

Πραγματική Ανάλυση - Εξέταση Σεπτεμβρίου 2025 (16-9-2025)

Θέμα 1ο.

((3 × 0, 7) + 0.9 = 3 μον.)

(α) Εξετάστε αν είναι Σωστή ή Λανθασμένη καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

(i) Αν (X, ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$, ισχύει $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(ii) Αν $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε το σύνολο $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ είναι κλειστό.

(iii) Οι μετρικοί χώροι $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ και $Y = \{1\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ (ως υπόχωροι του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική) είναι ομοιομορφικοί.

(β) Έστω $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με $A_n \subseteq [n, +\infty)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι κλειστό.

Θέμα 2ο.

(1+1+1=3 μον.)

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X . Ορίζουμε τη συνάρτηση $d_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ («απόσταση από το A ») ως εξής:

$$d_A(x) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A\}, \text{ για κάθε } x \in X$$

(α) Αποδείξτε ότι: $d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

(β) Αποδείξτε ότι, για κάθε $x, y \in X$ ισχύει η ανισότητα $d_A(x) \leq \rho(x, y) + d_A(y)$. Στη συνέχεια, δείξτε ότι η συνάρτηση d_A είναι Lipschitz συνεχής.

(γ) Για $A, B \subseteq X$, ορίζουμε

$$d(A, B) = \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Αν $A \cap B = \emptyset$, το A είναι κλειστό και το B συμπαγές, αποδείξτε ότι $d(A, B) > 0$.

Θέμα 3ο.

(1+1+1=3 μον.)

Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών θεωρούμε τη μετρική d που ορίζεται ως εξής:

$$d(n, m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|, \text{ για κάθε } n, m \in \mathbb{N}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η μετρική d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική ρ στο $\mathbb{N}$.

(Θεωρήστε δεδομένο ότι η d είναι μετρική.)

(β) Εξετάστε αν καθένας από τους χώρους $(\mathbb{N}, \rho)$ και $(\mathbb{N}, d)$ είναι πλήρης.

(γ) Εξετάστε αν ο μετρικός χώρος $(\mathbb{N}, d)$ είναι (i) φραγμένος, (ii) ολικά φραγμένος, (iii) συμπαγής.

Θέμα 4ο.

(1+1,5+0,5=3 μον.)

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, με

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

(α) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f \equiv 0$ και εξετάστε αν η σύγκλιση της (f_n) στην f είναι ομοιόμορφη στο $(0, +\infty)$.

(β) Αποδείξτε ότι σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$ συγκλίνει κατά σημείο στο $(0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0, +\infty)$, αλλά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, με $a > 0$.

(γ) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Καλή επιτυχία!