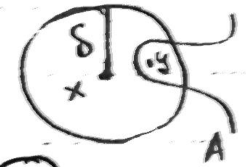
21/10/21

Σημεία συσσώρευσης – μεμονωμένα σημεία

Ορισμός: Έστω A υποσύνολο του (X,d). Θα λέμε ότι το $x\in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, αν $\forall \delta>0$ $\exists y\neq x$, $y\in A$ τ.ω. $d(y,x)<\delta$.



Ισοδύναμα "$\forall \delta>0 : B(x,\delta)\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset$"

Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A λέγεται παράγωγο σύνολο του A και συμβολίζεται A'.

Ορισμός: Ένα $x\in A$ λέγεται μεμονωμένο σημείο του A, αν $\exists \delta>0$ τ.ω. $A\cap B(x,\delta)=\{x\}$.

Σημείωση: (Για $A=X$) Ένα $x\in X$ λέγεται μεμονωμένο σημείο του X αν $\exists\delta>0$ τ.ω. $B(x,\delta)=\{x\}$, $\boxed{\text{δηλ. } X\cap B(x,\delta)=B(x,\delta)}$

Παραδείγματα

(1) 

$A=(0,1)\cup\{2\}$

$A'=[0,1]$ και το 2 είναι μεμονωμένο σημείο.

(2) $\mathbb{Q}$ 

$\forall \xi\in\mathbb{R}$

Σε κάθε διάστημα υπάρχουν άπειροι ρητοί. $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$

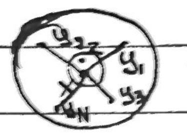
(3) (X,δ) κάθε $x\in X$ είναι μεμονωμένο σημείο του X.
Για $\delta=1/2$ έχουμε $B(x,\delta)=\{x\}$.

Είδαμε ότι: $x \in \bar{A} \iff \exists\, (x_n)$ στο A τ.ω. $x_n \to x$

Πρόταση 1

Έστω $A \subseteq (X, d)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:
(α) Το x είναι σ.σ. του A $(x \in A')$
(β) $\forall \delta > 0$ στην $B(x, \delta)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A
(γ) Υπάρχει (x_n) στο A τ.ω. $\forall n$ $x_n \neq x$ και $x_n \to x$

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $x \in A'$ και έστω $\delta > 0$



το $B(x, \delta) \cap (A \setminus \{x\})$ είναι μη κενό.
Έστω ότι είναι πεπερασμένο. Το γράφουμε $\{y_1, \dots, y_N\}$
Θεωρούμε $0 < r < \min\{\underbrace{d(y_1, x)}_{>0}, \dots, \underbrace{d(y_N, x)}_{>0}\} < \delta$
Παρατηρούμε ότι $r < \delta$. γιατί $y_1 \neq x$
Αφού $x \in A'$, $\exists\, z \in A$, $z \neq x$ τ.ω. $d(z, x) < \delta$.
Τότε $z \in B(x, \delta) \cap (A \setminus \{x\})$ και $\forall j = 1, \dots, N$ $d(z,x) \leq d(y_j, x) \Rightarrow z \neq y_j$ άτοπο
(β) $\Rightarrow$ (γ) Για $\delta = 1$ $\exists\, x_1 \in X$, $x_1 \neq x$ τ.ω. $d(x_1, x) < 1$
Για $\delta = 1/2$ στην $B(x, 1/2)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του $A \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, x_2 \in A$, $x_2 \neq x$ τ.ω. $d(x_2, x) < 1/2$.
[Μάλιστα μπορούμε να πάρουμε $x_2 \neq x_1$]
Για $\delta = \frac{1}{n+1}$ και αν έχουμε επιλέξει τα $x_1, \dots, x_n$, στην $B(x, \frac{1}{n+1})$

υπάρχουν άπειρα σημεία του A. Επιλέγουμε $x_{n+1} \neq x, x_1, \dots, x_n$ τ.ω.
$d(x_{n+1}, x) < \frac{1}{n+1}$. Έτσι φτιάχνουμε (x_n) στο A: $x_n \neq x$, οι x_n

είναι διαφορετικοί ανά δύο και $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to x$.

(γ) $\Rightarrow$ (α) Έχουμε $x \in X$ και (x_n) στο A με $x_n \neq x$ και $x_n \to x$

Έστω $\delta > 0$. Για μεγάλο n έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in B(x,\delta) \\ \text{Επίσης } x_n \in A,\ x_n \neq x \end{array}\right\} \Rightarrow B(x,\delta) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Άρα $x \in A'$

<u>Πόρισμα</u>: Αν $A \subseteq (X,d)$ πεπερασμένο, τότε το A <u>δεν</u> έχει σ.σ..

[Αν $x \in A' \Rightarrow \exists \delta > 0$ το $B(x,\delta) \cap A$ είναι <u>άπειρο</u> από το (β) της Πρότασης. Ειδικότερα, το A είναι άπειρο.]

