Πρόταση

Έστω X σύνολο και $\ell^\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f$ φραγμένη$\}$, τότε ο $(\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης χώρος με νόρμα

Αποδ

Αρχικά $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty(X) \to [0, +\infty)$, διότι αν $f \in \ell^\infty(X)$, τότε υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in X$

Οπότε $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \leq M \Rightarrow \|f\|_\infty \leq M < +\infty$

Θα δείξουμε ότι είναι νόρμα στον $\ell^\infty(X)$

i) Αν $f \in \ell^\infty(X)$, τότε $\|f\|_\infty \geq 0$ και

$$\|f\|_\infty = 0 \iff \sup_{x \in X} |f(x)| = 0 \iff f(x) = 0 \quad \forall x \in X \iff f \equiv 0$$

ii) Αν $f \in \ell^\infty(X)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\|\lambda f\|_\infty =$

$$= \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in X} |\lambda| \, |f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| =$$

$$= |\lambda| \, \|f\|_\infty$$

iii) Αν $f, g \in \ell^\infty(X)$, τότε $\forall x \in X$ έχουμε ότι

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_\infty = \sup_{x \in X} |(f+g)(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Ο $(\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης

Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\ell^\infty(X)$ που είναι βασική.
Οπότε αν $\varepsilon>0$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall m,n\geq n_0$
να ισχύει ότι $\|f_m-f_n\|_\infty<\varepsilon$

Άρα $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ομοιόμορφα βασική. Άρα είναι
ομοιόμορφα συγκλίνουσα. Οπότε υπάρχει $f:X\to\mathbb{R}$
ώστε $f_n\xrightarrow{n\to\infty}f$ ομοιόμορφα $\Leftrightarrow \|f_n-f\|_\infty\xrightarrow{n\to\infty}0$

Δεν έχουμε τελειώσει!! Πρέπει να δείξουμε
ακόμη ότι $f\in\ell^\infty(X)$.

Για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ $\|f - f_{n_0}\|_\infty < 1$.

Συνεπώς, για $x \in X$: $|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq$

$$\leq \|f - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0}\|_\infty < 1 + \|f_{n_0}\|_\infty$$

Οπότε $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} |f(x)| \leq 1 + \|f_{n_0}\|_\infty < +\infty$,

δηλαδή f φραγμένη $\Rightarrow f \in \ell^\infty(X)$

Άσκηση

Έστω $f:(\mathbb{R},|\cdot|)\to(X,d)$, όπου d διακριτή μετρική. Αν f συνεχής, τότε είναι σταθερή.

Λύση (β τρόπος)

Ισχυρισμός: Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, υπάρχει $\delta_x>0$ ώστε

$f|_{(x-\delta_x,\,x+\delta_x)}\equiv$ σταθ. $(*)$

Απόδειξη Ισχυρισμού: Έστω $x\in\mathbb{R}$. Για $\varepsilon=\frac{1}{2}>0$, υπάρχει $\delta_x>0$, αφού f συνεχής ώστε αν $y\in\mathbb{R}$ με $|y-x|<\delta_x$, τότε $d(f(x),f(y))<\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(y)$ αφού d διακριτή μετρική

Άρα $f|_{(x-\delta_x,\, x+\delta_x)} \equiv$ σταθ $= f(x)$

<u>Άλλος τρόπος</u>

Αν δεν υπάρχει τέτοιο $\delta > 0$. Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n \in \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$ με $f(x_n) \neq f(x)$. Όμως $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

$\overset{f \text{ συν}}{\Longrightarrow} f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(x) \Rightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ τελικά σταθερή αφού d διακριτή μετρική — άτοπο διότι τελικά τότε $f(x_n) = f(x)$ που δεν ισχύει

Έστω λοιπόν ότι η f δεν είναι σταθερή.

Τότε υπάρχουν $x < y$ με $f(x) \neq f(y)$

Θεωρούμε $A = \{a \geq x : f \equiv \text{σταθ στο } [x, a]\}$

Τότε $A \neq \emptyset$, διότι $x \in A$.

Το A είναι φραγμένο και ένα άνω φράγμα του είναι το y.

Πράγματι, αν $z \geq y$ και $z \in A$, τότε f = σταθ στο $[x, z]$ $\xRightarrow{y \in [x,z]}$ $f(x) = f(y)$ — άτοπο αφού $f(x) \neq f(y)$.

Άρα αν $a \in A \Rightarrow a < y$

Συνεπώς ορίζεται το $\sup(A) \in \mathbb{R}$.

<u>Ισχυρισμός</u>: $\sup(A) \in A$

<u>Πράγματι</u>, υπάρχει από Α.Λ.Ι υπάρχει ακολουθία

στο A ώστε $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \sup(A) \overset{f \text{ συν}}{\Longrightarrow} f(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(\sup A)$

Όμως, αφού $a_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $f|[x, a_n]$ σταθ.

Άρα $f(x) = f(a_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Από μοναδικότητα ορίου $f(\sup A) = f(x)$.

Μένει να δείξουμε ότι αν $y \in [x, \sup(A))$, τότε $f(y) = f(x)$. Πράγματι, αν $x \leq y < \sup(A)$, τότε από ισοδ. χαρακτ. supremum υπάρχει $a \in A$ με $y < a \leq \sup(A)$. Αφού όμως $a \in A$, τότε $f|[x,a]$ σταθ $\overset{y \in [x,a]}{\Longrightarrow} f(y) = f(x)$. Άρα $f|[x, \sup A]$ σταθ

$\Rightarrow \sup(A) \in A \Rightarrow M = \sup A = \max A \in \mathbb{R}$

Εφαρμόζουμε τον ισχυρισμό (*) για το M.
Τότε υπάρχει $\delta_M > 0$ ώστε $f|(M-\delta_M, M+\delta_M) \equiv$ σταθ.
Όμως $f(M) = f(x)$, αφού $M \in A$.
Άρα $f|(M-\delta_M, M+\delta_M) \equiv f(x)$.

