ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

23 Σεπτεμβρίου 2016

1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $A, B, D \subseteq X$.

(α) Αποδείξτε ότι $x \in \overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \in A$ για κάθε n και $x_n \longrightarrow x$.

(β) Αν τα A και B είναι μη κενά, αποδείξτε ότι $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$ (όπου $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$).

(γ) Αν το D είναι πυκνό υποσύνολο του X αποδείξτε ότι $\overline{D \cap G} = \overline{G}$ για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$.

2. (α) Αν A και B είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι το σύνολο $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ είναι συμπαγές.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν η f είναι φραγμένη και έχει κλειστό γράφημα τότε είναι συνεχής.

3. (α) Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν ο X είναι συμπαγής τότε για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

(β) Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση Lipschitz $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και ότι η συνάρτηση $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά όχι Lipschitz.

4. (α) Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X ώστε το $X \setminus D$ να είναι επίσης πυκνό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον ένα από τα D και $X \setminus D$ δεν είναι G_δ στο X.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών δεν είναι G_δ στο $\mathbb{R}$.

(γ) Είναι η αριθμήσιμη ένωση G_δ συνόλων G_δ σύνολο;

5. Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση επί. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

(α) Αν ο X είναι συμπαγής, τότε ο Y είναι συμπαγής.

(β) Αν ο X είναι φραγμένος, τότε ο Y είναι φραγμένος.

(γ) Αν ο X είναι ολικά φραγμένος και η f ομοιόμορφα συνεχής, τότε ο Y είναι ολικά φραγμένος.

6. (α) Έστω $(X, d), (Y, \sigma)$ μετρικοί χώροι και $f_n, f : X \to Y$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx + 1}.$$

Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο και βρείτε την οριακή συνάρτηση f. Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha > 0$ η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[\alpha, \infty)$ αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[0, \alpha]$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες

Καλή Επιτυχία!