23/12/21

Κατά Σημείο και Ομοιόμορφη Σύγκλιση

Έστω $f_n, f : (X,d) \to \mathbb{R}$

- $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f \overset{o\rho\sigma}{\iff} \forall x \in X \quad f_n(x) \to f(x)$
- $f_n \xrightarrow{o\mu.} f \overset{o\rho\sigma}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ \forall x \in X \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
  $\iff \|f_n - f\|_\infty \to 0.$

όπου $\|h\|_\infty = \sup\{ |h(x)| : x \in X \}$

Ομοιόμορφη Σύγκλιση & Πράξεις

Λήμμα

$$\left.\begin{aligned} &\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ &\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty \end{aligned}\right\} \text{ η } \|\cdot\|_\infty \text{ είναι νόρμα}$$

$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$

Πρόταση

$f_n, f, g_n, g : (X,d) \to \mathbb{R} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Έστω ότι $f_n \xrightarrow{o\mu.} f$ και $g_n \xrightarrow{o\mu.} g$

(α) $\lambda f_n + \mu g_n \xrightarrow{o\mu.} \lambda f + \mu g$

(β) Δεν ισχύει γενικά ότι $f_n g_n \xrightarrow{o\mu.} fg$

(γ) Αν οι (f_n), (g_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένες, τότε $f_n g_n \xrightarrow{o\mu.} f \cdot g$

Απόδειξη: (α) $\|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\|_\infty = \|\lambda (f_n - f) + \mu (g_n - g)\|_\infty$
$\leq \|\lambda (f_n - f)\|_\infty + \|\mu (g_n - g)\|_\infty = |\lambda| \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{0} + |\mu| \underbrace{\|g_n - g\|}_{0} \to 0$

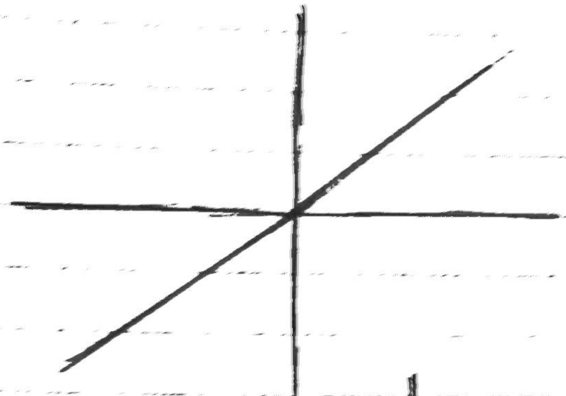
(γ) Αφού οι (f_n), (g_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένες, $\exists M, N > 0$ τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|f_n\|_\infty \leq M$ και $\|g_n\|_\infty \leq N$.

Γράφουμε $\|f_n g_n - fg\|_\infty = \|f_n (g_n - g) + g_n (f_n - f)\|_\infty \leq$
$\leq \|f_n (g_n - g)\|_\infty + \|g_n (f_n - f)\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_\infty$
$\leq \underbrace{M}_{\sigma\tau\alpha\theta.} \underbrace{\|g_n - g\|_\infty}_{0} + \underbrace{\|g\|_\infty}_{\sigma\tau\alpha\theta.} \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{0} \to 0.$

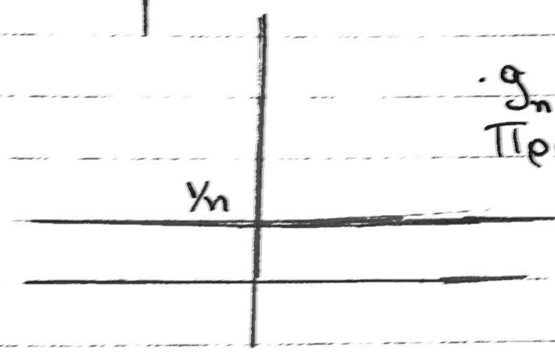
Σημείωση: Μάλιστα για την απόδειξη αρκεί η μία από τις (f_n), (g_n) να είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

$\forall x \in X \quad |f(x)| = \lim |\underbrace{f_n(x)}_{\leq M}| \leq M$,
δηλ. $\|f\|_\infty \leq M$. Ομοίως $\|g\|_\infty \leq N$

