Άσκηση

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(x)$$

$$f_n(x) = n$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε συμπαγή μ.χ. (X,d)

$x_{k_n} \to x$

Αφού $x_n \not\to x$, υπάρχει $\varepsilon>0$ και $(x_{m_\lambda})_{\lambda\in\mathbb{N}}$ με $d(x_{m_\lambda},x)\geq\varepsilon$

Εφόσον είμαστε σε συμπαγή χώρο, υπάρχει μια $(x_{\mu_{\lambda_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ υπακολ. και $y\in X$ ώστε

$$x_{\mu_{\lambda_k}} \xrightarrow{k\to+\infty} y$$

Πώς ορίζουμε την $(x_{m_\lambda})_{\lambda\in\mathbb{N}}$

Αφού $x_n \not\to x$, τότε $d(x_n,x)\not\to 0$.

Επομένως υπάρχει $\varepsilon_0>0$ ώστε $\forall n_0\in\mathbb{N}$ να υπάρχει $N\geq n_0$ ώστε $d(x_N,x)\geq\varepsilon_0$ (*)

(Αν $d(x_n,x)\to 0$, τότε $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\geq n_0$ να ισχύει $d(x_n,x)<\varepsilon$)

x_n

$100 \to x_{107} \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

$10.000 \to x_{10.073}$

Θέτουμε στην (*) $n_0 = 1$. Τότε υπάρχει $m_1 \geq n_0$ ώστε $d(x_{m_1}, x) \geq \varepsilon_0$

Έστω ότι έχουμε βρει $m_1 < m_2 < \dots < m_k$ ώστε $d(x_{m_i}, x) \geq \varepsilon_0$ $\forall\, 1 \leq i \leq k$.

Στην (*) θέτουμε $n_0 = m_k + 1$. Τότε υπάρχει $m_{k+1} \geq n_0 = m_k + 1 > m_k$ ώστε $d(x_{m_{k+1}}, x) \geq \varepsilon_0$

Επομένως επαγωγικά, ορίζεται η υπακολουθία $(x_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ώστε $d(x_{m_k}, x) \geq \varepsilon_0$

