Πραγματική Ανάλυση - Εξέταση Ιουνίου 2024 (17-6-2024)

Θέμα 1ο. (1+1+1=3 μον.)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.

(α) Αν $A \subseteq X$, αποδείξτε ότι $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$.

(β) (i) Έστω $x_0 \in X$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $X \setminus \{x_0\}$ είναι πυκνό στον X αν και μόνο αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του X.

(ii) Δώστε παράδειγμα ενός μετρικού χώρου που δεν έχει κανένα γνήσιο πυκνό υποσύνολο.

(γ) Έστω $A, B \subseteq X$ τέτοια ώστε το A να είναι κλειστό και $A^\circ = B^\circ = \emptyset$.
Αποδείξτε ότι $(A \cup B)^\circ = \emptyset$.

Θέμα 2ο. (1+1+1=3 μον.)

Σωστό ή λάθος με αιτιολόγηση:

(α) Υπάρχει μετρική d στο $\mathbb{R}$ ισοδύναμη με τη συνήθη ώστε ο $(\mathbb{R}, d)$ να μην είναι πλήρης;

(β) Υπάρχει μετρική σ στο $\mathbb{R}$ ισοδύναμη με τη συνήθη ώστε ο $(\mathbb{R}, \sigma)$ να είναι πλήρης και ολικά φραγμένος;

(γ) Αν οι (X,ρ) και (Y,d) είναι μετρικοί χώροι και η $f : X \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, τότε η f απεικονίζει κάθε ολικά φραγμένο υποσύνολο του X σε ολικά φραγμένο υποσύνολο του Y;

Θέμα 3ο. (1,5+0,5+1=3 μον.)

(α) Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \neq x_m$ για κάθε $n \neq m \in \mathbb{N}$. Αν η (x_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy, αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει τουλάχιστον δύο σημεία συσσώρευσης.

(β) Ισχύει το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) αν ο X δεν υποτεθεί συμπαγής;

(γ) Αν (L_n) είναι μια ακολουθία ευθειών στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$, αποδείξτε ότι το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ δεν περιέχει κανένα δίσκο.

Θέμα 4ο. (2+1=3 μον.)

(α) Δίνεται η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}, \quad x \in (0,+\infty).$$

(i) Εξετάστε αν η σειρά συγκλίνει (1) κατά σημείο, (2) ομοιόμορφα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

(ii) Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[a,+\infty)$.

(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία συναρτήσεων και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση f_n είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι φραγμένη και ότι η ακολουθία (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Καλή επιτυχία!