30/11/21

Άσκηση 10

<u>Ν.δ.ο. ο (X,d) είναι πλήρης, ανν κάθε αριθμήσιμο κλειστό $A \subseteq X$ είναι πλήρης μ. υπόχωρος.</u>

<u>Λύση</u>: ($\Longrightarrow$) Κλειστό υποσύνολο μ.χ. είναι πάντα πλήρης μ.χ. (με τη σχετική μετρική / θεωρία)

($\Longleftarrow$) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X.

Ορίζουμε $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$. Δεν ξέρουμε ότι το A είναι κλειστό.

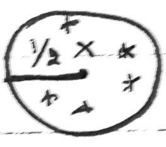
• Αν το A είναι κλειστό, τότε από την υπόθεση ο (A,d_A) είναι πλήρης και η (x_n) είναι βασική στο A.

Άρα $\exists x\in A$ τω. $x_n \xrightarrow{d_A} x \Longleftrightarrow x_n \xrightarrow{d} x$

• Αν το A <u>δεν</u> είναι κλειστό, από την $\bar{A}=A\cup A'$ έχουμε ότι: $\exists x\in A'$ (γιατί $A \subsetneq \bar{A}$). Θ.δ.ο. $x_n \to x$.

<u>Ισχυρισμός</u>: Υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) τω. $x_{k_n}\to x$.

Για $\varepsilon=1$, το $A\cap B(x,1)=$ άπειρο $\Longrightarrow \exists k_1\in\mathbb{N}: x_{k_1}\in B(x,1)$ $\Longrightarrow d(x_{k_1},x)<1$. Για $\varepsilon=1/2$ το $A\cap B(x,1/2)=$ άπειρο $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ στην $B(x,1/2)$ υπάρχουν άπειροι $x_n \Longrightarrow \exists k_2>k_1$ τω.



$x_{k_2}\in B(x,1/2) \Longrightarrow d(x_{k_2},x)<1/2$.

Επαγωγικά, βρίσκαμε $k_1<k_2<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$ τω. $\forall n$ $d(x_{k_n},x)<1/n$. Τότε $x_{k_n}\to x$.

Αφού η (x_n) είναι βασική και έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο x, έπεται ότι $x_n \to x$.

Ασκήσεις

(α) Έστω (x_n) βασική ακολουθία, $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$.
Αν $A' \neq \emptyset$, τότε η (x_n) συγκλίνει.

[Παίρνουμε $x\in A'$ και από τον ισχυρισμό βρίσκουμε ότι $\overbrace{x_{k_n}\to x \Rightarrow}\, x_n \to x$]

(β) Έστω (x_n) βασική ακολουθία και $A=\{x_k : n\in\mathbb{N}\}$.
Ν.δ.ο. το A έχει το πολύ ένα σημείο συσσώρευσης.

[Έστω $x,y\in A'$. Όπως πριν βρίσκουμε $x_{k_n}\to x \Rightarrow x_n\to x$.
Ομοίως, $\exists\, x_{\lambda_n}\to y \Rightarrow x_n \to y$. Άρα $x=y$]

Πλήρωση Μετρικού Χώρου

<u>Χώρος Banach</u> είναι ένας χώρος με νόρμα που είναι πλήρης ως προς την μετρική $d(x,y)=\|x-y\|$ που επάγεται από τη νόρμα.

(*) Οι ℓ_p, $1\le p\le\infty$ / $(C_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρεις.
Ο $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$, $1\le p<\infty$ $\left[\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\right]$
<u>δεν</u> είναι πλήρης.

Έστω Γ μη κενό σύνολο. Ο χώρος $\ell_\infty(\Gamma)$ είναι το σύνολο όλων των φραγμένων $f:\Gamma\to\mathbb{R}$.
(Αν $\Gamma=\mathbb{N}$, τότε $\ell_\infty(\mathbb{N})=$ οι φραγμένες ακολουθίες $=\ell_\infty$).