Οπότε αν πάρουμε $y \in (M, M+\delta_M)$, έχουμε
ότι $f|[x,y] \equiv f(x)$, διότι $f|[x,M] \equiv f(x)$
και $f|[M, M+\delta_M) \equiv f(x)$

Άρα $y \in A$ και $y > M = \sup A \rightarrow$ άτοπο

Άσκηση 7.3

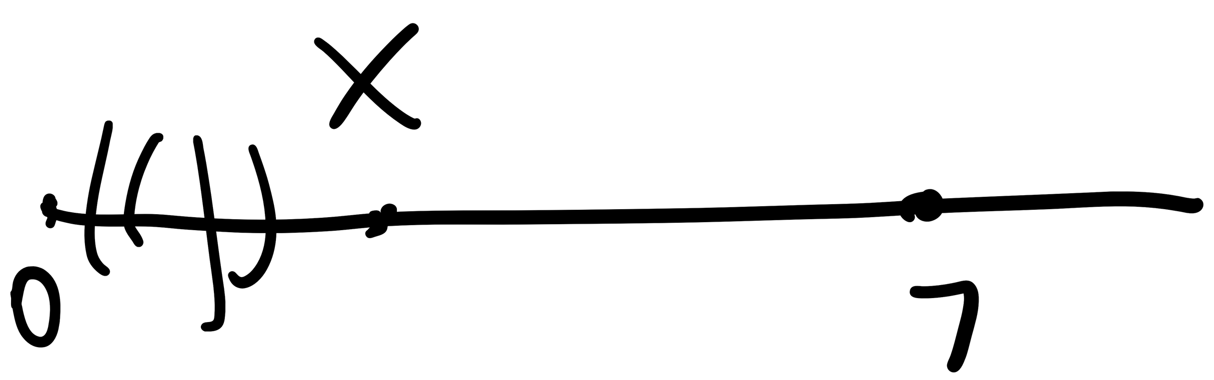
$$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f_n(t)=\begin{cases} 0, & \text{αν } t<\frac{1}{n+1} \text{ ή } t>\frac{1}{n} \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{t}\right), & \text{αν } t\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]\end{cases}$$

Ν.δ.ό $f_n\to f$ κατά σημείο σε κάποια f συνεχή αλλά όχι ομοιόμορφα

Λύση

Αν $x\in\mathbb{R}$, τότε αν $x>1$, ή $x\le 0 \Rightarrow x\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$

$f_n(x)=0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Αν $x\in(0,1]$  . Τότε υπάρχει n_0 ώστε

ώστε $\forall n \geq n_0$ $\frac{1}{n} < x \Rightarrow x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ $\forall n \geq n_0$

Άρα $\forall n \geq n_0$ $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Οπότε $f_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ κατά σημείο. $[0, \pi)$

Θ.δ.ο. $f_n \overset{n \to \infty}{\not\to} 0$ ομοιόμορφα $[x, x+\pi]$

$$\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]} \sin^2\left(\frac{\pi}{t}\right)$$

Θ.δ.ο. $\|f_n\|_\infty \not\to 0$

Αν $t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{t} \leq n+1$

$$\Leftrightarrow \pi n \leq \frac{\pi}{t} \leq \pi n + \pi$$ και

$$\left(\sin^2 x = 1 \iff \sin x = \pm 1 \iff x = k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\pi}{t} = \pi n + \frac{\pi}{2} \iff \frac{1}{t} = n + \frac{1}{2} \iff t = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2n+1} \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$$

Οπότε αν θέσουμε $t_0 = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \Rightarrow |f_n(t_0)| = 1$

Άρα $\|f_n\|_\infty = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|f_n\|_\infty \not\to 0$

Πρόταση

Το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη (Διαγώνιο επιχείρημα του Cantor)

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x=(x(n))_{n\in\mathbb{N}} : x(n)\in\{0,1\} \ \forall n\in\mathbb{N}\}$$

Έστω ότι είναι αριθμήσιμο και

$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x_k : k\in\mathbb{N}\}$ μια αρίθμησή του

$$x_1 = (x_1(1), x_1(2), x_1(3), \dots, x_1(n), \dots)$$
$$x_2 = (x_2(1), x_2(2), x_2(3), \dots, x_2(n), \dots)$$
$$\vdots$$
$$x_n = (x_n(1), x_n(2), x_n(3), \dots, x_n(n), \dots)$$
$$\vdots$$

Ορίζουμε $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $x(n) = 1 - x_n(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\left(x = (1 - x_1(1), 1 - x_2(2), 1 - x_3(3), \ldots, 1 - x_n(n), \ldots) \right)$

Τότε αφού $x_i(i) \in \{0,1\} \Rightarrow 1 - x_i(i) \in \{0,1\}$

και μάλιστα $1 - x_i(i) \neq x_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$ (1)

Οπότε $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Άρα

υπάρχει $x_k \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ώστε $x = x_k \Rightarrow$

