# Διόρθωση για Α' τμήμα Τρίτης

## Άσκηση 7:

Έστω $(X,d)$ συμπαγής μ.χ. και $f: X \to X$ συνάρτηση ώστε $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$ $\forall x \neq y$. Ν.δ.ό. η $f$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο

**Διόρθωση**: Η έξτρα υπόθεση της συνέχειας δε χρειάζεται, διότι από υπόθεση έχουμε ότι $d(f(x),f(y)) \leq d(x,y)$ $\forall x,y \in X$, που σημαίνει ότι η f είναι Lipschitz και άρα συνεχής

## Υπενθύμιση

Έστω $(X,d)$ μ.χ και $A \subseteq X$ και $x \in X$.
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) Το $x$ είναι σ.σ του $A$

ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ $B(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$

iii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ το $B(x,\varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο

iv) Υπάρχει $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $A$ με $x_n \neq x$ $x_n \to x$

και $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$

## Παρατήρηση

α) Αν $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, τότε θεωρούμε $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ και ισχύει ότι $A' = \{0\}$ (όπου $0 \notin A$ !!)

β) Αν $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, αν $A = (0,1) \Rightarrow A' = [0,1]$

## Άσκηση

Έστω $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Είναι γνωστό ότι υπάρχει $\emptyset \neq E \subsetneq \mathbb{R}$ που έχει τις εξής ιδιότητες;

i) Το $E$ άπειρο σύνολο αλλά δεν έχει σημεία συσσώρευσης (γενικά δεν έχει σ.σ όχι μόνο εντός του συνόλου)

<u>Λύση</u>

Θεωρώ $E = \mathbb{N}$, που προφανώς είναι άπειρο

Θ.δ.ο δεν έχει σ.σ

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ έχουμε ότι $B(x, \frac{1}{2}) = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ που είναι διάστημα μήκους 1. Άρα $|B(x, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{N}| \leq 1$ που δεν είναι άπειρο σύνολο. Άρα το τυχαίο $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι σ.σ του $E$. Οπότε $E' = \emptyset$

ii) Το $E$ είναι ανοικτό αλλά δεν έχει σ.σ

<u>Λύση</u>

Δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο.

Πράγματι, έστω $E \neq \emptyset$, $E \subsetneq \mathbb{R}$ ανοικτό και $x \in E$. Οπότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

$$B(x,\varepsilon) \subseteq E \Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq E.$$

Τότε $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subseteq E' \Rightarrow E' \neq \emptyset$

(Εναλλακτικά $x \in E'$, διότι έχουμε $\forall \delta > 0$ ότι $B(x,\delta) \cap E \supseteq (x-\min\{\varepsilon,\delta\}, x+\min\{\varepsilon,\delta\})$ που είναι άπειρο)

iii) Το $E$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. (Θεωρούμε $\mathbb{Q}=\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$ και θέτουμε $E=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(q_n-\frac{1}{2^n}, q_n+\frac{1}{2^n}\right)$ ανοικτό ως ένωση ανοικτών και $\mathbb{Q}\subseteq E \Rightarrow \mathbb{R}=\overline{\mathbb{Q}}\subseteq\overline{E} \Rightarrow \overline{E}=\mathbb{R}$, μήκος$(E)\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=2$)

Λύση

Υπάρχει. $E=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ που είναι ανοικτό ως συμπλήρωμα μονοσυνόλου και

$$\overline{E}=\overline{\mathbb{R}\setminus\{0\}}=\overline{\{0\}^{c}}=\left(\{0\}^{\circ}\right)^{c}=\emptyset^{c}=\mathbb{R}$$

δηλαδή $E$ πυκνό

(Εναλλακτικά $E=\mathbb{R}\setminus\{0\}\subseteq\overline{E}$. Για το $0$, θεωρούμε την $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $E$ και $\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0 \Rightarrow 0\in\overline{E}$)

iv) Το $E$ έχει άπειρα σ.σ αλλά δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο.

