Πραγματική Ανάλυση – Τετάρτη 18 Σεπτεμβρίου 2019

1. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και A,B μη κενά υποσύνολα του X. Αποδείξτε ότι: (i) το εσωτερικό A° του A είναι ανοικτό σύνολο, (ii) αν $A\subseteq B$ τότε $A^\circ \subseteq B^\circ$, και (iii) $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
(β) Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ και $x_0\in X$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στον X με $x_n \xrightarrow{d} x_0$, η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι σ-συγκλίνουσα. [*Υπόδειξη:* Μπορείτε, αν θέλετε, να αποδείξετε και να χρησιμοποιήσετε την εξής παρατήρηση: αν $x_n\to x_0$ και $z_n\to x_0$ τότε η ακολουθία $x_1,z_1,x_2,z_2,x_3,z_3,\ldots$ συγκλίνει κι αυτή στο x_0.]

2. Εξετάστε αν ισχύει καθένα από τα επόμενα (αιτιολογήστε την απάντηση σας):

(α) Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{N}\to(Y,\sigma)$ είναι συνεχής.

(β) Αν η $f:\mathbb{R}\to(Y,\delta)$ είναι συνεχής, όπου δ είναι η διακριτή μετρική στο Y, τότε η f είναι σταθερή.

(γ) Αν η $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ είναι 1-1 τότε η f δεν είναι συνεχής.

3. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και E,F μη κενά κλειστά υποσύνολα του X με $E\cap F=\emptyset$. Αν το E είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι $\operatorname{dist}(E,F)>0$. [Υπενθυμίζεται ότι $\operatorname{dist}(E,F)=\inf\{d(x,y): x\in E, y\in F\}$.]
(β) Δώστε παράδειγμα κλειστών συνόλων $E,F\subseteq\mathbb{R}^2$ με $E\cap F=\emptyset$ και $\operatorname{dist}(E,F)=0$.
(γ) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και E,F μη κενά κλειστά υποσύνολα του X με $E\cap F=\emptyset$ και $\operatorname{dist}(E,F)=0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:(X,d)\to[0,1]$ τέτοια ώστε $f\equiv 0$ στο E και $f\equiv 1$ στο F. Αποδείξτε επίσης ότι η f δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4. (α) Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ συνεχής και επί συνάρτηση τέτοια ώστε $d(x,y)\leqslant\sigma(f(x),f(y))$ για κάθε $x,y\in X$.

(i) Αν ο (X,d) είναι πλήρης, είναι ο (Y,σ) απαραίτητα πλήρης;

(ii) Αν ο (Y,σ) είναι πλήρης, είναι ο (X,d) απαραίτητα πλήρης;

(β) Έστω d μετρική στο $\mathbb{Q}$ η οποία είναι ισοδύναμη με την συνήθη. Αποδείξτε ότι ο $(\mathbb{Q},d)$ δεν είναι πλήρης.

5. (α) Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $x_0\in X$. Αν για κάθε $\varepsilon>0$ το σύνολο $X\setminus B(x_0,\varepsilon)$ είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι ο (X,d) είναι συμπαγής.

6. (α) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.
(β) Θεωρούμε την σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Αποδείξτε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[-M,M]$, όπου $M>0$ (σε ποια συνάρτηση;). Είναι η σύγκλιση της σειράς ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$;

Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και έχουν συνολική αξία δώδεκα μονάδες.

Καλή Επιτυχία!