Πραγματική Ανάλυση Ιούνιος 2021

18 Ιουνίου 2021

1ο Κλιμάκιο

Θέμα 1.

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$ με την ιδιότητα: υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$, να ισχύει $d(x, y) \geq \delta$. Αποδείξτε ότι το A είναι κλειστό στον X.

(β) Εξετάστε αν υπάρχει $B \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: κάθε $x \in B$ είναι μεμονωμένο σημείο του B, αλλά το B δεν είναι κλειστό.

Θέμα 2.

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X. Αν κάθε ακολουθία Cauchy στοιχείων του D συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του X, αποδείξτε ότι ο X είναι πλήρης.

(β) Αν τα C_1, C_2 είναι πυκνά και G_δ υποσύνολα του $\mathbb{R}$, είναι σωστό ότι το $C_1 \cap C_2$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 3.

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία Cauchy στον X.

(i) Αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο.

(ii) Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε ένα $x \in X$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συμπάγειας, αποδείξτε ότι το σύνολο $B = \{x\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές.

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και K, F υποσύνολα του X με $K \cap F = \emptyset$.
Αν το K είναι συμπαγές και το F είναι κλειστό, αποδείξτε ότι $\mathrm{dist}(K, F) > 0$ (όπου $\mathrm{dist}(K, F) = \inf\{d(x, y) | \ x \in K, \ y \in F\}$).

Θέμα 4.

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $g_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, με

$$g_n(x) = \frac{x}{x+n}, \ \ x \in [0, +\infty),$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(i) Δείξτε ότι η ακολουθία (g_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση g. Ποια είναι η g;

(ii) Δείξτε ότι ισχύει

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\lim_{n \to \infty} g_n(x) \right) \neq \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to +\infty} g_n(x) \right)$$

(iii) Εξετάστε αν η σύγκλιση της (g_n) στην g είναι ομοιόμορφη.

Διάρκεια εξέτασης: 90 λεπτά. Τα 4 θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

Καλή Επιτυχία