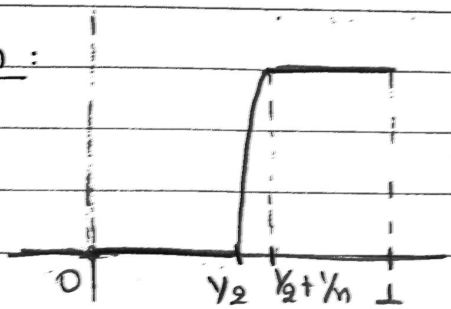
2/12/21

Ασκήσεις (Κεφαλαίου 5)

(9) Θεωρούμε τον $C[0,1]$ με μετρική την
$$d(f,g) = \| f - g \|_1 = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\,dt.$$

Ν.α.ο. ο $(C[0,1], d)$ δεν είναι πλήρης.

Λύση:



$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \ n \ge 3 \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < t \le 1 \end{cases}$$

Όλες οι f_n είναι συνεχείς.

• Η (f_n) είναι βασική στον $C[0,1]$

Έστω $m > n$. Τότε $\| f_m - f_n \|_1 = \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|\,dt$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \underbrace{|f_m(t) - f_n(t)|}_{\le 1}\,dt \le 1 \cdot \frac{1}{n}$$

$f_m = f_n = 0$ στο $[0, 1/2]$

$f_m = f_n = 1$ στο $[1/2, 1/2 + 1/n]$

$0 \le f_m, f_n \le 1$
$\Downarrow$
$|f_m - f_n| \le 1$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0: $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Για $m > n \ge n_0$,

$$\| f_m - f_n \|_1 \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

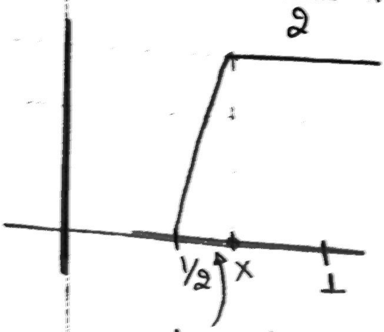
• Υποθέτουμε ότι $\exists f \in C[0,1]$ τ.ω. $\| f_n - f \|_1 \to 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

(*) $\int_0^{1/2} |f_n(t) - f(t)|\,dt \le \int_0^1 |\cancel{f_n}(t) - f(t)|\,dt = \| f_n - f \|_1 \to 0$

$\forall t \in [0, 1/2]$

Άρα, $\int_0^{1/2} |f(t)|\,dt = 0 \xRightarrow[\text{συνεχής}]{|f| \ge 0} |f(t)| = 0 \ \forall t \in [0, 1/2] \Rightarrow f(t) = 0$

(β) Έστω $\frac{1}{2} < x < 1$. Υπάρχει n_0 : $\frac{1}{2} + \frac{1}{n_0} < x \Rightarrow$



$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \Rightarrow f_n = 1$ στο $[x,1]$

Άρα $0 \leq \int_x^1 |1 - f(t)|\,dt = \int_x^1 |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq$

$1/2 + 1/n < x$

$\leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,dt = \|f_n - f\|_1 \to 0$

Άρα, $\int_x^1 |1 - f(t)|\,dt = 0$

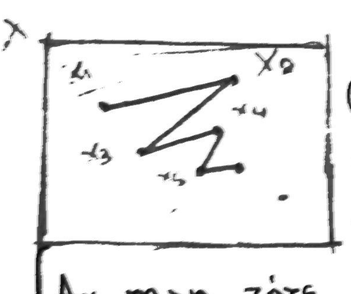
$\Downarrow$ όπως πριν

$f(t) = 1 \quad \forall t \in [x,1]$ και ειδικότερα $\boxed{f(x) = 1}$

Τώρα $\left.\begin{array}{l} \lim_{t \to 1/2^-} f(t) = 0 \\ \\ \lim_{t \to 1/2^+} f(t) = 1 \end{array}\right\}$ άτοπο, διότι f συνεχής.

(11) Έστω (X,d) μ.χ. Ν.δ.ο. ο X είναι πλήρης ανν κάθε ακολουθία (x_n) φραγμένης κύμανσης στον X είναι συγκλίνουσα.

<u>Λύση</u>: Η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση, αν $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$.



($\Rightarrow$) Έχουμε δει ότι αν η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση, <u>τότε είναι βασική</u>. Αφού ο X είναι πλήρης η (x_n) συγκλίνει.