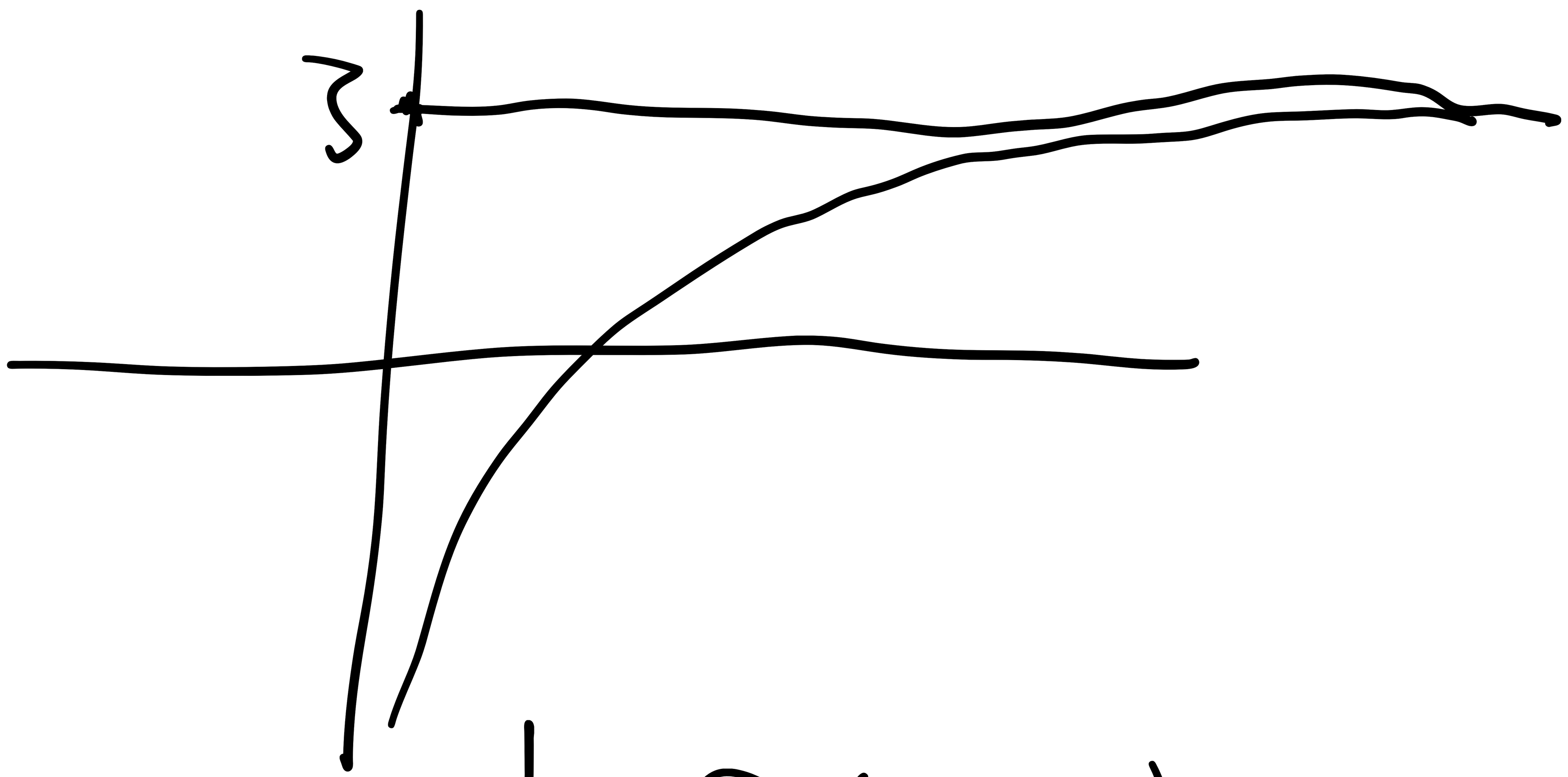
$\cancel{\|f_n - f\|_\infty}$

Ομοιόμορφη σύγκλιση

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f_n : A \to \mathbb{R}$ ακολ. συναρτ.

- Βρίσκουμε πρώτα το κατά σημείο όριο της f_n, έστω ότι $f_n \to f$ κ.σ
- Για την ομοιόμορφη σύγκλιση εξετάζουμε αν $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$
- Παίρνουμε την $|f_n(x) - f(x)|$ και παραγωγίζοντας (συνήθως) βρίσκουμε μονοτονία και

τα max της ή το sup της



$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

$S_n = \sum_{n=1}^{n} f_n(x)$

$B(x_0,\varepsilon) \subseteq A \quad \forall x_0 \in A$

Έστω ακολουθία στο A με $x_n \to x$ και θ.ν.δ.ό $x \in A$

οπότε $d(x_n, x_{n_0}) < \delta \quad \forall n \geq n_0$

Η υπόθεση λέει ~~το~~ ότι αν $x, y \in A$, $x \neq y$ τότε $\underline{d(x,y) \geq \delta}$

Αν $d(x_n, x_{n_0}) < \delta \Rightarrow x_n = x_{n_0}$ $\forall n \geq n_0$

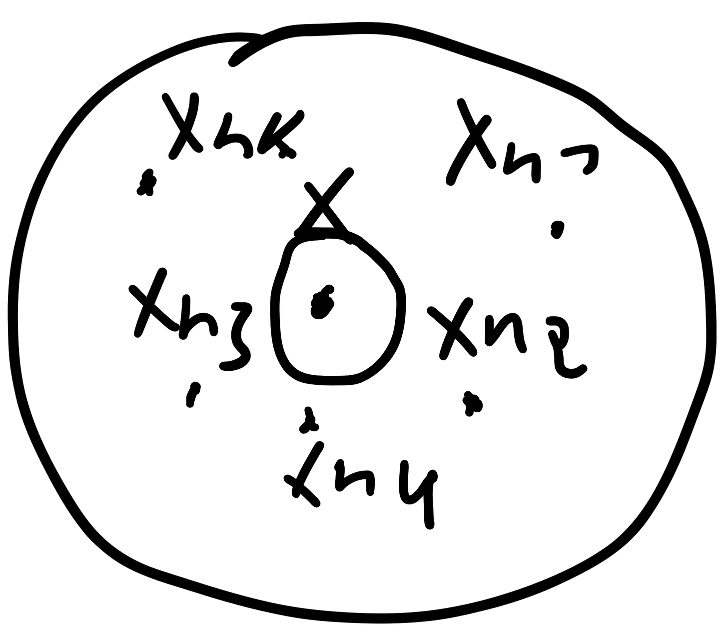
Άσκηση

Έστω (X,d) διαχωρίσιμος μ.χ χωρίς μεμονωμένα σημεία και $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο του X

α) Ν.δ.ό $\forall x \in X$ και $\forall \varepsilon > 0$ το $B(x,\varepsilon) \cap D$ είναι άπειρο.