Ο $\ell_\infty(\Gamma)$ είναι δ.χ.: αν $f,g:\Gamma\to\mathbb{R}$ φραγμένες και $a\in\mathbb{R}$.
ορίζουμε:

$(f+g)(\gamma) \overset{\text{ορσ}}{=\!=} f(\gamma) + g(\gamma)$
$(af)(\gamma) \overset{\text{ορσ}}{=\!=} a f(\gamma)$
Οι $f+g$, af είναι φραγμένες, δηλ. στον $\ell_\infty(\Gamma)$ και ικανοποιούνται τα αξιώματα του δ.χ.
Η νόρμα στον $\ell_\infty(\Gamma)$ είναι : $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} < \infty$

<u>Πρόταση</u>

Ο $(\ell_\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης (χώρος Banach)

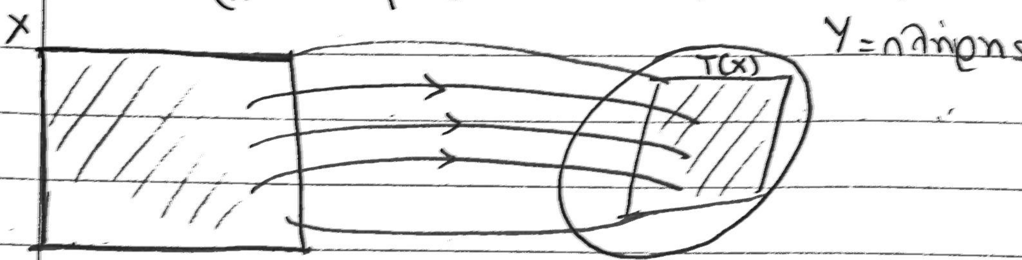
<u>Απόδειξη</u>: <u>Έστω $\varepsilon > 0$</u>. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $\|f(n) - f(m)\| \leq \varepsilon$
$\Rightarrow \forall n, m \geq n_0$ και $\forall \gamma \in \Gamma$ $|f_n(\gamma) - f_m(\gamma)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$ $(*)$
Σταθεροποιούμε $\gamma \in \Gamma$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε n_0 (ίδια $\forall \gamma \in \Gamma$) τ.ω. $\forall n, m \geq n_0$ $|f_n(\gamma) - f_m(\gamma)| \leq \varepsilon$. Άρα, η $(f_n(\gamma))$ βασική στο $\mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(\gamma) \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $f(\gamma) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(\gamma)$.

Έτσι έχουμε ορίσει $f : \Gamma \to \mathbb{R}$. Θ.δ.ο. $f \in \ell_\infty(\Gamma)$ (είναι φραγμένη) και ότι $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$, δηλ. $f_n \to f$ στον $\ell_\infty(\Gamma)$.
Επιστρέφουμε στην $(*)$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε $\forall \gamma \in \Gamma$ $\forall n, m \geq n_0$ $|f_n(\gamma) - f_m(\gamma)| \leq \varepsilon$. Για σταθερό $n \geq n_0$ αφήνουμε $m \to +\infty$. Τότε

$$|f_n(\gamma) - f(\gamma)| \leq \varepsilon.$$

, δηλ. $\forall n \geq n_0$ <u>$\forall \gamma \in \Gamma$</u> $|f_n(\gamma) - f(\gamma)| \leq \varepsilon$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0$ $\sup\{|f_n(\gamma) - f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} \leq \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq n_0$ $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$
Άρα, $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$.
Τέλος, $f = \underset{\ell_\infty(\Gamma)}{\underset{\cap}{f_n}} - \underset{\ell_\infty(\Gamma)}{\underset{\cap}{(f_n - f)}} \in \ell_\infty(\Gamma)$, γιατί ο $\ell_\infty(\Gamma)$ είναι δ.χ. για $n \geq n_0$, αφού $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$

Ορισμός (πλήρωση μ.χ.): Έστω (X,d) μ.χ.
Ένας μ.χ. (Y,σ) λέγεται **πλήρωση** του (X,d), αν
(i) ο (Y,σ) είναι πλήρης
(ii) υπάρχει ισομετρία $T:(X,d) \to (Y,\sigma)$ τ.ω. $\overline{T(X)} = Y$.