[Αν $m > n$, τότε $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) = \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1})$
$\leq \sum_{k=n}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) \longrightarrow 0$]

($\Leftarrow$) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X.
Έχουμε δει ότι εφαρμόζοντας τον ορισμό της βασικής ακολουθίας με $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$
έτσι ώστε $d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \frac{1}{2^n}$. Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$
Η (x_{k_n}) έχει φραγμένη κύμανση, οπότε από την υπόθεση $\exists x \in X$ τ.ω. $x_{k_n} \to x$. Αφού η (x_n) είναι βασική και $x_{k_n} \to x$
$\Rightarrow x_n \to x$.

Βασικό Θεώρημα (Κεφ. 2)

Αν η (x_n) είναι βασική και έχει υπακολουθία (x_{k_n}) τ.ω. $x_{k_n} \to x \in X$, τότε $x_n \to x$

$$\boxed{d(x_n, x) \le d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < \varepsilon}$$

$k_n > n$ + (x_n) βασική

(14) Έστω X πλήρης χώρος με νόρμα και $\hat{B}(x_n, r_n)$ φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες.
Ν.δ.ο. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n) \neq \emptyset$.

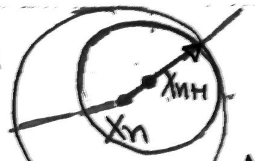
Π.χ. Στον $((0,1), |\cdot|)$ $\downarrow \hat{B}\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) = \left(0, \frac{1}{n}\right]$

και $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$ απαραίτητη η πληρότητα.

Αν ο X δεν είναι πλήρης δεν ισχύει

Αν αφαιρέσω την υπόθεση ότι ο X είναι χώρος με νόρμα τότε δεν ισχύει (Άσκηση 30).

Λύση:



Αν $x_n = x_{n+1}$, τότε $\hat{B}(x_n, r_n) \supseteq \hat{B}(x_{n+1}, r_{n+1})$, $x_{n+1} = x_n$

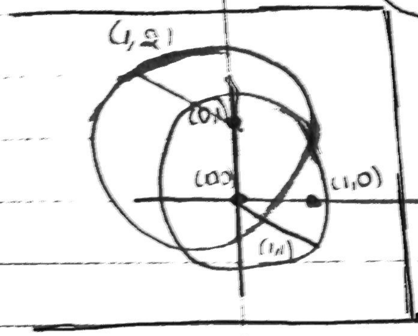
$\Downarrow$

$r_n \geq r_{n+1}$

Αν $x_n \neq x_{n+1}$, τότε θεωρούμε το

$$y = x_{n+1} + r_{n+1} \cdot \frac{x_{n+1} - x_n}{\|x_{n+1} - x_n\|}.$$

Τότε:



• $\|y - x_{n+1}\| = \left\| r_{n+1} \cdot \frac{x_{n+1} - x_n}{\|x_{n+1} - x_n\|} \right\| = \frac{r_{n+1}}{\cancel{\|x_{n+1} - x_n\|}} \cdot \cancel{\|x_{n+1} - x_n\|}$

$\Rightarrow y \in \hat{B}(x_{n+1}, r_{n+1})$

• Άρα $y \in \hat{B}(x_n, r_n)$. Τότε $\|y - x_n\| \leq r_n$

Όμως, $\|y - x_n\| = \left\| x_{n+1} + r_{n+1} \cdot \frac{x_{n+1} - x_n}{\|x_{n+1} - x_n\|} - x_n \right\| =$

$= \left\| \left(1 + \frac{r_{n+1}}{\|x_{n+1} - x_n\|}\right)(x_{n+1} - x_n) \right\| = \left(1 + \frac{r_{n+1}}{\|x_{n+1} - x_n\|}\right) \|x_{n+1} - x_n\| =$

$= \|x_{n+1} - x_n\| + r_{n+1}$

Άρα: $\|x_{n+1} - x_n\| + r_{n+1} \leq r_n \Rightarrow \|x_{n+1} - x_n\| \leq r_n - r_{n+1}$.