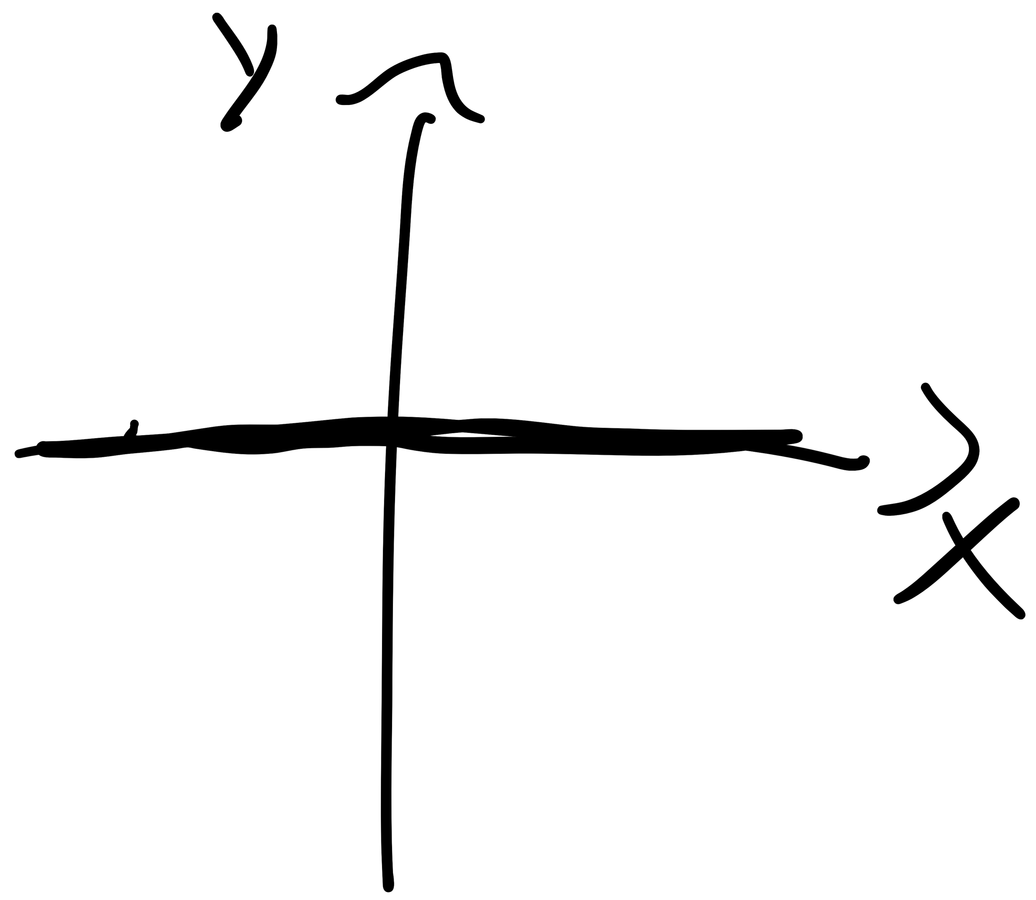
$\Rightarrow x(k) = x_k(k) \Leftrightarrow 1 - x_k(k) = x_k(k)$ — άτοπο από (1)

Άρα το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ υπεραριθμήσιμο

Άσκηση 3.47

P τέλειο $\Leftrightarrow$ P κλειστό και $P \subseteq P'$

β) $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



<u>A κλειστό:</u> Αν $((x_n,0))_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με

$(x_n,0) \to (x,y) \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, $0 \xrightarrow{n\to\infty} y \Rightarrow y = 0$

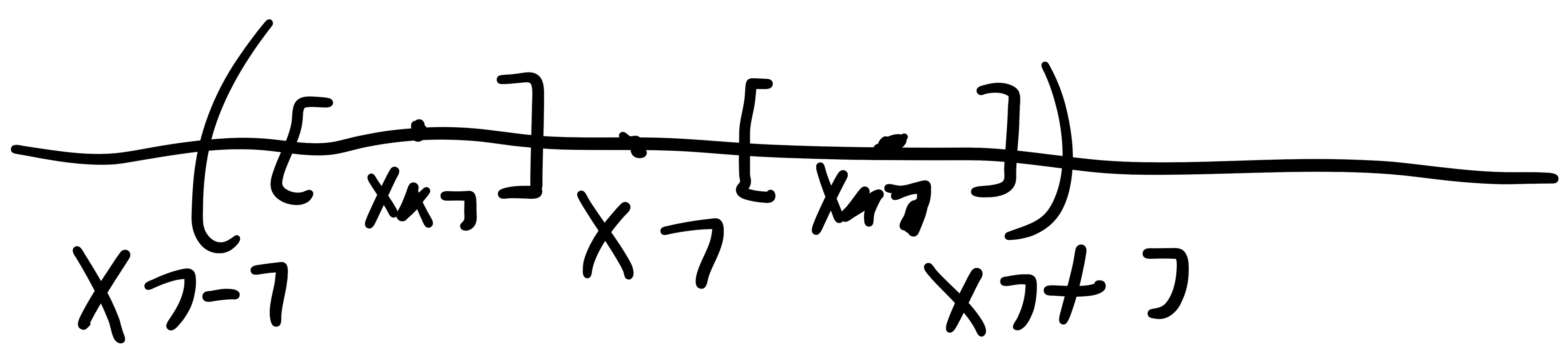
Άρα $(x,y) = (x,0) \in A$

<u>$A \subseteq A'$:</u> Έστω $(x,0) \in A$. Τότε θεωρούμε την ακολουθία $((x+\frac{1}{n},0))_{n\in\mathbb{N}}$ στο A και $(x+\frac{1}{n},0) \xrightarrow{n\to\infty} (x,0)$ και $(x+\frac{1}{n},0) \neq (x,0)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

γ) Έστω ότι είναι αριθμήσιμο $P = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ όπου $P \subseteq \mathbb{R}$ και P τέλειο