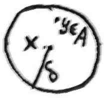
<u>Πρόταση 2</u>

Για κάθε $A \subseteq (X,d)$ $\quad \overline{A} = A \cup A'$

<u>Απόδειξη</u>: "$\subseteq$" Έστω $x \in \overline{A}$.

(i) Αν $x \in A$ έχουμε και $x \in A \cup A'$

(ii) Αν $x \notin A$ θ.δ.ο. $x \in A'$ οπότε $x \in A \cup A'$.



Έστω $\delta > 0$. Αφού $x \in \overline{A}$ $\boxed{\exists y \in A}$, $\boxed{y \in B(x,\delta)}$

Αφού $y \in A$ και $x \notin A \Rightarrow \boxed{y \neq x}$. Άρα $\forall \delta > 0 : B(x,\delta) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

"$\supseteq$" • $A \subseteq \overline{A}$ γνωστό

• $A' \subseteq \overline{A}$. Έστω $x \in A'$ και $\delta > 0$.

Έχουμε $B(x,\delta) \cap A \supseteq B(x,\delta) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, γιατί $x \in A'$

Άρα $B(x,\delta) \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow x \in \overline{A}$.

π.χ. (1)

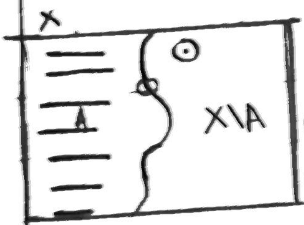
$\overline{A} = [0,1] \cup \{2\}$

$A = (0,1) \cup \{2\}$ και $A' = [0,1]$

(2) $\mathbb{Q}$

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ $\quad \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

Θεώρημα (δυϊσμός εσωτερικού και κλειστής θήκης)



Για κάθε $A \subseteq (X,d)$

(1) $X \setminus \bar{A} = (X \setminus A)^\circ$

(2) $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$

Απόδειξη: (1) $x \in X\setminus\bar{A} \iff x \notin \bar{A} \iff \exists \delta>0$ τ.ω. $B(x,\delta)\cap A = \emptyset \iff$
$\iff \exists \delta > 0$ τ.ω. $B(x,\delta) \subseteq X \setminus A \iff x \in (X\setminus A)^\circ$.

(2) $x \in X \setminus A^\circ \iff x \notin A^\circ \iff \forall \delta>0$ η $B(x,\delta)$ δεν περιέχεται στο A.
$\iff \forall \delta > 0 : B(x,\delta) \cap (X\setminus A) \neq \emptyset \iff x \in \overline{X\setminus A}$

Ορισμός: Έστω $A \subseteq (X,d)$. Το $x \in X$ λέγεται συνοριακό σημείο του A αν $\forall \delta>0$ $B(x,\delta)\cap A \neq \emptyset$ και $B(x,\delta)\cap(X\setminus A)\neq\emptyset$ (*)

Το σύνορο $\partial(A)$ ή $bd(A)$ είναι το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του A

Από τον ορισμό φαίνεται αμέσως ότι $\boxed{x\in\partial(A) \iff x \in \bar{A}\cap\overline{X\setminus A}}$

Δηλ. $\boxed{\partial(A) = \bar{A}\cap\overline{X\setminus A}}$. Ειδικότερα, το $\partial(A)$ είναι πάντα κλειστό.

Ασκήσεις

(30) Βασικές Ιδιότητες του συνόρου

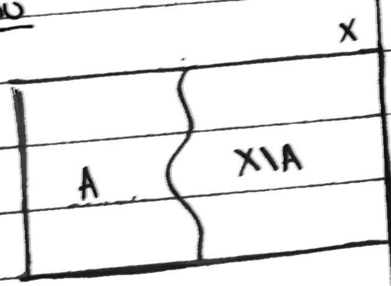
(α) $\partial(A) = \partial(X\setminus A)$

(β) $\bar{A} = \partial(A) \cup A^\circ$

(γ) $X = A^\circ \cup \partial(A) \cup (X\setminus A)^\circ$

(δ) $\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{X\setminus A}$

(ε) Το A είναι κλειστό $\iff \partial(A) \subseteq A$



Λύση: (δ) Το έχουμε δει

(α) $\partial(X\setminus A) \overset{(\delta)}{=} \overline{X\setminus A} \cap \underset{\overset{\|}{\bar A}}{\overline{(X\setminus A)^c}} = \overline{X\setminus A} \cap \bar A \overset{(\delta)}{=} \partial(A).$

(β) "$\supseteq$" $\left.\begin{array}{l} A^\circ \subseteq A \subseteq \bar A \\ \partial(A) \overset{(\delta)}{=} \bar A \cap \overline{X\setminus A} \subseteq \bar A \end{array}\right\} \Rightarrow A^\circ \cup \partial(A) \subseteq \bar A$

"$\subseteq$" Έστω $x\in \bar A$. Υποθέτουμε ότι $x\notin A^\circ$ και θ.δ.ο. $x\in\partial(A)$.