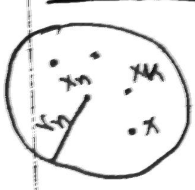
Συνέπειες: (α) $r_n \geq r_{n+1}$, δηλ. $(r_n) \downarrow \Rightarrow$ συγκλίνει $\Rightarrow$ βασική

(β) $\forall m > n$ $\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{m-1}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq$

$\leq (r_{m-1} - r_m) + \ldots + (r_n - r_{n+1}) = r_n - r_m \xRightarrow[\text{βασική}]{(r_n)} (x_n)$ βασική

Αφού ο X είναι πλήρης, $x_n \to x \in X$. Θ.δ.ο. $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n)$

• Έστω $n \in \mathbb{N}$: $\forall k \geq n$ έχουμε $x_k \in \hat{B}(x_k, r_k) \subseteq \underset{\text{κλειστό σύνολο}}{\hat{B}(x_n, r_n)}$



Η $(x_k)_{k \geq n}^{\infty}$ συγκλίνει στο $x \Rightarrow x \in \hat{B}(x_n, r_n)$

(15) (X,d) πλήρης, $f: X \to Y$.

Ν.δ.ο. αν (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών $\subseteq X$ με $diam(E_n) \to 0$, τότε $f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n)$

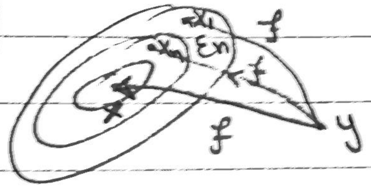
<u>Λύση</u>: · Από το Θ. Cantor, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x\}$ (μονοσύνολο)

Άρα ζητάμε $f(\{x\}) = \{f(x)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ [και $\forall n \in \mathbb{N}$ $x \in E_n$]

· $E \subseteq E_n \ \forall n \Rightarrow f(E) \subseteq f(E_n) \ \forall n \Rightarrow f(E) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n)$

· Για το "$\supseteq$" παίρναμε y: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ y \in f(E_n)}$ και θ.δ.ο. $y \in f(E) = \{f(x)\}$, δηλ. $\boxed{y = f(x)}$

Αφού $y \in f(E_n)$ $\exists x_n \in E_n$ τ.ω. $y = f(x_n)$



(*) $\forall n$, $x, x_n \in E_n \Rightarrow d(x_n, x) \le diam(E_n) \to 0$

Άρα $x_n \to x$. Αφού η f είναι συνεχής, $\underset{\substack{\parallel \\ y}}{f(x_n)} \longrightarrow f(x)$. Έπεται ότι $y = f(x)$.

(16) (X,d) πλήρης μ.χ., G ανοικτό, μη-κενό γνήσιο υποσύνολο του X. Ορίζουμε $\sigma(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x, X\setminus G)} - \frac{1}{d(y, X\setminus G)} \right|$ στο $G \times G$

Ν.α.ο. η σ είναι μετρική και ο (G, σ) είναι πλήρης.

<u>Λύση</u>: Έστω (x_n) σ-βασική στο G.

Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n,m \geq n_0$ $\sigma(x_n, x_m) < \varepsilon \Rightarrow \forall n,m \geq n_0$ $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ <u>και</u>

$\left| \frac{1}{d(x, X\setminus G)} - \frac{1}{d(y, X\setminus G)} \right| < \varepsilon$

① Η (x_n) είναι d-βασική στον X και ο X είναι πλήρης, άρα $x_n \xrightarrow{d} x \in X$.

② Θ.δ.ο. <u>$x \in G$</u>. Τότε $d(x_n, X\setminus G) \to d(x, X\setminus G) > 0 \Rightarrow$

$\left(\text{η } f(z) = d(z, X\setminus G) \text{ είναι συνεχής}\right) \Rightarrow \left| \dfrac{1}{d(x_n, X\setminus G)} - \dfrac{1}{d(x, X\setminus G)} \right| \to 0$

Προσθέτοντας, $\sigma(x_n, x) \to 0$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{\sigma} x$.

Μένει ν.δ.ο. $x \in G$: Έχουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, m \geq 0$

$\left| \dfrac{1}{d(x_n, X\setminus G)} - \dfrac{1}{d(x_m, X\setminus G)} \right| < \varepsilon \Rightarrow$ η $\dfrac{1}{d(x_n, X\setminus G)}$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ φραγμένη, δηλ. $\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \dfrac{1}{d(x_n, X\setminus G)} \leq M. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{d(x_n, X\setminus G)}_{\downarrow \; d(x, X\setminus G)} \geq \frac{1}{M}$$

Άρα, $d(x, X\setminus G) \geq \dfrac{1}{M} > 0 \Rightarrow x \notin X\setminus G \Rightarrow x \in G$.