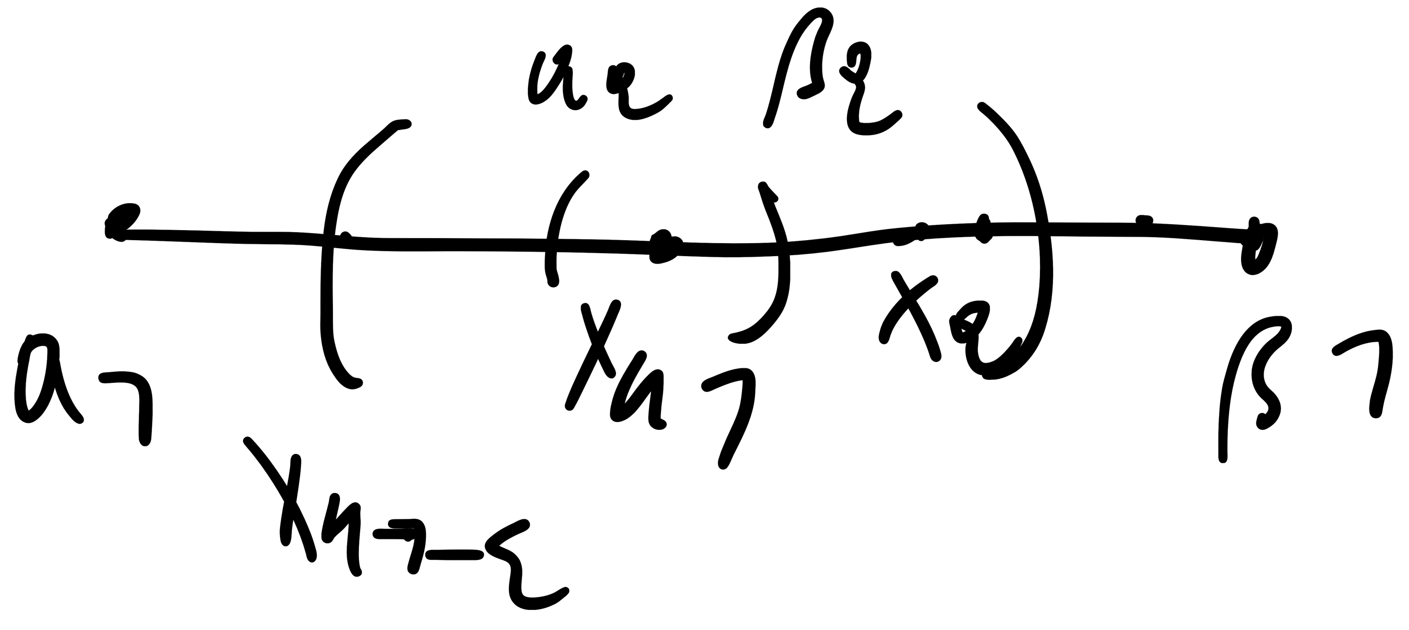
Αφού x_1 σ.σ του P, τότε $(x_1 - 1, x_1 + 1) \cap P$ άπειρο.

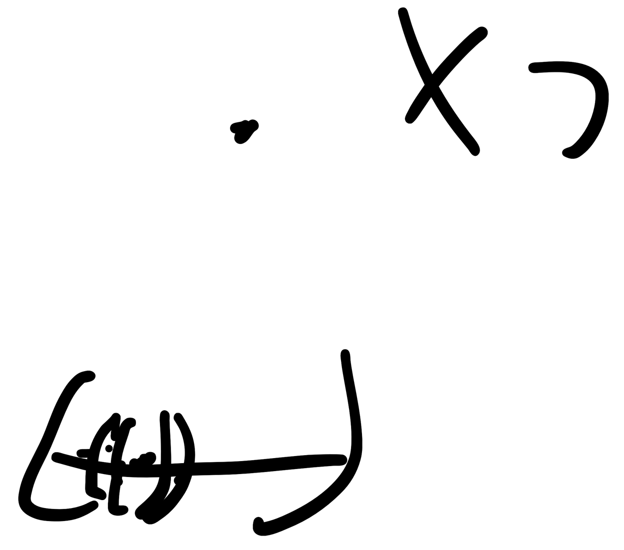
Έστω λοιπόν $x_{k_1} \in (x_1 - 1, x_1 + 1) \cap P$ με $x_{k_1} \neq x_1$

