

Πραγματική Ανάλυση
Ενδιάμεση Εξέταση (25 Απριλίου 2026)

Θέμα 1ο.

(1 + 1 = 2 μον.)

Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

(α) Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με $\rho(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$, για κάθε $x, y \in X$, είναι μετρική στο σύνολο X .

(β) Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του X . Για κάθε $x \in X$, ορίζουμε $\text{dist}(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Αποδείξτε ότι: $\text{dist}(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

Θέμα 2ο.

(0, 6 + 0, 6 + 0, 8 = 2 μον.)

Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$ και τους υποχώρους του $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ με τη συνήθη μετρική.

(α) Περιγράψτε όλες τις συγκλίνουσες ακολουθίες του μετρικού χώρου $\mathbb{N}$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

(γ) Εξετάστε αν υπάρχει συνεχής και $1-1$ συνάρτηση $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$.

Θέμα 3ο.

(1 + 0, 5 + 1 = 2, 5 μον.)

Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

(α) Αν $A, B \subseteq X$, αποδείξτε ότι $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ και εξετάστε αν ισχύει κατ' ανάγκη $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(β) Αν τα D, E είναι πυκνά υποσύνολα του X , εξετάστε αν το $D \cap E$ είναι κατ' ανάγκη πυκνό.

(γ) Αν τα D, E είναι πυκνά υποσύνολα του X και το E είναι επιπλέον ανοικτό, αποδείξτε ότι το $D \cap E$ είναι πυκνό.

Θέμα 4ο.

(1, 5 + 1 + 1 = 3, 5 μον.)

(α) Αποδείξτε ότι: Αν το G είναι ένα ανοικτό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d) , $x \in G$ και η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x , τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$, ισχύει $B(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq G$.

(β) Αν οι ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ του μετρικού χώρου (X, d) είναι βασικές, αποδείξτε ότι η ακολουθία $(d(x_n, y_n))$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

(γ) Αποδείξτε ότι κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ έχει σημείο συσσώρευσης και στη συνέχεια, εξετάστε αν υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ με $A' = \emptyset$ και $(\mathbb{R} \setminus A)' = \emptyset$.

Θέμα 5ο.

(0, 7 + 1, 5 + 0, 8 = 3 μον.)

(α) Δώστε ένα παράδειγμα ακολουθίας $F_n, n = 1, 2, \dots$, κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα η $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ να μην είναι κλειστό σύνολο.

(β) Δίνεται μια ακολουθία $E_n, n = 1, 2, \dots$, κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subseteq [n, n+1]$. Έστω $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

(i) Αποδείξτε ότι αν μια ακολουθία (x_k) σημείων του E συγκλίνει, τότε υπάρχουν m και $k_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geq k_0$, $x_k \in E_{m-1} \cup E_m \cup E_{m+1}$.

(ii) Αποδείξτε ότι το σύνολο E είναι κλειστό.

Καλή επιτυχία!