<u>Λύση</u>

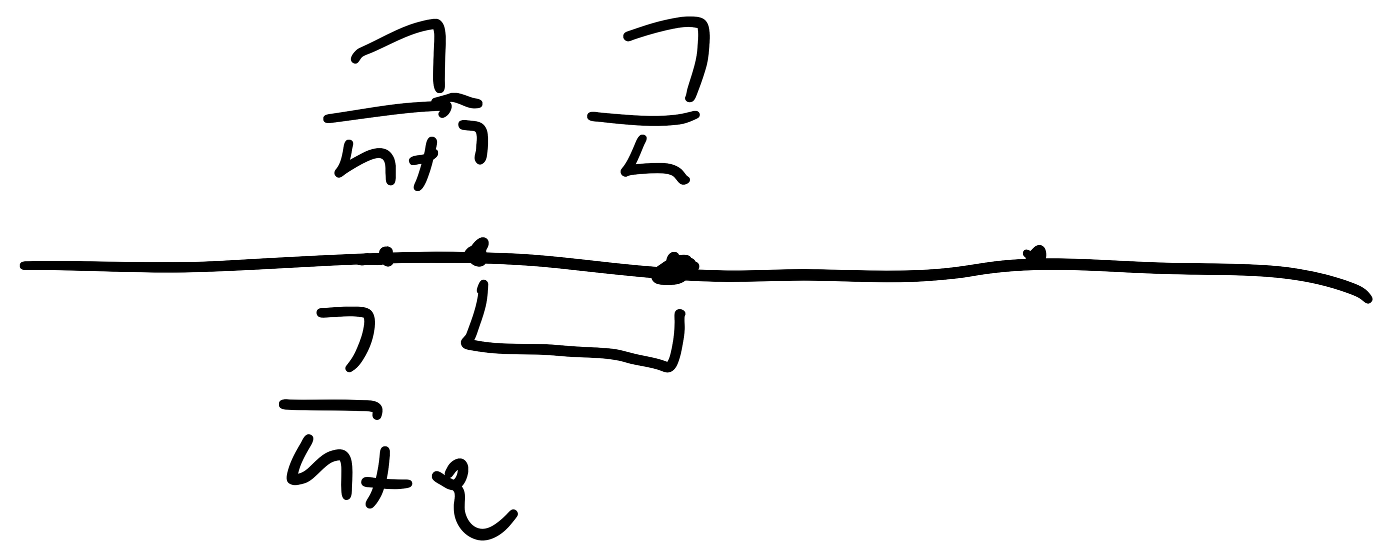
Θεωρούμε $E = \mathbb{Q}$. Τότε $\mathbb{Q}^{\circ} = \emptyset$, διότι σε κάθε ανοικτό διάστημα $\exists$ υπάρχει άρρητος και $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ (π.χ διότι αν $x \in \mathbb{R}$, τότε $\forall \varepsilon > 0$ $B(x;\varepsilon) \cap \mathbb{Q} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ άπειρο) γ) Το E είναι φραγμένο και έχει άπειρα μεμονωμένα σημεία

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε $A=\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$, προφανώς φραγμένο.

Θ.δ.ό κάθε σημείο του είναι μεμονωμένο

Έστω $n\in\mathbb{N}$




Θεωρούμε $\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$

Τότε $B(\frac{1}{n}, \varepsilon)\cap A = \{\frac{1}{n}\}$ που δεν είναι άπειρο. Άρα είναι μεμονωμένο σημείο.

vi) Το $E$ είναι αριθμήσιμο και $E' = [0,1]$

<u>Λύση</u>

Θεωρώ $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ που είναι αριθμήσιμο αφού $\mathbb{Q}$ αριθμήσιμο.

Αν $x \in [0,1]$, τότε από Α.Π.1 υπάρχει $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Q} \cap [0,1] = E$ με $x_n \neq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \to x$. Άρα $x \in E' \Rightarrow [0,1] \subseteq E'$

Αντίστροφα, αν $x \in E'$, τότε υπάρχει $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $E$ με $x_n \neq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x$

Όμως $0 \le x_n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \xRightarrow{n \to \infty} 0 \le x \le 1 \Rightarrow x \in [0,1]$

Άρα $E' \subseteq [0,1]$

<u>Άσκηση</u>

Έστω $X = (0,1]$ εφοδιασμένο με τη μετρική

$$d : X \times X \to [0, +\infty) \,, \quad d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

Ν.δ.ό $(X, d)$ είναι πλήρης

<u>Λύση</u>

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον $X$ που είναι $d$-βασική.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$\forall m,n \geq n_0$ $d(x_m, x_n) < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$ $\forall m,n \geq n_0$