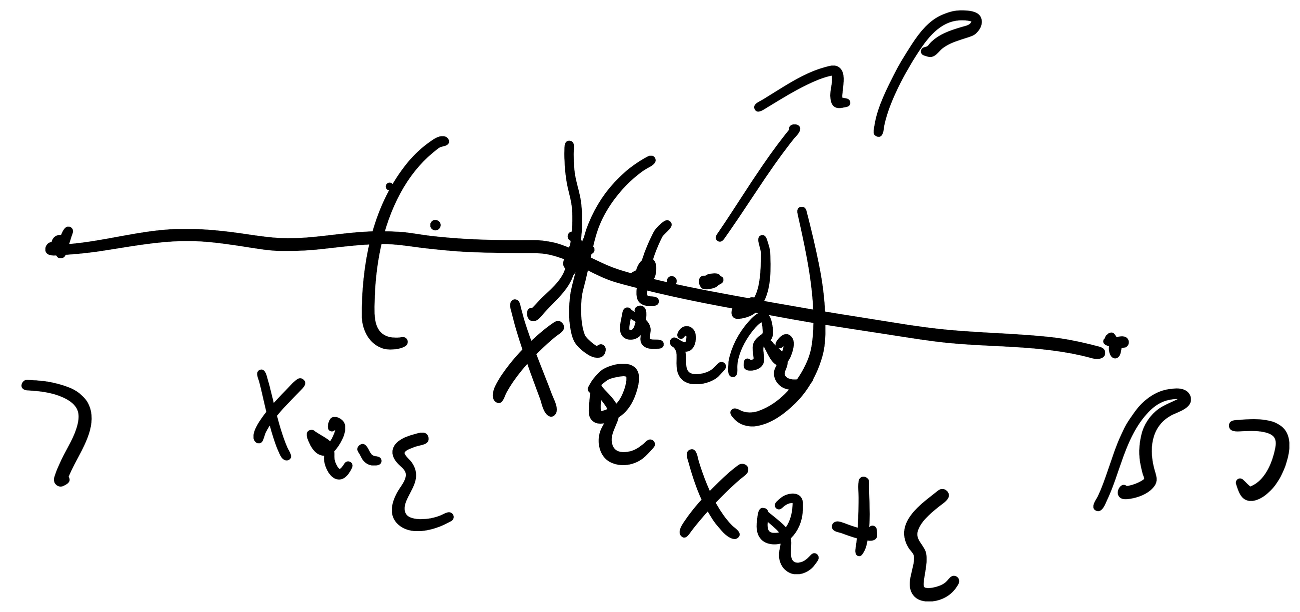


Παίρνουμε λοιπόν α_1, β_1 με $\alpha_1 < x_{k_1} < \beta_1$

και $x_1 \notin [\alpha_1, \beta_1]$ και $\beta_1 - \alpha_1 < 1$ (*)





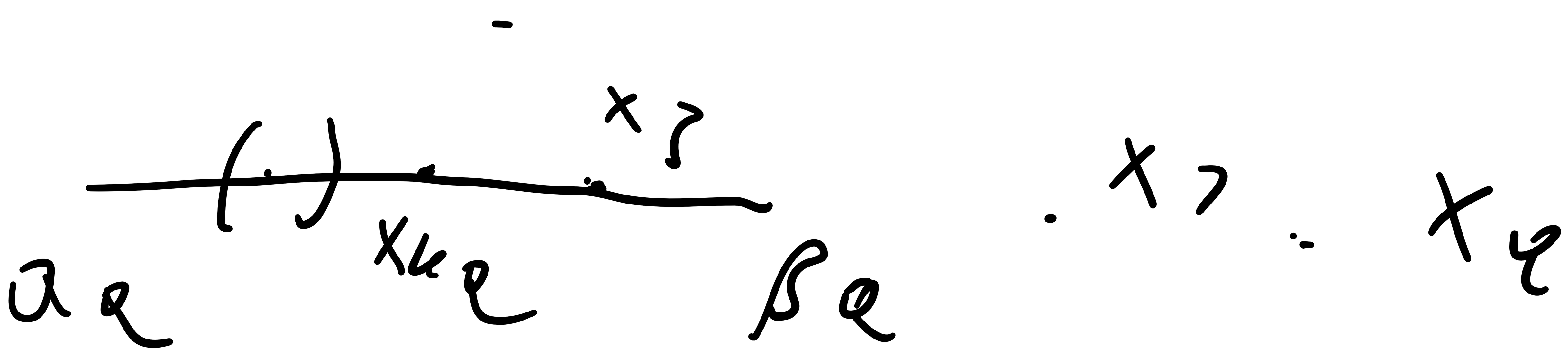


Το x_{k_1} είναι σ.σ του P. Οπότε για $\varepsilon>0$ κατάλληλα μικρό, το $(x_{k_1}-\varepsilon, x_{k_1}+\varepsilon)\cap P$ άπειρο

Τότε βρίσκουμε $a_2, \beta_2 \in (x_{k_1}-\varepsilon, x_{k_1}+\varepsilon)$ ώστε

το $(a_2,\beta_2)\cap P = \emptyset$ και $x_2 \notin (a_2,\beta_2)$ και

$\beta_2 - a_2 < \frac{1}{2}$



Επαγωγικά κατασκευάζουμε $[a_n,\beta_n]$ κιβωτισμένα

με $\beta_n - a_n \le \frac{1}{2^n}$ ώστε $[a_n,\beta_n]\cap P \neq \emptyset$ και

$x_n \notin [a_n, \beta_n]$

Από Α.Λ Ι έχουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, \beta_n] \neq \emptyset$

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, \beta_n] = \{x\}$$

Όμως $x \notin P$ αφού, αν $x \in P \Rightarrow x = x_k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N} \Rightarrow x_k \notin [a_k, \beta_k] \Rightarrow x_k \notin \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, \beta_n]$

άτοπο

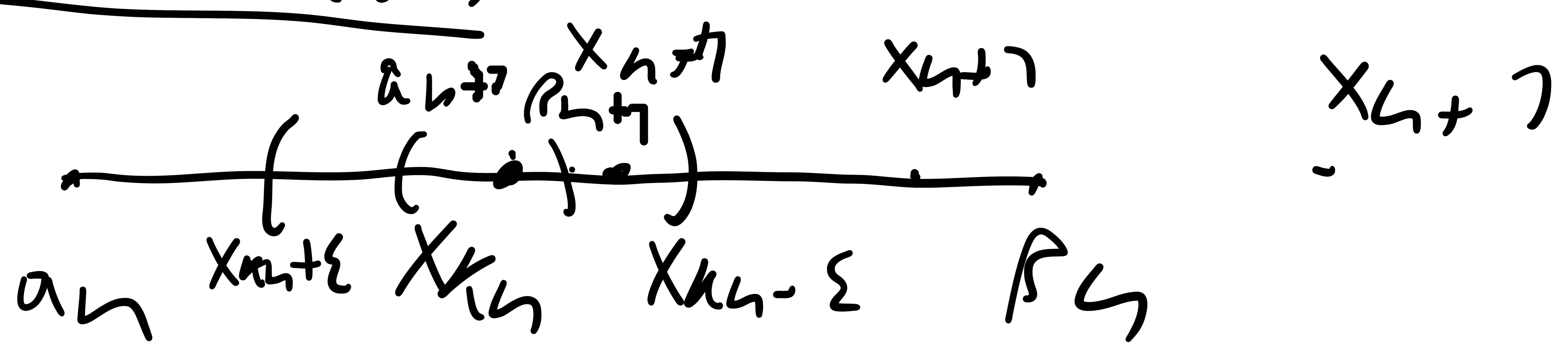
Όμως $x \in P'$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Τότε $[a_n, \beta_n] \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

διότι, $x \in [a_n, \beta_n]$ και $\beta_n - a_n \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$

και $[a_n, \beta_n] \cap P \neq \emptyset \Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap P \neq \emptyset$.