(β) $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x$, $g_n(x) = \frac{1}{n}$



• $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$, όπου $f(x) = x$
Πράγματι, $\|\underbrace{f_n - f}_{0}\|_\infty = 0 \to 0$

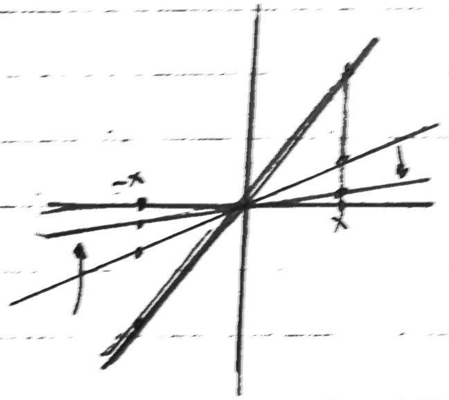


• $g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g$, όπου $g(x) \equiv 0$
Πράγματι, $\|\underbrace{g_n - g}_{\text{η σταθερή συνάρτηση } \frac{1}{n}}\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$

Έχουμε $(f_n g_n)(x) = f_n(x) g_n(x) = x \cdot \frac{1}{n} = \frac{x}{n}$.

Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε ότι $f_n g_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$

Όμως, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη:



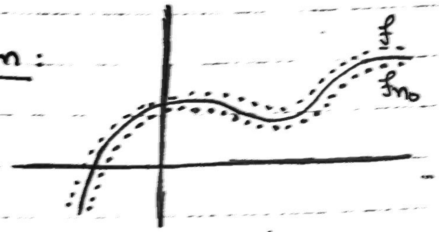
$\|f_n g_n - 0\|_\infty = \left\|\frac{x}{n}\right\|_\infty = \sup\left\{\frac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R}\right\} = +\infty \not\to 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(13) $f_n, f : (X,d) \to (Y,\sigma)$, $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$.

Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη:



Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall x \in X$

$\sigma\left(f_{n_0}(x), f(x)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$. $(*)$

Η f_{n_0} είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. $\forall x, y \in X$ με $d(x,y) < \delta$ ισχύει $\sigma\left(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)\right) \overset{(**)}{<} \frac{\varepsilon}{3}$

Έστω $x, y \in X$ με $d(x,y) < \delta$. Τότε,

$$\sigma(f(x), f(y)) \le \sigma\left(f(x), f_{n_0}(x)\right) + \sigma\left(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)\right) + \sigma\left(f_{n_0}(y), f(y)\right) \overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{3} \overset{(**)}{+} \frac{\varepsilon}{3} \overset{(*)}{+} \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

(21) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς, $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ για κάποια $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Ν.δ.ο. $\displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt$.

Ισχύει το ίδιο αν η σύγκλιση είναι κατά σημείο;

Λύση: Αφού οι f_n συνεχείς και $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ έχουμε ότι και η f είναι συνεχής.

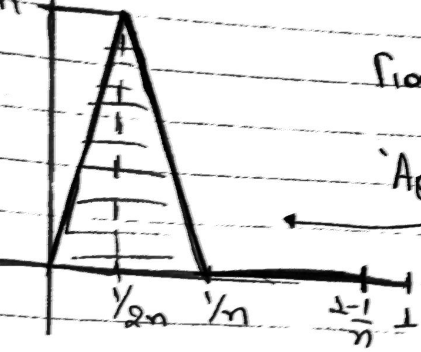
Έχουμε
$$\left| \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt \right| = \left| \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt - \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(t)\,dt - \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(t)\,dt \right|$$

$$\le \left| \int_0^{1-\frac{1}{n}} \left(f_n(t) - f(t)\right) dt \right| + \left| \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(t)\,dt \right|$$

$$\le \int_0^{1-\frac{1}{n}} \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{\le \|f_n - f\|_\infty}\,dt + \int_{1-1/n}^1 \underbrace{|f(t)|}_{\|f\|_\infty}\,dt$$

$$\le \|f_n - f\|_\infty \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \|f\|_\infty \cdot \frac{1}{n} \le \underset{\downarrow\, 0}{\|f_n - f\|_\infty} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{\|f\|_\infty}{n}} \longrightarrow 0$$

