Πραγματική Ανάλυση – Παρασκευή 28 Ιουνίου 2019

1. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι:

(α) $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$.

(β) $\partial(A) = \emptyset$ αν και μόνο αν το A είναι ταυτοχρόνως ανοικτό και κλειστό σύνολο.

(γ) Αν για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$ ισχύει $d(x,y) \geqslant 1$ τότε το A είναι κλειστό σύνολο.

(2 μον.)

2. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και G_1, G_2 ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X. Αποδείξτε ότι το $G_1 \cap G_2$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

(β) Έστω (X,d) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $N \geqslant 1$ και $z_1, \ldots, z_N \in D$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{k=1}^{N} B(z_k, \varepsilon)$. **(2 μον.)**

3. (α) Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$ (τους φυσικούς), $A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ και $B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ως μετρικούς χώρους με τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$. Εξετάστε αν (i) οι μετρικοί χώροι $\mathbb{N}$ και A είναι ομοιομορφικοί, (ii) οι μετρικοί χώροι $\mathbb{N}$ και B είναι ομοιομορφικοί.

(β) Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$. Το γράφημα της f είναι το σύνολο $\Gamma(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in X\big\} \subseteq X \times Y$. Θεωρούμε μια μετρική γινόμενο στο $X \times Y$. Αποδείξτε ότι αν ο Y είναι συμπαγής και το $\Gamma(f)$ είναι κλειστό, τότε η f είναι συνεχής. **(2 μον.)**

4. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος με την εξής ιδιότητα: κάθε κλειστό σύνολο $F \subseteq X$ με $\operatorname{diam}(F) \leqslant 1$ είναι συμπαγές. Αποδείξτε ότι ο (X,d) είναι πλήρης.

(β) Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος που δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Αποδείξτε ότι το σύνολο X είναι υπεραριθμήσιμο. **(2 μον.)**

5. (α) Έστω (K,d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε πλήρως ότι το σύνολο $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και κατόπιν ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή.

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος, K συμπαγές υποσύνολο του X και U ανοικτό υποσύνολο του X, τέτοια ώστε $K \subseteq U$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$K_\delta := \{y \in X : \operatorname{dist}(y, K) < \delta\} \subseteq U,$$

όπου dist είναι η συνάρτηση απόστασης. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την συνάρτηση $f : (K,d) \to \mathbb{R}$ με $f(y) = \operatorname{dist}(y, X \setminus U)$.] **(2 μον.)**

6. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \to \mathbb{R}$. Αν οι f_n είναι συνεχείς συναρτήσεις και $f_n \to f$ ομοιόμορφα, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις ακολουθίες συναρτήσεων:

(i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$.

(ii) $g_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $g_n(x) = \sqrt{n}\, x e^{-nx^2}$.

(2 μον.)

Καλή Επιτυχία!