Λύση

Έστω ότι $B(x,\varepsilon)\cap D = \{x_{n_1},\dots,x_{n_k}\}$ πεπερασμένο.



i) Περίπτωση 1: $x \notin D$

Τότε $x \neq x_{n_i}$ $\forall\, 1 \le i \le k$

Θεωρούμε $\rho = \min\{d(x, x_{n_i}) : 1 \le i \le k\}$

Τότε $0 < \rho < \varepsilon$

Αφού D πυκνό, τότε $D \cap B(x,\rho) \neq \emptyset$, δηλαδή υπάρχει $x_m \in D \cap B(x,\rho) \subseteq$
$\subseteq D \cap B(x,\varepsilon) = \{x_{n_1},\dots,x_{n_k}\} \Rightarrow$
$\Rightarrow x_m = x_{n_i}$ για κάποιο $1 \le i \le k$.
και αυτό είναι άτοπο, διότι $d(x_m, x) < \rho \le$
$\le d(x, x_{n_i})$

Περίπτωση 2: Αν $x \in D$.

Αφού το x δεν είναι μεμονωμένο σημείο, τότε το $B(x,\frac{\varepsilon}{2})$ είναι άπειρο σύνολο.

Επομένως υπάρχει $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \setminus D$, διότι

$$\underbrace{B(x,\tfrac{\varepsilon}{2})} = \left(\underbrace{B(x,\tfrac{\varepsilon}{2}) \cap D}\right) \cup \left(\underbrace{B(x,\tfrac{\varepsilon}{2}) \setminus D}\right)$$

και $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D \subseteq B(x, \varepsilon) \cap D$ που είναι πεπερασμένο, ενώ $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ άπειρο

<u>Ισχυρισμός</u>: $B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq B(x, \varepsilon)$

Πράγματι, αν $z \in B(y, \frac{\varepsilon}{2})$, τότε $d(z,x) \leq$

$$\leq d(z,y) + d(y,x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Άρα $z \in B(x, \varepsilon)$

Άρα τώρα $B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D \subseteq B(x,\varepsilon) \cap D$ που είναι πεπερασμένο $\rightarrow$ άτοπο λόγω περίπτωσης 1, διότι $y \notin D$.

β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $y_n \in X$ με

$d(y_n, x_n) < \frac{1}{n}$

Θέτουμε $E = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$

Ν.δ.ό πυκνό στον X

Λύση

Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Από α) ερώτημα το $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D$ είναι άπειρο σύνολο.

Τώρα αφού $\frac{1}{n} \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ να ισχύει ότι $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

Όμως, αφού το $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D$ είναι x_n άπειρο σύνολο, τότε υπάρχει $n \geq n_0$ ώστε $x_n \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D$ (διότι αλλιώς $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0 - 1}\}$ και θα ήταν πεπερασμένο)

Συνεπώς $d(y_n, x) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x) \leq$

$\leq \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, δηλαδή

$y_n \in B(x, \varepsilon)$. Οπότε $E \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$

Άρα E πυκνό

~~Έστω~~

Άσκηση

Έστω (X,d) μ.χ και $D\subseteq X$ πυκνό.
Αν κάθε βασική ακολουθία στοιχείων του D είναι συγκλίνουσα, τότε να δειχθεί ότι ο (X,d) είναι πλήρης.

Λύση

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία.
Τότε $\forall n\in\mathbb{N}$ $B(x_n,\frac{1}{n})\cap D\neq\emptyset$, δηλαδή υπάρχει $y_n\in D$ ώστε $d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$

Ισχυρισμός: Η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία

Πράγματι, έστω $\varepsilon>0$. Αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ ώστε $d(x_m,x_n)<\frac{\varepsilon}{3}$

$\forall m,n\geq n_1$.
Επίσης υπάρχει $n_2\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\geq n_2$ να ισχύει ότι $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{3}$

Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Τότε για $m,n\geq n_0$:
$d(y_m,y_n)\leq d(y_m,x_m)+d(x_m,x_n)+d(x_n,y_n)<$

$$< \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Άρα $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική.

Αφού $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική στο D. Άρα είναι συγκλίνουσα από υπόθεση. Άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $y_n \to x$.

Τότε $d(x_n, x) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x) \leq$

$$\leq \frac{1}{n} + d(y_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 + 0 = 0$$

Άρα $x_n \to x$ και είναι συγκλίνουσα

$G_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$, $G_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$, όπου U_n, V_n ανοιχτά

$G_1 \subseteq U_n$, $G_2 \subseteq V_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \overline{G_1} \subseteq \overline{U_n}$, $\overline{G_2} \subseteq \overline{V_n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{R} = \overline{U_n}$, $\mathbb{R} = \overline{V_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Άρα U_n, V_n πυκνά και ανοιχτά $\forall n \in \mathbb{N}$

$G_1 \cap G_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n \cap \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ και τα U_n, V_n είναι ανοιχτά και πυκνά.