(25) <u>Σωστό ή λάθος</u> (i) Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και $F_m = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq m\} = f^{-1}([-m, m])$ τότε τουλάχιστον ένα F_m περιέχει διάστημα.

<u>Απάντηση</u>: Έστω $x \in \mathbb{R}$. $\exists m \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|f(x)| \leq m \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists m : x \in F_m \Rightarrow x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$. <u>Δηλ.</u> $\mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$

Αλλιώς, $\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-1}([-m, m]) = f^{-1}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} [-m, m]\right) = f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης

(2) Κάθε F_n είναι κλειστό ως αντίστροφη εικόνα του κλειστού συνόλου $[-m, m]$ μέσω της συνεχούς συνάρτησης f.

Απάντηση: Από Baire, $\exists n \in \mathbb{N}$ $F_n^{\circ} \neq \phi \Rightarrow \exists$ διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq F_n$

(29) (X, d) πλήρης, $f_n : X \to \mathbb{R}$ συνεχείς.
Ν.δ.ο. είτε $\exists x_0 \in X$ τ.ω. $f_n(x_0) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
ή υπάρχουν $\phi \neq G \subseteq X$ ανοικτό και $k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $f_k(x) = 0$ $\forall x \in G$.

Λύση: Υποθέτουμε ότι "$\forall x \in X$ $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $f_n(x) = 0$",
δηλ. "$\forall x \in X$ $\exists n \in \mathbb{N}$: $x \in Z(f_n) = \{x : f_n(x) = 0\}$" $\Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z(f_n)}$

Κάθε $Z(f_n) = f_n^{-1}(\{0\})$ είναι κλειστό σύνολο και ο X είναι πλήρης. Από το Θ. Baire $\exists k \in \mathbb{N}$ $Z(f_k)^{\circ} \neq \phi$.
Άρα $\exists \phi \neq G \subseteq Z(f_k)$ ανοικτό. $\forall x \in G$ έχουμε $x \in Z(f_k)$
δηλ. $f_k(x) = 0$

(28) Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής και επί, με την ιδιότητα
"$\forall x, y \in X$ $d(x, y) \leq \sigma(f(x), f(y))$"
Σωστό ή λάθος : (α) X πλήρης $\Rightarrow Y$ πλήρης
(β) Y πλήρης $\Rightarrow X$ πλήρης

Λύση: (α) Σωστό : Έστω (y_n) βασική στον Y.
Η f είναι επί, άρα $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in X$: $f(x_n) = y_n$.
Τότε $d(x_n, x_m) \leq \sigma(f(x_n), f(x_m)) = \sigma(y_n, y_m)$ και αφού η (y_n) είναι βασική είναι επίσης βασική.
Αφού X είναι πλήρης, $x_n \to x \in X$. Η f είναι συνεχής, άρα $y_n = f(x_n) \to f(x)$, δηλ. η (y_n) συγκλίνει.

(β) Λάθος: $X = (\mathbb{R}, d)$, $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$
$Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Ορίζουμε $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
↳ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΗΣ

• $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y| = \frac{1}{1+\xi^2} |x-y| \leq |x-y|$

↳ για κάποιο ξ ανάμεσα στα x και y.

• Αν $x_n \xrightarrow{d} x \Longrightarrow \arctan x_n \longrightarrow \arctan x \xrightarrow[\text{συνεχής}]{\tan} x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$
Άρα η f είναι συνεχής.

Άσκηση 4.23

(X,d) μ.χ., $f: X \to X$ συνεχής τ.ω. $f \circ f = f$.
Ν.δ.ο. $f(X)$ είναι κλειστό.

Λύση: Έστω $y_n \in f(X)$ και έστω ότι $y_n \to y \in X$.
$\exists\, x_n \in X$ τ.ω. $y_n = f(x_n)$.
Αφού $y_n \to y$, έχουμε $f(y_n) \to f(y)$ (f είναι συνεχής)
$\Longrightarrow f(f(x_n)) \longrightarrow f(y)$. Άρα $\left.\begin{array}{l} y_n \to f(y) \\ \text{και} \\ y_n \to y \end{array}\right\} \Longrightarrow y = f(y) \in f(X)$
$(f \circ f)(x_n) = f(x_n) = y_n$

Άσκηση 4.26

(X,d) μ.χ., $f: X \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Σωστό ή λάθος
(α) f, g ομοιόμορφα συνεχής $\Longrightarrow g \circ f$ ομ. συνεχής
(β) f ομ. συνεχής + φραγμένη, g συνεχής $\Longrightarrow g \circ f$ ομ. συνεχής
(γ) f συνεχής + φραγμένη, g ομ. συνεχής $\Longrightarrow g \circ f$ ομ. συνεχής.

