

Πραγματική Ανάλυση - Ενδιάμεση Εξέταση

10 - 12 - 2022

Θέμα 1ο.

Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

(α) Εξετάστε αν καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(i) Για κάθε $A, B \subseteq X$ ισχύει $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(ii) Για κάθε $A, B \subseteq X$ ισχύει $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(β) Αν $A, B \subseteq X$ με $A \cap B = \emptyset$, δείξτε ότι $A^\circ \cap \overline{B} = \emptyset$.

Θέμα 2ο.

(α) Έστω A ένα αριθμήσιμο σύνολο και δ η διακριτή μετρική στο A . Θεωρούμε ακόμη τα σύνολα \mathbb{N} και $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ως υποχώρους του \mathbb{R} με τη συνήθη μετρική. Αποδείξτε ότι:

(i) Κάθε $1-1$ και επί συνάρτηση $f : (A, \delta) \rightarrow (\mathbb{N}, |\cdot|)$ είναι ομοιομορφισμός.

(ii) Οι μετρικοί χώροι (A, δ) και $(B, |\cdot|)$ δεν είναι ομοιομορφικοί.

(β) Εξετάστε αν καθένας από τους μετρικούς χώρους $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |\cdot|)$ και $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \delta)$ είναι διαχωρίσιμος. Στην περίπτωση που κάποιος από αυτούς είναι διαχωρίσιμος, βρείτε ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του.

Θέμα 3ο.

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία Cauchy στον X . Αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει το πολύ ένα σημείο συσσώρευσης.

(β) Στο \mathbb{R} θεωρούμε τη μετρική d με $d(x, y) = |e^x - e^y|$ και τη συνήθη μετρική ρ με $\rho(x, y) = |x - y|$.

(i) Αποδείξτε ότι οι μετρικές d και ρ είναι ισοδύναμες.

(ii) Αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος (\mathbb{R}, d) δεν είναι πλήρης.

Θέμα 4ο.

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X . Για κάθε $x \in X$, ορίζουμε

$$d_A(x) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) $d_A(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.

(β) Η συνάρτηση $d_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Ένα $G \subseteq X$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $G = f^{-1}((0, +\infty))$.

Τα 4 θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και έχουν συνολική αξία 12 μονάδες.

Καλή επιτυχία!