Πραγματική Ανάλυση (2011–12)

17 Φεβρουαρίου 2012

Θέμα 1. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

(α) Αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του X τότε για κάθε πυκνό υποσύνολο D του X ισχύει $x_0 \in D$.

(β) Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X με $d(x_n, x_m) \geq 1$ για κάθε $n \neq m$ στο $\mathbb{N}$, τότε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(2μ)

Θέμα 2. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω G ανοικτό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι

$$(*) \qquad \text{για κάθε } A \subseteq X \quad \text{ισχύει} \quad G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}.$$

Είναι σωστό ότι κάθε $G \subseteq X$ το οποίο ικανοποιεί την $(*)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X;

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $f : X \to X$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f \circ f = f$. Δείξτε ότι το $f(X)$ είναι κλειστό.

(2μ)

Θέμα 3. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι αν μια βασική ακολουθία (x_n) στον X έχει υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$, τότε $x_n \to x$.

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ η κλειστή μπάλα $\widehat{B}(x,1)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(2μ)

Θέμα 4. (α) Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών θεωρούμε την μετρική $\rho(m,n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$. Δείξτε ότι ο $(\mathbb{N}, \rho)$ δεν είναι πλήρης.

(β) Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και έστω E πυκνό και G_δ–υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι για κάθε ομοιομορφισμό $f : X \to X$ ισχύει $E \cap f(E) \neq \emptyset$.

Υπόδειξη. Δείξτε πρώτα ότι αν D είναι πυκνό υποσύνολο του X τότε το $f(D)$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

(2μ)

Θέμα 5. (α) Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: αν K είναι συμπαγές υποσύνολο του X τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

(β) Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν ο X είναι συμπαγής τότε για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

(2μ)

Θέμα 6. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$. Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-nx}.$$

Δείξτε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$. Εξετάστε αν $f_n \to 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a,\infty)$, $a > 0$.

(2μ)

Καλή Επιτυχία!