<u>Παράδειγμα</u>



Για $n \geq 2$ έχουμε $\frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Άρα $\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot n = \frac{1}{2}$

Όμως, $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} 0$ και $\int_0^1 0\,dt = 0$

---

(5) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$
<u>Ν.δ.ο.</u> $f_n \xrightarrow{o\mu} f$.

$$\boxed{\begin{array}{l} |f_n(x) - f(x)| \\ \quad \parallel \\ \left|f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon \\ \qquad\qquad\qquad\quad ; \ \forall x \end{array}}$$

<u>Λύση</u>: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ με $|x - y| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. $(*)$

Επιλέγουμε n_0 : $\frac{1}{n_0} < \delta$. Τότε $\forall n \geq n_0$ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$

• Έστω <u>$n \geq n_0$</u> και <u>$x \in \mathbb{R}$</u>. Παρατηρούμε ότι:

$$\Big|\underbrace{\left(x + \frac{1}{n}\right)}_{y} - x\Big| = \frac{1}{n} < \delta \xrightarrow{(*)} \left|f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon$$

δηλ. $\underline{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}$

---

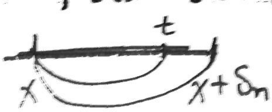
(39) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και (δ_n) ακολουθία θετικών αριθμών με $\delta_n \to 0$. Ορίζουμε

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t)\,dt .$$

Ν.δ.ο. $f_n \xrightarrow{o\mu.} f$.

<u>Λύση</u>: Γράφουμε $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t)\,dt - \overbrace{\frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(x)\,dt}^{f(x)}\right|$

$$\leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} |f(t) - f(x)|\,dt \quad (*)$$



Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists\delta>0$ τ.ω. αν $u,v\in\mathbb{R}$ και $|u-v|<\delta \Longrightarrow |f(u)-f(v)|<\varepsilon$.

Αφού $\delta_n \longrightarrow 0$ $\exists n_0 : \forall n\geq n_0 \quad 0<\delta_n<\delta$.

• Έστω $n\geq n_0$ και $x\in\mathbb{R}$. Τότε $|f_n(x)-f(x)| \underset{(*)}{\leq} \dfrac{1}{\delta_n}\displaystyle\int_x^{x+\delta_n} |f(t)-f(x)|\,dt$

Όμως, $\forall t\in[x,x+\delta_n]$ έχουμε $|t-x|\leq \delta_n<\delta \Longrightarrow |f(t)-f(x)|<\varepsilon$.

Άρα, $|f_n(t)-f(x)| \leq \dfrac{1}{\delta_n}\displaystyle\int_x^{x+\delta_n} \varepsilon\, dt = \dfrac{1}{\cancel{\delta_n}}\cdot\varepsilon\cdot\cancel{\delta_n}$.

Δηλ. $\forall n\geq n_0 \quad \|f_n-f\|_\infty \leq \varepsilon$. Άρα, $\|f_n-f\|_\infty \longrightarrow 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$

(37) $f_n:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f_n(x)=nxe^{-\sqrt{n}\,x}$

(α) $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$, αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$

(β) Εξετάστε αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} 0$ σε κάθε διάστημα $[a,+\infty)$, $a>0$.

Βασικές ανισότητες

$$e^y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}=1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\dots$$

• Αν $y>0$ έπεται ότι: • $e^y>y$ • $e^y>\dfrac{y^2}{2}$ • $e^y>\dfrac{y^3}{6}$ • $e^y>\dfrac{y^4}{24}$

οπότε $$e^{\sqrt{n}\cdot x} > \frac{(\sqrt{n}\,x)^4}{24}=\frac{n^2x^4}{24} \quad (*)$$

Λύση: (α) • Αν $x=0$, τότε $f_n(0)=0\longrightarrow 0$

• Αν $x>0$, τότε $f_n(x)=\dfrac{nx}{e^{\sqrt{n}\,x}} \underset{(*)}{<} \dfrac{24nx}{n^2x^4}=\dfrac{1}{x^3}\cdot\dfrac{24}{n}\longrightarrow 0$

Συνεπώς, $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$

Μελετάμε την $|f_n|=f_n$, δηλ. την $nxe^{-\sqrt{n}\,x}$

$f_n'(x)=ne^{-\sqrt{n}\,x}-nx\cdot\sqrt{n}\,e^{-\sqrt{n}\,x}=ne^{-\sqrt{n}\,x}(1-\sqrt{n}\,x)$