Άρα η $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ που είναι πλήρης. Άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $\frac{1}{x_n} \xrightarrow[|\cdot|]{n\to\infty} x$

Αφού $x_n \in (0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{x_n} \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\overset{n\to\infty}{\Rightarrow} x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \in (0,1] = X$

~~Αφού~~ Αν $\varepsilon > 0$, αφού $\frac{1}{x_n} \xrightarrow[|\cdot|]{n\to\infty} x$, υπάρχει

$n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ $\left|\frac{1}{x_n} - x\right| < \varepsilon \iff$

$\iff \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{\frac{1}{x}}\right| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0 \iff$

$\frac{1}{x} \in X$

$\iff d\left(x_n, \frac{1}{x}\right) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

Άρα $x_n \xrightarrow{d} \frac{1}{x} \in X$. Οπότε $(X,d)$ πλήρης

## Άσκηση

Έστω $(X,d)$ μ.χ., $G \subseteq X$ ανοικτό και $F \subseteq X$ κλειστό. Έστω ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X$ με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Σ ή Λ;

α) Αν $x \in G$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ να ισχύει ότι $x_n \in G$

<u>Λύση</u>

Έστω

Αφού $x \in G$ ανοιχτό, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $B(x,\varepsilon) \subseteq G$

Αφού $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$

$d(x_n, x) < \varepsilon \iff x_n \in B(x,\varepsilon) \subseteq G \quad \forall n \geq n_0$

β) Αν $x \in F$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ να ισχύει $x_n \in F$

Λύση Λάθος

π.χ. Θεωρούμε στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $F = \{0\}$, $x = 0$

και $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$, $x \in F$ και $x_n \notin F$ $\forall n \in \mathbb{N}$

γ) Αν $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $x_n \notin F$, τότε $x \notin F$

Λύση

Λάθος. Ακριβώς το ίδιο αντιπαράδειγμα με το β) δ) Αν $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $x_n \in \sigma$, τότε $x \in \sigma$

**Λύση**

Είναι λάθος

Έστω $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ θεωρούμε $\sigma = (0,e)$ ανοικτό

και $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $x_n \in \sigma$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$x_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ και $0 \notin \sigma$

## Άσκηση

Έστω $(X,d)$ μ.χ.

α) Αν $A, B \subseteq X$ συμπαγή, τότε $A \cup B$ συμπαγές.

## Λύση

α τρόπος): Έστω $(U_i)_{i \in I}$ ανοικτό κάλυμμα του $A \cup B$. Τότε $A, B \subseteq A \cup B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$

Αφού $A, B$ συμπαγή, έχουν πεπερασμένα υποκαλύμματα

Άρα υπάρχουν $J_1, J_2 \subseteq I$ πεπερασμένα ώστε $A \subseteq \bigcup_{j\in J_1} U_j$, $B \subseteq \bigcup_{j\in J_2} U_j$

Τότε $J_1 \cup J_2$ είναι πεπερ. και $A\cup B \subseteq \bigcup_{j\in J_1\cup J_2} U_j$

<u>β τρόπος)</u> Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $A\cup B$. Θ.δ.ό. έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Τότε κάποιο από τα $A, B$ θα περιέχει άπειρους όρους ακολουθίας. Έστω χ.β.τ.γ ότι το $A$ περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $A$

Όμως το $A$ είναι συμπαγές. Άρα υπάρχει υπακολ $(x_{n_{k_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ της $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ και $x\in A$ ώστε $x_{n_{k_m}} \xrightarrow{m\to\infty} x \in A$

Όμως η $(x_{n_{k_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ υπακολ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $x\in A\cup B$.

β) Έστω $E,F\neq\emptyset$ με $E$ συμπαγές και $F$ κλειστό και $E\cap F=\emptyset$.

