

Πραγματική Ανάλυση
Τελική Εξέταση (2 Ιουλίου 2025)

Θέμα 1ο.

(1 + 1 + 1 = 3 μον.)

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι:

(i) Το A' (το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A) είναι κλειστό σύνολο.

(ii) Αν ο (Y, ρ) είναι μετρικός χώρος και η συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής, τότε $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Αν επιπλέον ο μετρικός χώρος X είναι συμπαγής, τότε $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

(β) Έστω $B = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{1\}$. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό της συμπαγείας, αποδείξτε ότι το σύνολο B είναι συμπαγές στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Θέμα 2ο.

(1 + 1 + 0,8 + 0,7 = 3,5 μον.)

(α) Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $\mathbb{Q}$ με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$. Βρείτε μια ακολουθία (G_n) ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{Q}$ με την ιδιότητα $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$.

(β) Εξετάστε αν υπάρχει μετρική d στο $\mathbb{Q}$, ισοδύναμη με τη συνήθη, τέτοια ώστε ο $(\mathbb{Q}, d)$ να είναι πλήρης.

(γ) Αποδείξτε ότι το διάστημα $I = (-1, 1)$, ως υπόχωρος του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης. Στη συνέχεια, βρείτε μια μετρική σ στο I , ισοδύναμη με τη συνήθη, ώστε ο μετρικός χώρος (I, σ) να είναι πλήρης.

(δ) Αποδείξτε ότι αν μια μετρική ρ στο διάστημα $J = [-1, 1]$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη, τότε ο χώρος (J, ρ) είναι πλήρης.

Θέμα 3ο.

(0,5 + 1 + 1 = 2,5 μον.)

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος.

(α) Πότε λέμε ότι ο μετρικός χώρος (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος;

(β) Υποθέτουμε ότι ο χώρος (X, ρ) δεν είναι ολικά φραγμένος. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ και μια ακολουθία (x_n) στον X , με την ιδιότητα: Για κάθε $n \neq m$ ισχύει $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$.

(γ) Έστω (x_n) η ακολουθία του ερωτήματος (β). Αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν έχει σημεία συσσώρευσης στον X .

Θέμα 4ο.

(0,5 + 0,7 + 0,8 + 1 = 3 μον.)

(α) Έστω $p > 0$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με: Για κάθε $n = 1, 2, \dots$

$$f_n(x) = n^p x e^{-nx^2}, \quad x \in [0, +\infty).$$

(i) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f \equiv 0$.

(ii) Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της (f_n) στην f είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα της μορφής $[a, +\infty)$, όπου $a > 0$.

(iii) Εξετάστε για ποιες τιμές του p η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$.

(β) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Αν κάθε g_n είναι ομοιόμορφα συνεχής στον X , αποδείξτε ότι και η g είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Καλή επιτυχία!