$+$ $\quad 1/\sqrt{n} \quad$ $-$ $\qquad$ max στο $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

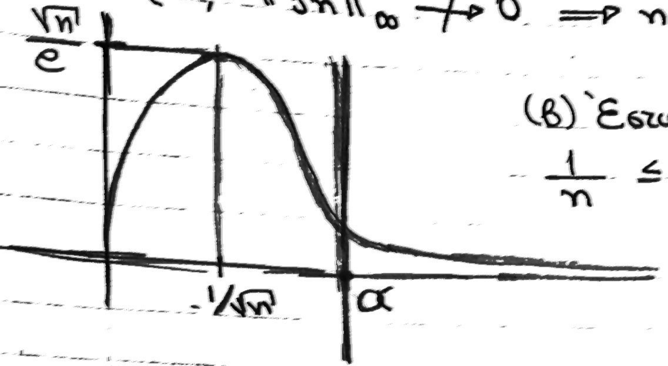
$$\|f_n-0\|_\infty=f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot e^{-\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{n}}{e}\longrightarrow +\infty\neq 0$$

Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε "με το μάτι" να δώσουμε μεγάλη τιμή της $|f_n|$.

π.χ. $\|f_n\|_\infty \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \cancel{n}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} \geq e^{-1}$, γιατί $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$.

Άρα, $\|f_n\|_\infty \not\to 0 \Rightarrow$ η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.



(β) Έστω $a>0$. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0$ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < a$. Έστω $n \geq n_0$.

Μελετάμε την $f_n(x) = nxe^{-\sqrt{n}x}$ στο $[a,+\infty)$.

Έχουμε δει ότι $f_n'(x) < 0$ στο $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n' < 0$ στο $[a,+\infty)$. Άρα, η $f_n \downarrow$ στο $[a,+\infty)$.

Τότε $\underset{\text{στο } [a,+\infty)}{\|f_n\|_\infty} = \max_{t \geq a} f_n(t) = f_n(a) = \frac{na}{e^{\sqrt{n}a}} < \frac{24na}{n^2a^4} =$

$= \frac{24}{a^3}\cdot\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

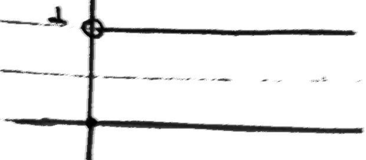
Άρα, $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} 0$ στο $[a,+\infty)$.
Η απάντηση είναι: ΝΑΙ για $a>0$.

38 $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$

(α) Ν.δ.ο. η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο.
Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f;
(β) Ν.δ.ο. $\forall a>0$ $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ στο $[a,+\infty)$ αλλά η σύγκλιση <u>δεν</u> είναι ομοιόμορφη στο $[0,a]$.

Λύση: (α) • Κατά σημείο όριο
Για $x=0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \to 0$
Για $x>0$ έχουμε $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} = \frac{x}{x+1/n} \to \frac{x}{x+0} = \frac{x}{x} = 1$

Άρα, $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$, όπου $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$



f ασυνεχής στο 0.

Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0,+\infty)$, γιατί όλες οι f_n <u>είναι</u> συνεχείς στο $[0,+\infty)$, ενώ η f <u>όχι</u>.

!

(β) <u>Έστω</u> $a>0$

① <u>Στο</u> $[0,a]$ δεν ισχύει $f_n \xrightarrow{ομ.} f$, γιατί $\forall n$ f_n συνεχής στο $[0,a]$, ενώ η f ασυνεχής στο 0.

② Στο $[a,+\infty)$ έχουμε $f\equiv 1$. Υπολογίζουμε την $\|f_n-f\|_\infty$ όπου $\|f_n-f\|_\infty=\sup\{|f_n(x)-f(x)| : x\geq a\}$.
Έχουμε: $|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{nx}{nx+1}-1\right| = \left|\frac{-1}{nx+1}\right| = \frac{1}{nx+1} \leq$

$\leq \frac{1}{na+1}$. Δηλ. $\|f_n(x)-f(x)\|_\infty = \frac{1}{na+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Ισοδύναμα, $f_n \xrightarrow{ομ.} f$ στο $[a,+\infty)$

35 $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$. $f_n \xrightarrow{ομ.} f$. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής.
Αν κάθε f_n έχει ρίζα. Ν.δ.ο. και η f έχει ρίζα.

