

Πραγματική Ανάλυση
Ενδιάμεση Εξέταση (17 - 5 - 2025)

Θέμα 1ο.

(1+1+1=3 μον.)

Σωστό ή Λάθος με αιτιολόγηση: Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή σε κάθε μετρικό χώρο (X, d) . Αν είναι σωστή, αποδείξτε την, διαφορετικά δώστε αντιπαράδειγμα.

- (1) Αν $A, G \subseteq X$ και το G είναι ανοικτό, τότε ισχύει η ισοδυναμία:
 $A \cap G \neq \emptyset \iff \bar{A} \cap G \neq \emptyset$.
- (2) Η απόσταση δύο συνόλων, $\text{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$, ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, δηλαδή ισχύει $\text{dist}(A, C) \leq \text{dist}(A, B) + \text{dist}(B, C)$, για κάθε $A, B, C \subseteq X$.
- (3) Αν $A \subseteq B \subseteq X$, τότε $\text{bd}(A) \subseteq \text{bd}(B)$.

Θέμα 2ο.

(1+1+1=3 μον.)

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$ με την ιδιότητα: Υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε, για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$, να ισχύει $d(x, y) \geq \delta$. Αποδείξτε ότι:

- (α) Το A είναι κλειστό σύνολο.
- (β) Αν το σύνολο A είναι άπειρο αριθμήσιμο, τότε ο υπόχωρος (A, d) είναι ομοιομορφικός με τον χώρο $(\mathbb{N}, |\cdot|)$.
- (γ) Αν το σύνολο A είναι υπεραριθμήσιμο, τότε ο χώρος (X, d) δεν είναι διαχωρίσιμος.

Θέμα 3ο.

(0,7+1,3+1=3 μον.)

(α) Στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^2$ βρείτε δύο κλειστά μη κενά και ξένα σύνολα A, B με την ιδιότητα $\text{dist}(A, B) = 0$.

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και A, B δύο κλειστά, μη κενά και ξένα υποσύνολα του X .

(i) (Θεωρία) Αποδείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \rightarrow [0, 1]$ με την ιδιότητα: $f(x) = 0$, για κάθε $x \in A$ και $f(x) = 1$, για κάθε $x \in B$.

(ii) Αν $\text{dist}(A, B) = 0$, αποδείξτε ότι η συνάρτηση f που βρήκατε στο (i) δεν είναι ομοιομορφα συνεχής.

Θέμα 4ο.

(1+1+1=3 μον.)

(α) Έστω $(X, \rho), (Y, d)$ μετρικοί χώροι. Αποδείξτε ότι κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ απεικονίζει βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες.

(β) Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη μετρική d με $d(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Αποδείξτε ότι η μετρική d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$.

(ii) Στον χώρο $(\mathbb{R}, d)$ βρείτε μια βασική ακολουθία, η οποία δεν συγκλίνει.

Καλή Επιτυχία!