Επιπλέον, ο $T(X)$ είναι πυκνός υπόχωρος του Y
"ο X είναι πυκνός υπόχωρος του πλήρους μ.χ. Y"

Θεώρημα

Κάθε μ.χ. (X,d) έχει πλήρωση

Τυπικό παράδειγμα: Μια πλήρωση του $\mathbb{Q}$ είναι το $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Θα ορίσουμε ισομετρία: $T:(X,d) \to (\ell_\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$
πλήρης
Πως ορίζεται το $T(x)$: θα είναι μια φραγμένη συνάρτηση $f_x : X \to \mathbb{R}$ (*). Θεωρούμε την $f_x(t) = d(t,x) - d(t,a)$

$f: X \to \mathbb{R}$ φραγμένη (στα στοιχ. του $\ell_\infty(X)$)

$|f_x(t) - f_y(t)| = |d(t,x) - d(t,y)| \leq d(x,y) \ \forall t \in X \implies$
$\implies \|f_x - f_y\|_\infty = \sup |f_x(t) - f_y(t)| \leq d(x,y)$
Επίσης, $\|f_x - f_y\|_\infty \geq |f_x(t) - f_y(t)| = d(x,y)$

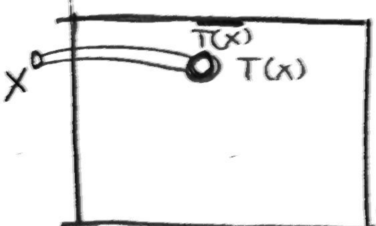
(*) Σταθεροποιούμε $a \in X$.
Η f_x είναι φραγμένη: $\forall t \in X \ \ |f_x(t)| = |d(t,x) - d(t,a)| \leq d(x,a)$
$\implies \|f_x\|_\infty = \sup\{|f_x(t)| : t \in X\} \leq d(x,a) < \infty$

Παρατήρηση: Ορίζουμε $T(x) = f_x$. Δ.ο. η T είναι ισομετρία.

- $\forall t \in X$ έχουμε $|f_x(t) - f_y(t)| = |d(t,x) - \cancel{d(t,a)} - d(t,y) + \cancel{d(t,a)}| \leq d(x,y)$. Άρα, $\| f_x(t) - f_y(t) \|_\infty = \sup\{ |f_x(t) - f_y(t)| : t \in X \} \leq d(x,y)$

<u>Δηλ.</u> $\| T(x) - T(y) \| \leq d(x,y)$

- Επίσης, $\| T(x) - T(y) \|_\infty = \| f_x - f_y \|_\infty \geq |f_x(x) - f_y(x)| =$
$= |\underbrace{d(x,x)}_{\to 0} - d(x,a) - d(x,y) + d(x,a)| = d(x,y)$.



Ορίζουμε $Y = \overline{T(X)}^{\|\cdot\|_\infty}$ την κλειστή θήκη του $T(X)$ στον $\ell_\infty(X)$.

- Ο $(Y, \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης ως κλειστό υποσύνολο του πλήρους $(\ell_\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$.
- Από την κατασκευή, ο $T(X)$ είναι πυκνό $\subseteq Y$ (ορίζουμε $Y = \overline{T(X)}$).

$\boxed{\text{Άρα ο } (Y, \|\cdot\|_\infty) \text{ είναι μια πλήρωση του } (X,d)}$

<u>Θεώρημα</u> (Μοναδικότητα της Πλήρωσης)

Έστω (X,d) μ.χ. Αν (Y_1, σ_1) και (Y_2, σ_2) είναι δύο πληρώσεις του (X,d), τότε υπάρχει $T : (Y_1, \sigma_1) \to (Y_2, \sigma_2)$ ισομετρία και επί (ισομετρικός ισομορφισμός).
(Δηλ. οι Y_1 και Y_2 "ταυτίζονται" ως μ.χ.)

<u>Θεώρημα σταθερού σημείου</u> (Banach)

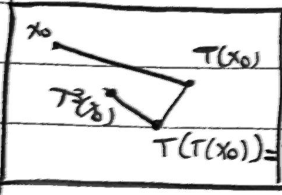
Μια απεικόνιση $T : (X,d) \to (X,d)$ λέγεται <u>γνήσια συστολή</u>, αν $\exists\, 0 < a < 1$ τ.ω. $\forall x,y \in X$ $d(T(x), T(y)) \leq a\, d(x,y)$.