Άρα από Baire I $G_1 \cap G_2$ πυκνό (και G_δ)

διότι $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ πλήρης

Άσκηση

Έστω $A = \{\overset{a_1}{0.1}, \overset{a_2}{0.18}, \overset{a_3}{0.181}, \overset{a_4}{0.1818}, \overset{a_5}{0.18181}, \overset{a_6}{0.181818}, \dots\}$

Να βρεθεί το $\sup A$.

$$\underset{\frac{18}{100}}{\overset{\|}{0.18}} + \underset{\frac{18}{100^2}}{\overset{\|}{0.0018}}$$

Λύση

Έχουμε ότι $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, όπου

$a_1 = 0.1$, $a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{18}{100^k}$, $a_{2n+1} = a_{2n} + \frac{1}{10^{2n+1}}$

Επίσης $a_{2n} = a_{2n-1} + \frac{8}{10^{2n}}$

Έστω $a = \sup A$.

Έχουμε ότι $a_{2n} \le a \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (1)

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{18}{100^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{18}{100^k} =$$

$$= 18 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{100^k} = 18 \, \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{18}{99}$$

Οπότε $\frac{18}{99} \le a$ παίρνοντας όρια για $n \to +\infty$.

Όμως $a_{2n} \nearrow \frac{18}{99} \Rightarrow a_{2n} \le \frac{18}{99} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

και $a_{2n-1} \le a_{2n} \Rightarrow a_{2n-1} \le \frac{18}{99} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Οπότε $a_n \le \frac{78}{99}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς $\sup A = a \le \frac{78}{99}$. Άρα τελικά $a = \frac{78}{99}$

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \not\to 0$$

$$\ge |f_n(x_0) - f(x_0)| = 1$$

(X,d) πλήρης

G_δ, F_σ

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ συνεχής

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{f^{-1}(\{q_n\})}_{\text{κλειστό}}$$

~~Αν (X,d) συμπαγής και (Y,ρ)~~

Αν (X,d) συμπαγής και (Y,ρ) μ.χ.

και $f : X \to Y$ συνεχής και επί

Τότε $\underbrace{Y = f(X)}$ συμπαγής

$f^{-1} : \cancel{Y} \to \cancel{X}$

Άσκηση

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα

Να δειχθεί ότι $\forall x \in X$ και $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι $\overline{B(x,\varepsilon)} = \hat{B}(x,\varepsilon)$

Λύση

Έχουμε ότι $B(x,\varepsilon) \subseteq \hat{B}(x,\varepsilon)$ και $\hat{B}(x,\varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο.

Άρα $\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \hat{B}(x,\varepsilon)$

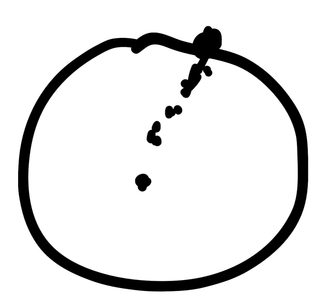
Έστω $y \in \hat{B}(x,\varepsilon)$. ~~Αν~~ Τότε $\|x-y\| \leq \varepsilon$

Αν $\|x-y\| < \varepsilon \Rightarrow y \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow y \in \overline{B(x,\varepsilon)}$

Έστω λοιπόν ότι $\|x-y\| = \varepsilon$

(Θέλουμε να βρούμε $y_n \in B(x,\varepsilon)$ ώστε $\|y_n - y\| \to 0$

Μπορούμε να ~~β~~ διαλέξουμε τα y_n ώστε $\|y_n - x\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\varepsilon$)



Θέτουμε $y_n = y - \frac{y-x}{n}$

Τότε $\|y_n - y\| = \left\|-\frac{y-x}{n}\right\| = \frac{\|y-x\|}{n} = \frac{\varepsilon}{n}$

$\xrightarrow{n\to\infty} 0$. Άρα $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$

Επίσης $\|y_n - x\| = \|y - x - \frac{y-x}{n}\| =$

$$= \|(1-\tfrac{1}{n})(y-x)\| = (1-\tfrac{1}{n})\|y-x\| = (1-\tfrac{1}{n})\varepsilon$$

$$\Rightarrow \|y_n - x\| = (1-\tfrac{1}{n})\varepsilon < \varepsilon$$

Άρα $y_n \in B(x,\varepsilon)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $y_n \to y$

$$\Rightarrow y \in \overline{B(x,\varepsilon)}$$