Τότε $dist(E,F)>0$

Λύση

β) Έχουμε ότι $dist(E,F) = \inf\{d(x,y) : x \in E, y \in F\}$

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $dist(E,F) = 0$

Τότε άμεσα από ισοδύναμο χαρακτ. infimum υπάρχουν $x_n \in E$, $y_n \in F$ ώστε $0 \le d(x_n, y_n) \le \frac{1}{n}$

Τότε $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο $E$ που είναι συμπαγές και άρα υπάρχει $x \in E$ και $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ υποακολ. της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$x_{k_n} \xrightarrow{n \to +\infty} x$$

~~Θέλω~~ Ισχυρισμός: $y_{k_n} \to x$

Πράγματι $0 \le d(y_{n_k}, x) \le d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x)$

$$\le \frac{2}{n_k} + d(x_{n_k}, x) \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Άρα $y_{n_k} \xrightarrow{k \to +\infty} x$ και $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ στο $F$

που είναι κλειστό. Άρα $x \in F$

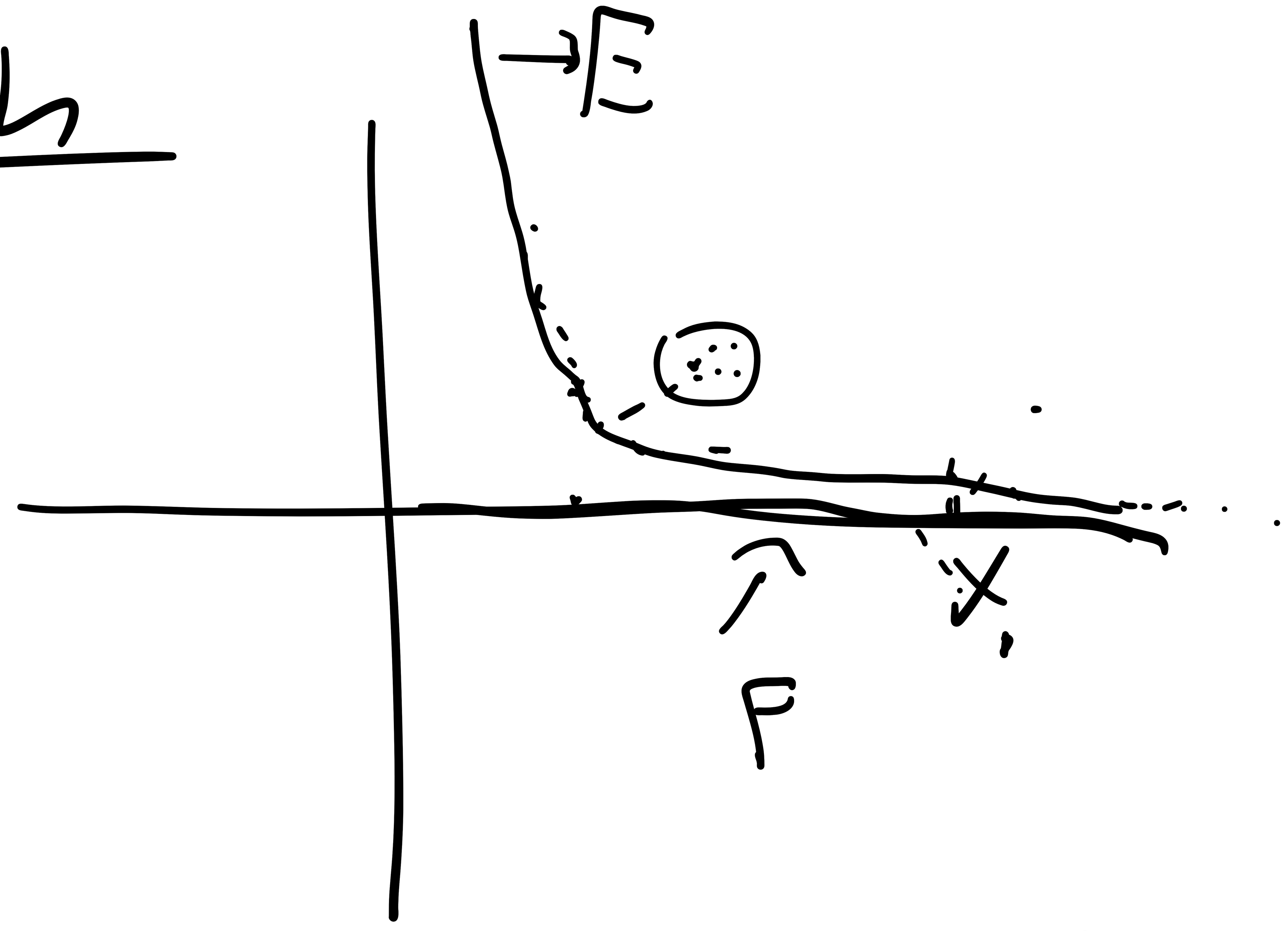
Οπότε $x \in E \cap F = \emptyset \to$ άτοπο

