Άσκηση

Στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, έστω $D, G \subseteq \mathbb{R}$ ~~με~~ πυκνά και το G είναι ανοικτό.
Τότε $D \cap G$ είναι πυκνό.

Λύση

Έστω $U \neq \emptyset$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
Θ.δ.ο. $(D \cap G) \cap U \neq \emptyset$

Αφού G πυκνό, τότε $G \cap U \neq \emptyset$

Επομένως τώρα $G \cap U \neq \emptyset$ και ανοικτό ως τομή ανοικτών. Αφού επιπλέον D πυκνό, τότε $D \cap (G \cap U) \neq \emptyset \Leftrightarrow (D \cap G) \cap U \neq \emptyset$

Οπότε $D \cap G$ πυκνό

<u>Αντιπαράδειγμα</u>: Αν $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι

πυκνά, κανένα από αυτά δεν είναι ανοιχτό και $A \cap B = \emptyset$, που προφανώς δεν είναι πυκνό.

Άσκηση

Στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ πυκνό και F πεπερασμένο. Τότε το $A \setminus F$ είναι πυκνό.

Λύση

Έχουμε ότι $A \setminus F = A \cap F^c$
Τώρα A πυκνό και F^c ανοιχτό, διότι το F είναι πεπερασμένο και άρα κλειστό. Θα δείξουμε ότι F^c πυκνό και από προηγούμενη Άσκηση θα έχουμε το ζητούμενο.

Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Τότε $B(x, \varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ που είναι άπειρο σύνολο.
Αν ίσχυε ότι $B(x,\varepsilon) \cap F^c = \emptyset \Rightarrow B(x,\varepsilon) \subseteq F$
άτοπο αφού F πεπερασμένο

Άρα $B(x,\varepsilon)\cap F^c \neq \emptyset$ $\forall x\in\mathbb{R}$ και $\forall \varepsilon>0$

Οπότε και το F^c είναι πυκνό. ✓

$\underline{\mathbb{Q}=\{q_n : n\in\mathbb{N}\}}$, $G_1=\{q_{n_1},\dots,q_{5n}\}$

$G_n=\{q_1,\dots,q_n\}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n=\{q_1\}$

. $G_n=\mathbb{Q}\setminus\{q_n\}$

$\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n$: Έστω $x\in\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n$. Τότε $x\in\mathbb{Q}$.

Άρα $x=q_k$ για κάποιο $k\in\mathbb{N}$

Όμως, αφού $x\in\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n \Rightarrow x\in G_k=\mathbb{Q}\setminus\{q_k\}$

$\Rightarrow q_k=x\neq q_k$ → άτοπο

Άρα $\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n=\emptyset$

<u>Άσκηση</u>

Έστω (X,d), (Y,ρ) μ.χ, $f: X\to Y$ συνάρτηση

και $Gr(f)=\{(x,y)\in X\times Y : y=f(x)\}=$

$=\{(x,f(x)) : x\in X\}$

Αν ο Y είναι συμπαγής και $Gr(f)$ κλειστό υποσύνολο του $(X\times Y, \sigma)$, όπου σ μια μετρική γινόμενο, τότε f συνεχής.

Λύση

Έστω ότι f όχι συνεχής. Τότε υπάρχει $x\in X$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X ώστε $x_n \xrightarrow{d} x$, $f(x_n) \stackrel{\rho}{\not\to} f(x)$

Ισχυρισμός: Υπάρχει υπακολουθία $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ της $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ και $\varepsilon>0$ ώστε $\rho(f(x_{n_k}), f(x)) \geq \varepsilon \ \forall k\in\mathbb{N}$

Πράγματι, αφού $f(x_n) \stackrel{\rho}{\not\to} f(x)$, υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $\forall n\in\mathbb{N}$ να υπάρχει $N\geq n$ ώστε $\rho(f(x_N), f(x)) \geq \varepsilon \quad (*)$

Άρα για $n=1$, υπάρχει $n_1\geq 1$ ώστε $\rho(f(x_{n_1}), f(x)) \geq \varepsilon$

Για την επαγωγική υπόθεση, έστω ότι έχουμε βρει $n_1<n_2<\dots<n_k$ ώστε

$\rho(f(x_{n_i}), f(x)) \geq \varepsilon \quad \forall 1 \leq i \leq k$

Στην (*) θέτοντας $n = n_k + 1$, υπάρχει $n_{k+1} \geq n_k + 1$ ώστε $\rho(f(x_{n_{k+1}}), f(x)) \geq \varepsilon$

Τότε $n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$

Οπότε επαγωγικά ορίζουμε υπακολουθία $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ ώστε $\rho(f(x_{n_k}), f(x)) \geq \varepsilon$ $\forall k \in \mathbb{N}$

· Τώρα αφού Y συμπαγής και $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον Y, ~~τότε~~ υπάρχει υπακολ. $(f(x_{n_{k_m}}))_{m \in \mathbb{N}}$ και $y \in Y$ ώστε

$f(x_{n_{k_m}}) \xrightarrow{\rho} y$

Οπότε $(x_{n_{k_m}}, f(x_{n_{k_m}})) \xrightarrow{\sigma} (x, y)$, διότι σ μετρική γινόμενο και $(x_{n_{k_m}}, f(x_{n_{k_m}}))$ ανήκει στο $Gr(f)$ που είναι κλειστό.