Θεώρημα

Έστω (X,d) πλήρης μ.χ. και $T: X \to X$ γνήσια συστολή (με σταθερά $0<a<1$). Τότε $\exists!\ x \in X$ τω. $T(x)=x$ (σταθ. σημείο)

Απόδειξη: Μοναδικότητα: Έστω $x \neq y$ τω $T(x)=x$ & $T(y)=y$.
Τότε $0<d(x,y) = d(T(x),T(y)) \leq a\, d(x,y) \Rightarrow 1 \leq a$ άτοπο

X



Ξεκινάμε με τυχόν $x_0 \in X$ και ορίζουμε

$$x_1 = T(x_0)$$
$$x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$$
$$\vdots$$
$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$$

όπου $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n\text{-φορές}}$

Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x_n = x_{n-1}$, τότε $T(x_{n-1}) = x_{n-1}$ $\Rightarrow x_{n-1}$ σταθερό σημείο του T και έχουμε τελειώσει.

Ισχυρισμός: Η (x_n) είναι βασική

Απόδειξη: Έστω $n>m$. Τότε $d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n-1}) + d(x_{n-1},x_{n-2}) + \ldots + d(x_{m+1},x_m) = d(T^n(x_0),T^{n-1}(x_0)) + \ldots + d(T^{m+1}(x_0),T^m(x_0))$

Δ.ο. $d(T^{k+1}(x_0),T^k(x_0)) \leq a\, d(T^k(x_0),T^{k-1}(x_0)) \leq a^2 d(T^{k-1}(x_0),T^{k-2}(x_0))$
$\leq \ldots \leq a^k d(\overset{=T(x_0)}{x_1}, x_0)$

$\leq a^{n-1} d(x_1,x_0) + \ldots + a^m d(x_1,x_0) = d(x_1,x_0) \sum_{k=m}^{n-1} a^k \leq$

$\leq d(x_1,x_0) \sum_{k=m}^{\infty} a^k = d(x_1,x_0) \frac{a^m}{1-a}$

Έστω $\varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}: d(x_1,x_0) \frac{a^{n_0}}{1-a} < \varepsilon$ (γιατί $a^n \to 0$)
και τότε $\forall n,m \geq n_0$ $d(x_n,x_m) \leq d(x_1,x_0) \frac{a^m}{1-a}$

Παραδείγματα

(α) $X=(0,1)$ με τη συνήθη μετρική
Η $f:(0,1)\to(0,1)$ με $f(x)=\frac{x}{2}$ <u>δεν</u> έχει σταθερό σημείο.

και είναι γνήσια συστολή: $|f(x)-f(y)|=\left|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right|\leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{\alpha\in(0,1)}|x-y|$

Το πρόβλημα είναι ότι ο $((0,1),|\cdot|)$ <u>δεν</u> είναι πλήρης μ.χ., γιατί το $(0,1)$ <u>δεν</u> είναι κλειστό $\subseteq\mathbb{R}$.

(β) Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης) με $f(x)=\ln(1+e^x)$ <u>δεν</u> έχει σταθερό σημείο: $f(x)=x \Rightarrow \ln(1+e^x)=x\Rightarrow$
$\Rightarrow 1+e^x=e^x \Rightarrow 1=0$, <u>άτοπο</u>

<u>Όμως</u>, $0<f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}<1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Από το Θ.Μ.Τ. αν $x<y$ στο $\mathbb{R}$ τότε $\exists\xi\in(x,y)$ τ.ω.
$|f(y)-f(x)|=\underbrace{|f'(\xi)|}_{<1}|y-x|<|y-x|$, δηλ. η $|f(x)-f(y)|<|x-y|$

<u>Δεν</u> φτάνει για να εξασφαλίσει σταθερό σημείο.
Χρειαζόμαστε την $|f(x)-f(y)|\leq\alpha|x-y|$, όπου $0<\alpha<1$
που είναι ισχυρότερη

Ασκήσεις

(20) Έστω (X,d) πλήρης μ.χ. και $f,g:X\to X$. Ν.δ.ο.
(α) Αν $\exists k\in\mathbb{N}$ τ.ω. η $f^k=f\circ\ldots\circ f$ να είναι γνήσια συστολή τότε $\exists!\,x\in X$ τ.ω. $f(x)=x$.
(β) Αν η f είναι γνήσια συστολή και $f\circ g=g\circ f$, τότε $\exists!\,x\in X$ τ.ω. $f(x)=x=g(x)$.

