

## Πραγματική Ανάλυση

### Πτυχιακή Εξέταση

23 - 1 - 2026

#### Θέμα 1ο

(1 + 1 + 1 = 3 μον.)

Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος.

(α) Δώστε τον ορισμό του εσωτερικού  $A^\circ$  και της κλειστής θήκης  $\bar{A}$  ενός υποσυνόλου  $A$  του  $X$ .

(β) Αποδείξτε ότι, για κάθε  $A \subseteq X$  ισχύει  $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \bar{A}$ .

(γ) Έστω  $A, B \subseteq X$  με  $A \cap B = \emptyset$ . Αποδείξτε ότι  $\bar{A} \cap B^\circ = \emptyset$ .

#### Θέμα 2ο

(1, 5 + 1, 5 = 3 μον.)

(α) Αποδείξτε ότι ένας μετρικός χώρος  $(X, d)$  είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε αριθμήσιμο, κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του  $X$  είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος.

(β) **Σωστό ή Λάθος:** Εξετάστε αν είναι αληθής ή ψευδής καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(i) Κάθε φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  με άπειρο πλήθος στοιχείων έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο  $\mathbb{R}$ .

(ii) Αν το  $A \subset \mathbb{R}$  είναι αριθμήσιμο, τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσής του,  $A'$ , είναι το πολύ αριθμήσιμο.

#### Θέμα 3ο

(1, 5 + 1 + 0, 5 = 3 μον.)

(α) Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος και  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής αν και μόνο αν, για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$ , τα σύνολα  $\{x \in X : f(x) > a\}$  και  $\{x \in X : f(x) < b\}$  είναι ανοικτά.

(β) (i) Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος και  $A, B$  υποσύνολα του  $X$  με  $A$  συμπαγές,  $B$  κλειστό και  $A \cap B = \emptyset$ . Αποδείξτε ότι  $\text{dist}(A, B) > 0$ .

(ii) Δώστε παράδειγμα κλειστών συνόλων  $E, F$  σε κατάλληλο μετρικό χώρο  $X$  με  $E \cap F = \emptyset$  και  $\text{dist}(E, F) = 0$ .

#### Θέμα 4ο

(1, 5 + 1, 5 = 3 μον.)

(α) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση την ακολουθία συναρτήσεων  $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g_n(x) = x^n(1 - x)$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

(β) Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος και  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ακολουθία συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση  $f$ . Αποδείξτε ότι, για κάθε ακολουθία  $(x_n)$  στον  $X$  η οποία συγκλίνει σε ένα  $x \in X$ , ισχύει  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$ .

Καλή επιτυχία!