Οπότε $x \in P' \setminus P$ — άτοπο αφού αν P τέλειο, και α) $P \subseteq P'$

(*) Επαγ. υπόθεσης



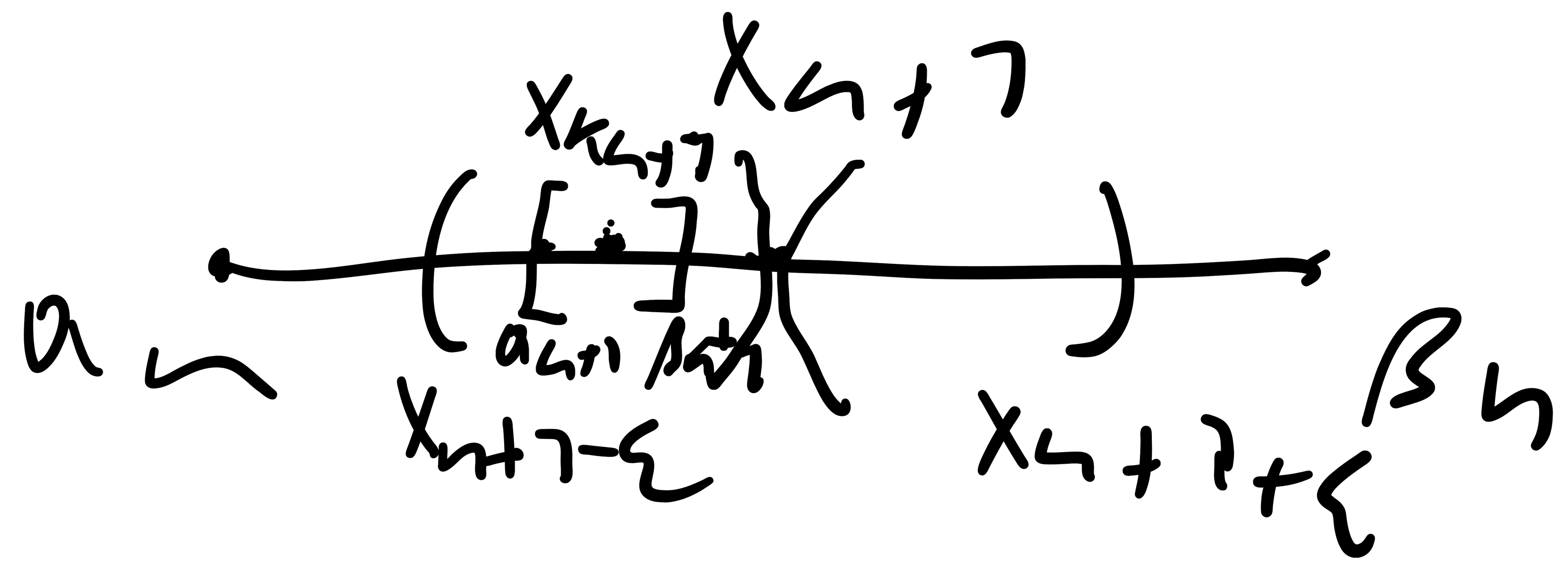
$[a_1, \beta_1] \supseteq [a_2, \beta_2] \supseteq \dots \supseteq [a_n, \beta_n]$ με

$x_i \notin [a_i, \beta_i]$ $\forall 1 \leq i \leq n$ και $P \cap [a_i, \beta_i] \neq \emptyset$

Παίρνουμε $0 < \varepsilon = \frac{1}{2} \min\{\beta_n - x_{k_n}, x_{k_n} - a_n, \frac{1}{2^n}\}$

• Αν $x_{n+1} \neq x_{k_n}$, επιλέγω $a_{n+1} < x_{k_n} < \beta_{n+1}$ ώστε
$\beta_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{q^{n+1}}$. ~~Τότε~~ και $x_{n+1} \notin [a_{n+1}, \beta_{n+1}]$

• Αν $x_{n+1} = x_{k_n}$



Αφού $(x_{n+1}-\varepsilon, x_{n+1}+\varepsilon)\cap P$ άπειρο, τότε
$(x_{n+1}-\varepsilon, x_{n+1})\cap P$ άπειρο ή $(x_{n+1}, x_{n+1}+\varepsilon)\cap P$
άπειρο.

Αν π.χ. $(x_{n+1}-\varepsilon, x_{n+1})\cap P$ άπειρο, τότε επιλέγουμε
$x_{n+1}-\varepsilon < a_{n+1} < \beta_{n+1} < x_{n+1}$ ώστε $\beta_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{q^{n+1}}$

και να υπάρχει $x_{k_{n+1}} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$

Άσκηση 4.11

Έστω $f : (X,d) \to (Y,\rho)$. Ν.δ.ό αν $\forall A \subseteq X$ ισχύει ότι $f(A') \subseteq f(A)'$, τότε η f είναι συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

Λύση

Έστω $A \subseteq X$, τότε $\overline{A} = A \cup A'$

Έχουμε ότι $f(A') \subseteq f(A)'$

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

θ.ν.δ.ο. $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

Θεωρούμε $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε $\bar{A} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$

Άρα $x \in \bar{A} = A \cup A'$.

