Πραγματική Ανάλυση - Εξέταση Σεπτεμβρίου 2024 (20-9-2024)

Θέμα 1ο (1+1+1=3 μον.)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A,B \subseteq X$.

(α) Αποδείξτε ότι $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, αλλά η ισότητα $(A\cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ δεν ισχύει γενικά.

(β) Αποδείξτε ότι το σύνολο A' των σημείων συσσώρευσης του A είναι κλειστό.

(γ) Έστω ότι υπάρχει $\delta > 0$, ώστε, για κάθε $x,y \in A$ με $x \neq y$, να ισχύει $\rho(x,y) \geq \delta$. Αποδείξτε ότι το σύνολο A είναι κλειστό. Αν επιπλέον το A είναι συμπαγές, τι συμπεραίνετε για το πλήθος των στοιχείων του; (Αιτιολογήστε.)

Θέμα 2ο (1+1+1=3 μον.)

(α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $\rho : X\times X \to [0,+\infty)$ με $\rho = \min\{d,1\}$. Θεωρώντας γνωστό ότι η ρ είναι μετρική στο X, αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος (X,ρ) είναι πλήρης αν και μόνο αν ο (X,d) είναι πλήρης.

(β) Εξετάστε αν υπάρχει μετρική σ στο $\mathbb{Q}$, ισοδύναμη με τη συνήθη, ώστε ο μετρικός χώρος $(\mathbb{Q},\sigma)$ να είναι πλήρης.

(γ) Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος, (Y,ρ) μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Έστω (E_n) μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X με $\operatorname{diam}(E_n) \to 0$. Αποδείξτε ότι $f\left(\bigcap_{n=1}^\infty E_n\right) = \bigcap_{n=1}^\infty f(E_n)$.

Θέμα 3ο (1+0,8+1,2=3 μον.)

(α) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Για οποιαδήποτε $A,B\subseteq X$ ορίζουμε

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{\rho(x,y) : x\in A,\ y\in B\}.$$

(α) Υποθέτουμε ότι τα $A,B \subseteq X$ είναι κλειστά με $A\cap B = \emptyset$ και ότι το A είναι επιπλέον συμπαγές. Αποδείξτε ότι $\operatorname{dist}(A,B) > 0$.

(β) Στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική, βρείτε δύο κλειστά σύνολα $E,F\subseteq \mathbb{R}^2$ με $E\cap F=\emptyset$ και $\operatorname{dist}(E,F)=0$.

(γ) Έστω $E,F\subseteq X$ δύο κλειστά σύνολα με $E\cap F=\emptyset$ και $\operatorname{dist}(E,F)=0$. Αποδείξτε ότι:

(i) Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X\to[0,1]$ με $f(x)=0$, για κάθε $x\in E$ και $f(x)=1$, για κάθε $x\in F$.

(ii) Η συνάρτηση f που βρήκατε στο (i) δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα 4ο (2+1=3 μον.)

(α) Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx},\ x\in(0,+\infty), n\in\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι:

(i) Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε μια συνάρτηση f στο διάστημα $(0,+\infty)$.

(ii) Για κάθε $a>0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο διάστημα $[a,+\infty)$.

(β) Έστω $g_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με την ιδιότητα, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $\|g_n\|_\infty \leq n^2$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{g_n(x)}{2^n}$ συγκλίνει και εξετάστε αν η συνάρτηση $g(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{g_n(x)}{2^n}$, $x\in\mathbb{R}$, είναι συνεχής.

Καλή επιτυχία!