ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

20/06/2017

ΘΕΜΑ 1. (α) Εστω (X,ρ), (Y,σ) μετρικοί χώροι και $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{\rho(x_1,x_2),\sigma(y_1,y_2)\}$, για κάθε $x_1,x_2 \in X$ και $y_1,y_2 \in Y$. Να δείξετε ότι η d είναι μετρική στο $X \times Y$ και να εξετάσετε αν είναι μετρική-γινόμενο.

(β) Εστω $(E,\|\,\|)$ χώρος με νόρμα. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in E$ και $r > 0$, $\mathrm{diam}(B(x,r)) = 2r$. Ισχύει αυτό σε τυχαίο μετρικό χώρο;

ΘΕΜΑ 2. Εστω (X,d) μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A,B \subseteq X$. Να δείξετε ότι:

(α) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A^o \cap \overline{B} = \emptyset$.

(β) $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$.

(γ) A ανοιχτό $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A^c$.

(δ) $\mathrm{dist}(A,B) = \mathrm{dist}(\overline{A},\overline{B})$.

ΘΕΜΑ 3. Εστω (X,ρ), (Y,σ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$. Να δείξετε ότι:

(α) Αν f συνεχής, τότε το γράφημα $Gr(f) = \{(x,f(x)) : x \in X\}$ είναι κλειστό ως προς οποιαδήποτε μετρική-γινόμενο του $X \times Y$. Ισχύει το αντίστροφο;

(β) Αν $K \subseteq X$ φραγμένο και f Lipschitz-συνεχής, τότε $f(K)$ φραγμένο.

(γ) f συνεχής $\Leftrightarrow \forall A \subseteq X : f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

ΘΕΜΑ 4. Εστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ ομοιομορφισμός. Εξετάστε αν αληθεύουν οι επόμενες προτάσεις:

(α) (X,ρ) συμπαγής $\Leftrightarrow (Y,\sigma)$ συμπαγής.

(β) (X,ρ) πλήρης $\Leftrightarrow (Y,\sigma)$ πλήρης.

(γ) (X,ρ) ολικά φραγμένος $\Leftrightarrow (Y,\sigma)$ ολικά φραγμένος.

(δ) (X,ρ) διαχωρίσιμος $\Leftrightarrow (Y,\sigma)$ διαχωρίσιμος.

ΘΕΜΑ 5. (α) Εστω (X,ρ), (Y,σ) μετρικοί χώροι και d μετρική-γινόμενο στον $X \times Y$. Εξετάστε αν ισχύει η ισοδυναμία: $(X \times Y, d)$ συμπαγής $\Leftrightarrow (X,\rho)$ και (Y,σ) συμπαγείς.

(β) Εστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής. Να δείξετε ότι αν (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$, τότε

$$f\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n).$$

ΘΕΜΑ 6. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεν $f_n(t) = \frac{1}{n^2}e^{-n^2t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια f.

(β) Εξετάστε αν $f_n' \to f'$ ομοιόμορφα.

(γ) Εξετάστε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Καλή Επιτυχία!!!