(*) • Αν $x \in A'$, τότε $f(x) \in f(A') \Rightarrow f(x) \in f(A)'$.

Όμως $f(A) = \{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Ισχυρισμός: Υπάρχει $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ ~~ώστε~~ υπακολ. της $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $f(x_{n_k}) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$

Αποδ: Για $\varepsilon = 1$. $B(f(x), 1) \cap f(A)$ άπειρο.

Άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(f(x_{n_1}), f(x)) < 1$

Έστω ότι έχουμε βρει $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ ώστε

$$\rho(f(x_{n_i}), f(x)) < \frac{1}{i} \quad \forall\, 1 \le i \le k.$$

Τώρα για $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$, το $B(f(x), \frac{1}{k+1}) \cap f(A)$ άπειρο. Άρα υπάρχει $n_{k+1} > n_k$ ώστε

$\rho(f(x_{n_{k+1}}), f(x)) < \frac{1}{k+1}$ (διότι αλλιώς

$B(f(x), \frac{1}{k+1}) \cap f(A) \subseteq \{f(x_1), \dots, f(x_{n_k})\}$ — άτοπο)

Επαγωγικά ορίσαμε την υπακολουθία που θέλαμε.

(*) Υποθέτοντας προς άτοπο ότι $f(x_n) \not\xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ μπορούμε χ.β.τ.γ να υποθέσουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\rho(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Όμως στον ισχυρισμό έχουμε ότι $\rho(f(x_{n_k}), f(x)) < \frac{1}{k}$. Οπότε αν $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, τότε $\rho(f(x_{n_0}), f(x)) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

↳ άτοπο.

Οπότε $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

• Αν $x \notin A'$ $\Rightarrow x \in A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Αφού $x \notin A'$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

$B(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$. Όμως $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$

$d(x_n, x) < \varepsilon \Rightarrow x_n \in \underbrace{B(x,\varepsilon) \cap A}_{=\{x\}}$ $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow x_n = x$ $\forall n \geq n_0$. Οπότε $f(x_n) = f(x)$ $\forall n \geq n_0$

Άρα $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

Άσκηση 4.74 α)

Έστω $f:(X,d) \to (Y,\rho)$ συνεχής και $D \subseteq X$ πυκνό.

α) Αν η $f|D$ είναι φραγμένη, τότε και η f είναι φραγμένη. Σωστό ή λάθος;

Λύση

Αφού $f|D : D \to Y$ φραγμένη, τότε $diam(f(D)) < +\infty$

Θέλουμε ν.δ.ο. $diam(f(X)) < +\infty$.

Έστω $z, w \in f(X)$. Τότε υπάρχουν $x, y \in X$ ώστε $f(x) = z$ και $f(y) = w$.

Όμως αφού D πυκνό υπάρχουν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο D ώς $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$ και $y_n \xrightarrow{n \to \infty} y$

$\overset{f \text{ συν}}{\Longrightarrow} f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$ και $f(y_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(y)$

Οπότε $\rho(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow{n \to \infty} \rho(f(x), f(y))$

Όμως $f(x_n), f(y_n) \in f(D)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα $\rho(f(x_n), f(y_n)) \leq \operatorname{diam}(f(D)) \Rightarrow$

$\overset{n \to \infty}{\Longrightarrow} \rho(f(x), f(y)) \leq \operatorname{diam}(f(D))$

$\Rightarrow \rho(z, w) \leq \operatorname{diam}(f(D))$ $\forall z, w \in f(X)$

Οπότε $\operatorname{diam}(f(X)) \leq \operatorname{diam}(f(D)) < +\infty$

$$\operatorname{diam}(f(X)) = \sup\{\rho(z,w) : z,w \in f(X)\}$$

Άρα f φραγμένη

Άσκηση 4.20

Έστω $(X_1,d_1),\dots,(X_n,d_n)$ $d_\infty = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$ είναι μετρική γνώριμη στο $\prod_{i=1}^{n} X_i$ και (X,d) μ.χ.

Έστω επίσης $f : (X,d) \longrightarrow \left(\prod_{i=1}^{n} X_i, d_\infty\right)$, όπου $f = (f_1,\dots,f_n)$ με $f_i : (X,d) \longrightarrow (X_i,d_i)$ $\forall 1 \leq i \leq n$

α) f συνεχής $\Leftrightarrow$ f_i συνεχής $\forall i \in \mathbb{N}$.

~~Έστω~~ Λύση

α) Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$

Έχουμε ότι $f(x_n) \xrightarrow{d_\infty} f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (f_1(x_n), \dots f_n(x_n)) \xrightarrow{d_\infty} (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

$\overset{d_\infty \text{ ισοδ}}{\Leftrightarrow}$ $f_1(x_n) \xrightarrow{d_1} f_1(x), \dots, f_n(x_n) \xrightarrow{d_n} f_n(x)$
σιν

β) Η f Lipschitz $\Leftrightarrow$ f_i Lipschitz $\forall i \leq n$

$(\Rightarrow)$ Αν f Lipschitz, τότε υπάρχει $L > 0$

ώστε $\forall x,y \in X$ $d_\infty(f(x),f(y)) \leq L\, d(x,y) \Rightarrow$

$$\max\{d_i(f_i(x),f_i(y)) : 1 \leq i \leq n\}$$

$\Rightarrow d_i(f_i(x),f_i(y)) \leq L\, d(x,y) \quad \forall 1 \leq i \leq n$

Άρα f_i Lipschitz με σταθερά L $\forall 1 \leq i \leq n$

($\Leftarrow$) Αν f_i Lipschitz $\forall 1 \leq i \leq n$, τότε υπάρχουν $L_i > 0$ ώστε αν $x,y \in X \Rightarrow d_i(f_i(x),f_i(y)) \leq L_i\, d(x,y)$ $\forall 1 \leq i \leq n$