Ερώτημα

Αν $E, F \subseteq X$ κλειστά με $E \cap F = \emptyset$ τότε είναι σωστό

ότι $dist(E, F) > 0$;

## Λύση




$$\operatorname{dist}(E,F) \le \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$
$$\parallel$$
$$\operatorname{dist}(E,F)$$

Έστω $\mathbb{R}^2$ $\quad E = \left\{ \left(x, \frac{1}{x}\right) : x \ge 1 \right\}$

$F = \left\{ (x, 0) : x \in \mathbb{R} \right\}$

Έστω $\mathbb{R}$ : $E = \mathbb{N}$ που είναι κλειστό

διότι δεν έχει σ.σ

κλειστό

και $F = \left\{ n + \frac{1}{n} : n \ge 2 \right\}$ , $E \cap F = \emptyset$

και $\operatorname{dist}(E,F) \leq \left| \overset{\in F}{\left(n+\frac{1}{n}\right)} - \overset{\in F}{n} \right| = \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\xRightarrow{n\to\infty} \operatorname{dist}(E,F) = 0$

(F κλειστό διότι αν $m,n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq 2$

τότε $\left| m + \frac{1}{m} - n - \frac{1}{n} \right| \geq |m-n| - \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|$

$$\geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

και άρα κάθε ~~συγκλ~~ ακολουθία στο F που συγκλίνει, θα είναι βασική και άρα τελικά σταθερή. Οπότε το όριο της θα είναι στοιχείο του F.)

# Άσκηση

α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανοικτών πυκνών υποσυνόλων του $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ~~τώ~~ με $\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n = \emptyset$

(αυτό λέει ότι ο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης, αφού δεν ισχύει το Baire)

## Λύση

Θεωρούμε $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $G_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$

[illegible]

Παρατηρούμε ότι $G_n$ ανοικτά $\forall n \in \mathbb{N}$ και

$G_n$ πυκνά: $\overline{G_n} = \overline{\mathbb{Q}\setminus\{q_n\}} = \overline{\{q_n\}^c} =$

$$= \left(\{q_n\}^\circ\right)^c \overset{q_n \text{ σ.σ.}}{=} \emptyset^c = \mathbb{Q}$$

Τότε $\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n = \emptyset$, διότι αν $q \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n$

τότε $q = q_n$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow q_n \notin G_n$

$\downarrow$ άτοπο, αφού $q \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n$

β) Αν $(X,d)$ μ.χ. ν.δ.ο. κάθε $f:(\mathbb{N},|\cdot|)\to(X,d)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

<u>Λύση</u>

Έστω $\varepsilon>0$. Θ.ν.δ.ο. υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $x,y\in\mathbb{N}$ με $|x-y|<\delta \Rightarrow d(f(x),f(y))<\varepsilon$

Αν θεωρήσουμε $\delta=\frac{1}{2}$, τότε $\forall x,y\in\mathbb{N}$ με $|x-y|<\frac{1}{2} \Rightarrow x=y \Rightarrow d(f(x),f(y))=0<\varepsilon$

γ) Εξετάστε αν οι $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ είναι ομοιομορφικοί

<u>Λύση</u>

Έστω ότι υπάρχει $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ ομοιομορφισμός.

Τότε $f$ 1-1, επί, συνεχής και $f^{-1}$ συνεχής

Έχουμε ότι $\frac{1}{n}, 0 \in \mathbb{Q}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \overset{f \text{ συν}}{\Longrightarrow} f\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} f(0)$$

Όμως $f\left(\frac{1}{n}\right) \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα είναι τελικά σταθερή $\overset{f\ 1-1}{\Longrightarrow}$ $\nexists$ τελικά σταθερή

$\Downarrow$ άτοπο

## Άσκηση

Έστω $(X,d)$ μ.χ. και $\sigma : X \times X \to [0,+\infty)$ ισοδύναμη με τη $d$ μετρική στον $X$ ($\sigma, d$ ισοδύναμες: $x_n \xrightarrow{d} x \iff x_n \xrightarrow{\sigma} x$)

α) Αν $(X,d)$ συμπαγής, είναι σωστό ότι και ο $(X,\sigma)$ είναι συμπαγής;

**Λύση** Ευθύ

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $X$. Θ.Δ.ό. έχει σ-συγκλίνουσα υπακολουθία

