Πραγματική Ανάλυση – Τελική Εξέταση
4 Φεβρουαρίου 2013

1. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$.

(β) Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ (με $\partial(A)$ συμβολίζουμε το σύνορο του A).

(γ) Έστω $A \subseteq X$. Δείξτε ότι $\partial(A) = \emptyset$ αν και μόνο αν το A είναι ταυτοχρόνως ανοικτό και κλειστό σύνολο.

(2 μον.)

2. (α) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι: για κάθε $x \in X$ και για κάθε $r > 0$ ισχύει $\widehat{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$, όπου $\widehat{B}(x,r) = \{y \in X : \|y - x\| \leq r\}$. Ισχύει το ίδιο σε κάθε μετρικό χώρο;

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $G \subseteq X$. Αποδείξτε ότι: το G είναι ανοικτό αν και μόνο αν για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$.

(2 μον.)

3. (α) Έστω $f : (X,d) \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ τα σύνολα $\{x \in X : f(x) < a\}$ και $\{x \in X : f(x) > b\}$ είναι ανοικτά.

(β) Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ως μετρικούς χώρους με την συνήθη μετρική. Εξετάστε (α) αν οι δύο χώροι είναι πλήρεις και (β) αν οι δύο χώροι είναι ομοιομορφικοί.

(2 μον.)

4. (α) Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής και επί απεικόνιση. Αν D είναι πυκνό υποσύνολο του X, αποδείξτε ότι το $f(D)$ είναι πυκνό υποσύνολο του Y.

(β) Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και έστω E πυκνό και G_δ–υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι για κάθε ομοιομορφισμό $g : X \to X$ ισχύει $E \cap g(E) \neq \emptyset$.

(2 μον.)

5. (α) Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Αν ο X είναι συμπαγής, αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f : X \to X$ συνεχής. Ορίζουμε μια ακολουθία υποσυνόλων του X ώς εξής: $K_1 = X$ και $K_{n+1} = f(K_n)$ για κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι η $\{K_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X. Αν $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, αποδείξτε ότι $K \neq \emptyset$ και $f(K) = K$.

(2 μον.)

6. (α) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, όπου

$$f_n(x) = x^n \qquad \text{και} \qquad g_n(x) = x^n(1-x).$$

(β) Εξετάστε για ποιά $x \geq 0$ συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Για ποιές τιμές του $a > 0$ είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο διάστημα $[0,a]$;

(2 μον.)

Καλή Επιτυχία!