Θεωρούμε $L = \max\{L_1,\dots,L_n\} > 0$

Τότε $d_i(f_i(x),f_i(y)) \leq L\, d(x,y)$ διότι $L_i \leq L$ $\forall 1 \leq i \leq n$ $\Rightarrow d_\infty(f(x),f(y)) = \max\{d_i(f_i(x),f_i(y)) : 1 \leq i \leq n\}$
$\leq L\, d(x,y)$

Οπότε f Lipschitz με σταθερά L

γ) Η f ομ. συνεχής $\Leftrightarrow$ f_i ομ. συνεχής $\forall 1 \le i \le n$

($\Rightarrow$). Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

αν $x, y \in X$ με $d(x,y) < \delta \Rightarrow d_\infty(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Όμως αν $x, y \in X$ με $d(x,y) < \delta$, έχουμε

ότι $d_i(f_i(x), f_i(y)) \le \max\limits_{1 \le j \le n} d_j(f_j(x), f_j(y)) = d_\infty(f(x), f(y)) < \varepsilon$

$\forall 1 \le i \le n$

Οπότε f_i ομ. συνεχής $\forall 1 \le i \le n$

(⇐) Αν f_i ομ. συνεχής $\forall\, 1\le i\le n$. Έστω $\varepsilon>0$

Αφού f_i ομ. συνεχής υπάρχει $\delta_i>0$ ώστε

αν $d(x,y)<\delta_1 \Rightarrow d_i(f_i(x),f_i(y))<\varepsilon$

Θεωρώ $\delta=\min\{\delta_1,\dots,\delta_n\}>0$. Συνεπώς, αν

$x,y\in X$ με $d(x,y)<\delta \Rightarrow d(x,y)<\delta_i \;\; \forall\, 1\le i\le n$

Άρα $d_i(f_i(x),f_i(y))<\varepsilon \;\; \forall\, 1\le i\le n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \max\{d_i(f_i(x),f_i(y))<\varepsilon : 1\le i\le n\} \Leftrightarrow$$

$$\|$$

$$\Leftrightarrow d_\infty(f(x),f(y))<\varepsilon$$

δ) Είναι γνωστό ότι f ισομετρία $\Leftrightarrow$ f_i ισομετρία $\forall 1 \leq i \leq n$

λύση

Λάθος. Θεωρώ $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|) = (X_1, d_1)$

και $(X_2, d_2) = \left(\mathbb{R}, \frac{|\cdot|}{2}\right)$

$$d_2(x,y) = \frac{|x-y|}{2}$$

Θεωρώ $f : \mathbb{R} \to (X_1 \times X_2, d_\infty)$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

και $f_1(x) = f_2(x) = x$

Τότε αν $x, y \in \mathbb{R}$ $d_\infty(f(x), f(y)) =$

$$= \max\left\{ |f_1(x) - f_1(y)|, \frac{|f_2(x) - f_2(y)|}{2} \right\} =$$

$$= \max\left\{ |x-y|, \frac{|x-y|}{2} \right\} = |x-y|$$

Άρα f ισομετρία

Όμως f_2 δεν είναι ισομετρία, διότι

$$d_2(x,y) = \frac{|x-y|}{2} \neq |x-y| \quad \text{για } x \neq y$$

· Αν όμως $f_1, \dots, f_n$ ισομετρίες, τότε f ισομετρία διότι αν $x, y \in X$ έχουμε ότι $d_\infty(f(x), f(y)) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} d_i(f_i(x), f_i(y)) =$

$= \max\limits_{1 \le i \le n} d(x,y) = d(x,y)$

ε) Είναι σωστό ότι f ομοιομορφισμός $\Leftrightarrow$

f_i ομοιομορφισμός $\forall\, 1 \le i \le n$

<u>Λύση</u>

Είναι λάθος. Θεωρούμε $(X,d) = (X_1,d_1) = (X_2,d_2) =$

$= (\mathbb{R}, |\cdot|)$

Θεωρούμε $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = -x$

Τότε f_1, f_2 ομοιομορφισμός

Θεωρώ τώρα $f:\mathbb{R}\to(X_1\times X_2, d_\infty)$, $f(x)=(f_1(x),f_2(x))$

$\Leftrightarrow f(x)=(x,-x)$.

Αυτή δεν είναι επί διότι π.χ $(0,1)\notin f(\mathbb{R})$

Άρα f δεν είναι ομοιομορφισμός

• Ούτε το αντίστροφο ισχύει.

Θεωρώ $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)=(X,d)$, $(X,d_1)=(X,d_2)=(\mathbb{R},|\cdot|)$.

Τότε $(X_1\times X_2, d_\infty)=(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\|\cdot\|_\infty)=(X,d)$

Θεωρώ $f:(X,d)\to(X,d)$, $f(x,y)=(x,y)$.

Τότε $f_1:(X,d)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$, $f_1(x,y)=x$ και

$f_2:(X,d)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$, $f_2(x,y)=y$.

Τότε η f είναι ομοιομορφισμός, αφού είναι η ταυτοτική απεικόνιση και (εδώ) είναι ισομετρία.

Όμως οι f_1, f_2 δεν είναι 1-1, αφού π.χ. $f_1(0,x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Άρα f_1, f_2 δεν είναι ομοιομορφισμοί.