Αφού $(X,d)$ συμπαγής, τότε υπάρχει $x\in X$ και $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{d} x$

$\overset{\sigma, d \text{ ισοδ.}}{\Longrightarrow}$ $x_{k_n} \xrightarrow{\sigma} x$

Άρα $(X,\sigma)$ συμπαγής

β) Αν $(X,d)$ πλήρης, είναι και ο $(X,\rho)$ πλήρης;

Λύση

Είναι λάθος

Θεωρούμε $(\mathbb{R},|\cdot|)$ και $(\mathbb{R},d)$, όπου

$$d(x,y)=|\arctan x-\arctan y|$$

ο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ είναι πλήρης.

Οι $|\cdot|, d$ ισοδύναμες: Αν $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{|\cdot|} x \iff$

$\overset{\arctan}{\underset{\text{συν}}{\Longleftrightarrow}}$ τα $\arctan x_n \xrightarrow{n\to\infty} \arctan x \Longleftrightarrow$

tan συν $\quad \Longleftrightarrow d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Longleftrightarrow x_n \xrightarrow{d} x$

Όμως ο $(\mathbb{R}, d)$ <u>δεν</u> είναι πλήρης:

Θεωρώ $x_n = n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Τότε έχουμε ότι $\arctan(x_n) =$

$= \arctan(n) \xrightarrow[|\cdot|]{n\to\infty} \frac{\pi}{2}$

Άρα $(\arctan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $|\cdot|$-βασική

$\Rightarrow$ η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $d$-βασική

$(d(x_n, x_m) = |\arctan x_n - \arctan x_m|)$

Αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $x_n \xrightarrow{d} x$

$\Rightarrow d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow |\arctan x_n - \arctan x| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Leftrightarrow \arctan(x_n) \underset{|\cdot|}{\xrightarrow{n\to\infty}} \arctan(x) \Leftrightarrow$
tan συνεχής

$\Leftrightarrow \quad x_n \underset{|\cdot|}{\xrightarrow{n\to\infty}} x \Leftrightarrow n \xrightarrow{n\to\infty} x \in \mathbb{R}$ άτοπο

Άρα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όχι $d$-συγκλίνουσα

## Άσκηση

Έστω $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ συνεχής. Σ ή Λ;

α) Αν $K\subseteq X$ συμπαγές, τότε $f(K)\subseteq Y$ συμπαγές.

### Λύση

Σωστό.

Έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $f(K)$. Θ.δ.ό έχει συγκλ. υπακολουθία

Αφού $y_n \in f(K)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $x_n \in K$ ώστε $f(x_n) = y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο συμπαγές $K$.

Οπότε υπάρχει $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολ. της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x \in K$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} x \implies$

$$\overset{f \text{ συν}}{\implies} f(x_{k_n}) \xrightarrow{n\to+\infty} f(x) \in f(K)$$

$$\iff y_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \in f(K)$$

β) Αν $K \subseteq X$ φραγμένο, τότε $f(K) \subseteq Y$ φραγμένο

Λύση

Λάθος

Θεωρώ $(X,d) = ((0,1], |\cdot|)$, $(Y,\rho) = ((0,+\infty), |\cdot|)$

και $f: X \to Y$, $f(x) = \frac{1}{x}$ που είναι συνεχής.

Τώρα $X$ φραγμένο και $f(X) = Y = (0,+\infty)$ που δεν είναι φραγμένο.

γ) Αν $K \subseteq X$ φραγμένο και $f$ Lipschitz, τότε $f(K) \subseteq Y$ φραγμένο

## Λύση

Σωστό

Έστω ότι $\sigma(f(x),f(y)) \leq C d(x,y) \quad \forall x,y \in X,$

(όπου $C>0$ σταθερά λόγω f Lipschitz)

Αφού $K$ φραγμένο $\Rightarrow diam(K) < +\infty$

Έστω τυχόντα $z,w \in f(K)$. Τότε υπάρχουν $x,y \in K$

με $f(x)=z, f(y)=w$

Οπότε $\sigma(z,w) = \sigma(f(x),f(y)) \leq C\, d(x,y) \underset{x,y \in K}{\leq} C\, diam(K)$

Άρα $diam(f(K)) = \sup\{\sigma(z,w) : z,w \in f(K)\} \leq C\, diam(K)$