Λύση: (α) Σωστό: Ισχύει γενικά.
Έστω $(x_n), (y_n)$ στον X με $d(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow$

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad \underset{\text{συνεχής}}{\overset{f \text{ ομ.}}{\Longrightarrow}} \quad |\underbrace{f(x_n)}_{u_n} - \underbrace{f(y_n)}_{v_n}| \to 0 \underset{\text{συνεχής}}{\overset{g \text{ ομ.}}{\Longrightarrow}} |g(f(x_n)) - g(f(y_n))| \to 0$$

$\Rightarrow |(g \circ f)(x_n) - (g \circ f)(y_n)| \to 0.$
Από χαρακτηρισμό μέσω ακολουθιών η $g \circ f$ είναι ομ. συνεχής.

(β) Σωστό: Η f είναι φραγμένη, δηλ. $\exists M > 0$ τ.ω. $\forall x \in X$ $|f(x)| \leq M$. Άρα $f(X) \subseteq [-M, M]$.
Η g είναι συνεχής, άρα η $h = g|_{[-M,M]}$ είναι ομ. συνεχής.

Τέλος: $g \circ f = \underbrace{h}_{\text{ομ. συνεχής}} \circ \underbrace{f}_{\text{ομ. συνεχής}} =$ ομ. συνεχής από το (α).

(γ) Αν ισχύει, τότε για την $g(x) = x$ που είναι ομ. συνεχής θα έχουμε: "Αν $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής & φραγμένη, τότε f ομ. συνεχής". Αυτό δεν ισχύει π.χ. για $X = \mathbb{R}$ η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$ είναι συνεχής και φραγμένη, αλλά όχι ομ. συνεχής.
Άρα Λάθος.

Άσκηση 4.36

(X, d) μ.χ. Ν.δ.ο. τα εξής είναι ισοδύναμα:
(α) $d \sim \delta$
(β) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον (X, d) είναι τελικά σταθερή.
(γ) Ο X δεν έχει σημεία συσσώρευσης.
(δ) $\forall (Y, \sigma)$ κάθε $f: X \to Y$ είναι συνεχής.

Λύση: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $x_n \xrightarrow{d} x$. Αφού $d \sim \delta$ έχουμε $x_n \xrightarrow{\delta} x$
$\Rightarrow (x_n)$ τελικά σταθερή & ίση με x)
(Για $\varepsilon = 1/2$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ $\delta(x_n, x) < 1/2 \Rightarrow \forall n \geq n_0$ $x_n = x$).

(β) $\Longrightarrow$ (γ) Έστω x σ.σ. του X. $\exists\, x_n \to x$ τ.ω. $\forall n$ $x_n \neq x$.
Από την υπόθεση, η (x_n) τελικά σταθερή και ίση με x (αφού η $x_n \to x$) <u>άτοπο</u>.

(γ) $\Longrightarrow$ (δ) Κάθε $x \in X$ είναι μεμονωμένο σημείο του X, άρα $\exists\, \delta_x > 0$ τ.ω. $B(x, \delta_x) \cap X = \{x\}$.
Αν $f : X \to Y$ οποιαδήποτε και $\varepsilon > 0$ $\forall y \in B(x, \delta_x)$ έχουμε $y = x \Longrightarrow \delta(f(y), f(x)) = 0 < \varepsilon$.
Δηλ. η f είναι συνεχής στο x.

(δ) $\Longrightarrow$ (α) Η $f : (X, d) \to (X, \delta)$ με $f(x) = x$ είναι <u>συνεχής</u>.
Η $f^{-1} : (X, \delta) \to (X, d)$, $f^{-1}(x) = x$ είναι επίσης συνεχής, γιατί όλα τα $x \in X$ είναι μεμονωμένα ως προς την δ.
(είδαμε ότι (γ) $\Longrightarrow$ (δ)).
Αφού οι f, f^{-1} είναι συνεχείς, έχουμε $d \sim \delta$.