1}{n}\in X$ και $\varepsilon>0$.



Θεωρώ $\delta=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}>0$. Τότε αν $\frac{1}{m}\in X$

με $\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|<\delta \Rightarrow \frac{1}{m}=\frac{1}{n} \Rightarrow \left|f^{-1}\left(\frac{1}{m}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right|=$

$=0<\varepsilon$

Άρα f^{-1} συνεχής στο $\frac{1}{n}$. Άρα f^{-1} συνεχής

Άρα f^{-1} ομοιομορφισμός

Σημείωση: Όχι δεν είναι, διότι $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον $(X,|\cdot|)$ και η $\left(f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι βασική στον $(\mathbb{N},|\cdot|)$