<u>Υπόθεση</u>: $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists x_n\in[0,1]$ τω. $f_n(x_n)=0$

<u>Ζητούμενο</u>: $\exists x_0\in[0,1]$ τω. $f(x_0)=0$

<u>Λύση</u>: • Η (x_n) είναι ακολουθία στο $[0,1]$, άρα έχει υπακολουθία $x_{k_n}\longrightarrow x_0\in[0,1]$

"Βρήκαμε" το x_0

$\boxed{\begin{array}{l} b_n=\|f_n-f\|_\infty\to 0\\ b_{k_n}=\|f_{k_n}-f\|_\infty\to 0\end{array}}$

$|f(x_0)|\leq |f(x_0)-f(x_{k_n})|+|f(x_{k_n})-f_{k_n}(x_{k_n})|$

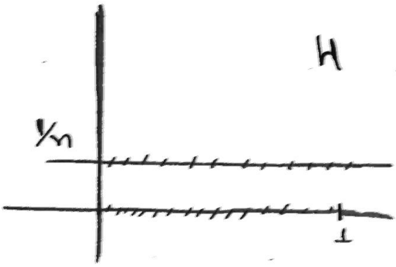
$\leq \underbrace{|f(x_0)-f(x_{k_n})|}_{\to 0} + \underbrace{\|f-f_{k_n}\|_\infty}_{\to 0} \to 0$

(από Α.Μ. για τη συνεχή f, αφού $x_{k_n}\to x_0$) (γιατί $f_{k_n}\xrightarrow{ομ.} f$)

Άρα, $|f(x_0)|=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_0)=0$.

(9) (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ασυνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε συνεχή συνάρτηση.
(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο σε μη ολ/μη συνάρτηση.

<u>Λύση</u>: (α) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$



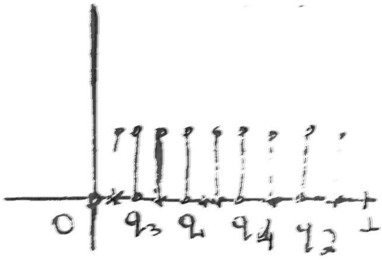
Η f_n είναι ασυνεχής παντού.

$\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$

Άρα, $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} \underbrace{f \equiv 0}_{\text{συνεχής}}$.

(β) Γράφουμε $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ "αρίθμηση $\mathbb{Q} \cap [0,1]$"

$\forall n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$



Η f_n είναι ολ/μη, γιατί είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας. Δ.ο. $f_n(x) \to \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

δηλ. στη συνάρτηση Dirichlet του $[0,1]$ που ξέρουμε ότι <u>δεν</u> είναι ολ/μη.

(α) $x \notin \mathbb{Q}$ $\quad \forall n \ x \notin \{q_1, \dots, q_n\} \Rightarrow \forall n \ f_n(x) = 0$.

Άρα $f_n(x) = 0 \to 0$

(β) $x \in \mathbb{Q}$ $\quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x = q_{n_0}$

$\forall n \geq n_0$ έχουμε $x = q_{n_0} \in \{q_1, \dots, q_n\}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \ f_n(x) = 1$.

Άρα $f_n(x) = 1$ τελικά $\Rightarrow f_n(x) \to 1$

(22) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n^2 x (1-x)^{nx}$. Εξετάστε την.

<u>Λύση</u>: • Για $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0$

• Για $0 < x \leq 1$: $\sqrt[n]{f_n(x)} = \underbrace{\sqrt[n]{n^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{x}}_{\to 1} (1-x)^x \longrightarrow (1-x)^x = e^{x \ln(1-x)} < 1$

Από κριτήριο της ρίζας, $f_n(x) \to 0$, δηλ. $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$. (γιατί $x > 0$ & $\ln(1-x) < 0$)

• $\|f_n\|_\infty \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^2 \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n - 1 \to +\infty$.

Άρα, $f_n \not\to 0$ ομοιόμορφα.