Άρα $(x, y) \in Gr(f) \Rightarrow y = f(x)$.

Οπότε $f(x_{n_{k_m}}) \xrightarrow{\rho} f(x)$, άτοπο διότι $\rho(f(x_{n_{k_m}}), f(x)) \geq \varepsilon$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

Οπότε f συνεχής.

Άσκηση

Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ με

$f_n(x) = nxe^{-nx}$

i) Ν.δ.ό $f_n \to 0$ κ.σ

Λύση

• <u>Για $x=0$</u>: $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

• <u>Για $x>0$</u>: $f_n(x) = \dfrac{nx}{e^{nx}}$

Έχουμε ότι $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \dfrac{(n+1)x}{nx} \cdot \dfrac{e^{nx}}{e^{(n+1)x}} =$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)x}{x} \cdot \frac{1}{e^x} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{(1+0)x}{x} \cdot \frac{1}{e^x}$$

$$= \frac{1}{e^x} < 1 \text{, αφού } x>0$$

Άρα από κριτήριο λόγου $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Οπότε $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ κ.σ

ii) Εξετάστε αν $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$

<u>Λύση</u>

Έχουμε ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα $\iff$

$$\iff \|f_n - 0\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff \|f_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\iff \sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)} f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$f_n(x) = nx e^{-nx}, \quad x \geq 0$$

Οπότε $f_n'(x) = n e^{-nx} - n^2 x e^{-nx} =$

$$= n e^{-nx}(1 - nx) = n^2 e^{-nx}\left(\frac{1}{n} - x\right)$$

Άρα

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Οπότε $\sup_{x\in[0,+\infty)} f_n(x) = \max_{x\in[0,+\infty)} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) =$

$$= n \cdot \frac{1}{n} e^{-n\cdot\frac{1}{n}} = e^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} \neq 0$$

Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

iii) Να εξεταστεί αν $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$ $\forall a>0$

Λύση

Έστω $a>0$

$f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sup_{x\in[a,+\infty)} f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Αφού $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και $a>0$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\geq n_0$ $\frac{1}{n}<a$.

Τότε για $n\geq n_0$, από το ii) έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	0		$\frac{1}{n}$		a		$+\infty$
$f_n(x)$		$\nearrow$		$\searrow$			

Άρα $f_n \searrow [a,+\infty)$.

Οπότε $\sup\limits_{x\in[a,+\infty)} f_n(x) = f_n(a) = nae^{-na} =$

$= \frac{na}{e^{na}}$ $\forall n\geq n_0$. Στο i) δείξαμε ότι $\dfrac{nx}{e^{nx}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall x>0$.

Άρα για $n \geq n_0$ $\sup\limits_{x\in[a,+\infty)} f_n(x) = \dfrac{na}{e^{na}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Άρα $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$

<u>Άσκηση</u>

Αν (X,d) μ.χ. και $A,B \subseteq X$.

Να δειχθεί ότι $dist(A,B) = dist(\bar{A},\bar{B})$

<u>Λύση</u>

$dist(A,B) = \inf\{d(x,y) : x\in A, y\in B\}$

$dist(\bar{A},\bar{B}) = \inf\{d(x,y) : x\in \bar{A}, y\in \bar{B}\}$

$\{d(x,y) : x\in A, y\in B\} \subseteq \{d(x,y) : x\in \bar{A}, y\in \bar{B}\}$

$\overset{\inf}{\Rightarrow} dist(\bar{A},\bar{B}) \leq dist(A,B)$

Έστω $x\in\bar{A}, y\in\bar{B}$. Τότε υπάρχουν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο B ώστε

$x_n \xrightarrow{d} x$ και $y_n \xrightarrow{d} y$.

Τότε $d(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} d(x,y)$

Όμως $d(x_n, y_n) \geq dist(A,B)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}$ $d(x,y) \geq dist(A,B)$ και

αυτό ισχύει $\forall x \in \bar{A}$, $\forall y \in \bar{B}$.

Άρα $dist(\bar{A},\bar{B}) = \inf\{d(x,y) : x \in \bar{A}, y \in \bar{B}\} \geq$

$\geq dist(A,B)$

Οπότε τελικά $dist(\bar{A},\bar{B}) = dist(A,B)$