Λύση : (α) Η f^k είναι γνήσια συστολή, άρα $\exists! x \in X$ τ.ω. $f^k(x) = x$.

τ.ω. $|f^k(f(x)) - f^k(x)| \leq a\,|f(x) - x|$

$f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(x)$, $f^k(x) = x$

Τότε, $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = f(\underbrace{f^k(x)}_{= x}) = \underline{\underline{f(x)}}$

Άρα, το $f(x)$ είναι σταθερό σημείο της f^k και από μοναδικότητα $f(x) = x$.

Αν $f(y) = y$, τότε $f^2(y) = f(y) = y$ και τελικά $f^k(y) = y \Rightarrow y = x$ από μοναδικότητα.

(β) Ξέρουμε ότι $\exists! x \in X$ τ.ω. $f(x) = x$ και μένει ν.δ.ο. $g(x) = x$.

Έχουμε $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Rightarrow f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$

Άρα, το $g(x)$ είναι σταθερό σημείο της f και από μοναδικότητα $g(x) = x$.

(13) Έστω d μετρική στο $\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική

(β) ο $(\mathbb{R}, d)$ είναι πλήρης.

Ν.δ.ο. $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{diam}_d([n, +\infty)) \geq \delta$.

Λύση : Ορίζουμε $a_n = \mathrm{diam}_d([n, +\infty))$.

Η (a_n) είναι φθίνουσα και ≥ 0 $[n, +\infty) \supseteq [n+1, +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{diam}_d([n, +\infty)) \geq \mathrm{diam}_d([n+1, +\infty))$.

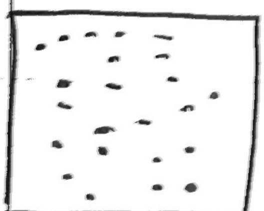
Άρα, $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n \geq 0$. Ζητάμε $\underbrace{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n}_{= \delta} > 0$, γιατί τότε

$\forall n$ $a_n \geq \lim a_n = \delta$.

Υποθέτουμε ότι $a_n \to 0 \Leftrightarrow \mathrm{diam}_d([n, +\infty)) \longrightarrow 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

• Ο $(\mathbb{R},d)$ είναι πλήρης, η $F_n=[n,+\infty)$ είναι φθίνουσα
κάθε F_n είναι $|\cdot|$-κλειστό $\Longrightarrow$ κάθε F_n είναι d-κλειστό
γιατί $d \sim |\cdot|$ και $\mathrm{diam}_d(F_n) \to 0$.
Από το Θ. Cantor για τον $(\mathbb{R},d)$ παίρνουμε
$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} [n,+\infty)$ άτοπο (γιατί $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n,+\infty) = \emptyset$).

(17) Έστω $X=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ και d μετρική στο X τ.ω. ο (X,d) να είναι πλήρης. Ν.δ.ο. ο (X,d) έχει τουλάχιστον ένα μεμονωμένο σημείο.



Λύση: • Έστω ότι κάθε σημείο συσσώρευσης του X
• Ορίζουμε $V_n = X\setminus\{x_n\}$. Τότε το V_n είναι ανοικτό (γιατί το μονοσύνολο $\{x_n\}$ είναι κλειστό) και πυκνό: $x_n \in \overline{V_n}$, γιατί x_n σ.σ. του X, άρα σε κάθε $B(x_n,\varepsilon)$ $\exists\, x\neq x_n$, δηλ. $B(x_n,\varepsilon)\cap V_n \neq \emptyset$
$x\in V_n$

Επειδή $V_n\subseteq\overline{V_n}$
Άρα, $\overline{V_n}\supseteq V_n\cup\{x_n\}=X$

• Αφού ο (X,d) είναι πλήρης, από το Θ. Baire (το 1)
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} (X\setminus\{x_n\}) \neq \emptyset \Longrightarrow X\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\} \neq \emptyset$$

$\Longrightarrow X\setminus X \neq \emptyset \Longrightarrow \emptyset\neq\emptyset$, άτοπο

Άσκηση

Σε κάθε (X,d)
① x σ.σ. του $X \Longleftrightarrow X\setminus\{x\}$ ανοικτό και πυκνό
② x μεμονωμένο σημείο του $X \Longrightarrow \forall D\subseteq X$ πυκνό ισχύει $x\in D$.