$\boxed{\text{Έστω } \delta>0}$ Αφού $x\in\bar A$ έχουμε $\boxed{B(x,\delta)\cap A\neq\emptyset}$

Αφού $x\notin A^\circ$ έχουμε "$B(x,\delta)$ δεν περιέχεται στο A" $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{B(x,\delta)\cap(X\setminus A)\neq\emptyset}$. Από τον ορισμό, $x\in\partial(A)$.

(γ) $\underbrace{A^\circ\cup\partial(A)}\cup(X\setminus A)^\circ \overset{(\beta)}{=} \bar A\cup(X\setminus A)^\circ = \bar A\cup(X\setminus\bar A) = X$.

Ξέραμε ότι $(X\setminus A)^\circ = X\setminus\bar A$, οπότε

(ε) ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι το A είναι κλειστό $\partial(A) \overset{(\beta)\text{ ή }(\delta)}{\subseteq} \bar A \underset{A\text{ κλειστό}}{=} A$

($\Leftarrow$) Από το (β): $\bar A = \partial(A)\cup A^\circ \underset{\text{υπόθ.}}{\subseteq} A\cup A^\circ \underset{A^\circ\subseteq A}{\subseteq} A\cup A = A$

Επίσης, πάντα ισχύει ότι $A\subseteq\bar A$

Άρα $\bar A = A \iff A$ κλειστό.

(24)
(α) $\bar A = A\cup A'$

καλό να θυμόμαστε

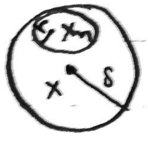
(β) Το A' είναι κλειστό σύνολο

(γ) Αν $A\subseteq B\subseteq X \Rightarrow A'\subseteq B'$

(δ) $A' = (\bar A)'$

(ε) $(A')'\subseteq A'$

Λύση: (β) Έστω $x_n\in A'$ και έστω ότι $x_n\to x$. Θ.δ.ο. $x\in A'$



Έστω $\delta>0$. Αφού $x_n\to x$ $\exists\, n\in\mathbb{N}$ τ.ω. $x_n\in B(x,\delta)$ ↳ ανοιχτό σύνολο

Υπάρχει $r>0$ τ.ω. $B(x_n,r)\subseteq B(x,\delta)$.

Αφού $x_n\in A'$ στην $B(x_n,r)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A

Άρα, στην $B(x,\delta)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A.

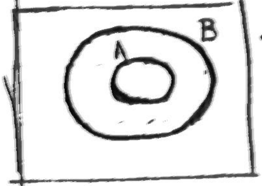
Αυτό σημαίνει ότι $x\in A'$.

(γ) Έστω $x \in A'$. Παίρνουμε τυχόν $\delta > 0$. Τότε:

$B(x,\delta) \cap A$ άπειρο σύνολο

$B(x,\delta) \cap A \subseteq B(x,\delta) \cap B$, γιατί $A \subseteq B$ $\Rightarrow$ $B(x,\delta) \cap B$ άπειρο σύνολο

Άρα $x \in B'$



$\leftarrow$ $\partial A \not\subseteq \partial B$ ενώ $A \subseteq B$

Η πρόοδος θα γίνει όταν έχουμε κάνει 2/3 της ύλης περίπου, δηλ. σε πέντε εβδομάδες από τώρα περίπου. (28/11 ή 4/12) Θα ανακοινωθεί δύο εβδομάδες πριν η ημερομηνία της προόδου.

(δ) "$\subseteq$" $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow A' \subseteq (\bar{A})'$

"$\supseteq$" Έστω $x \in (\bar{A})'$. Έστω $\delta > 0$. Υπάρχει $\underbrace{y \in \bar{A},\ y \neq x,\ y \in B(x,\delta)}_{\text{γιατί } x \in (\bar{A})'}$

Υπάρχει $r > 0$ με $r < d(y,x)$ ($\Rightarrow y \neq x$) τω. (*) $B(y,r) \subseteq B(x,\delta)$. Αφού $y \in \bar{A}$ $\exists z \in B(y,r)$, $z \in A$.

Τότε: ① $z \in B(y,r) \Rightarrow d(z,y) < r < d(x,y) \Rightarrow z \neq x$

② $z \in A$

③ $z \in B(y,r) \Rightarrow z \in B(x,\delta)$ από την (*)

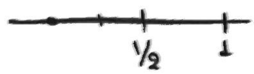
Άρα $x \in A'$.

Παρατήρηση

$\boxed{\bar{B} = B \cup B' \Rightarrow B' \subseteq \bar{B} = B}$

(ε) Από το (β) το A' είναι κλειστό. Αφού $B' \subseteq B$ για κάθε κλειστό σύνολο για $B = A'$ παίρνουμε $(A')' \subseteq A'$.

Παράδειγμα : $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$



$A' = 0$, $(A')' = \emptyset$, γιατί A' είναι πεπερασμένο

Άρα $(A')' \subseteq A'$

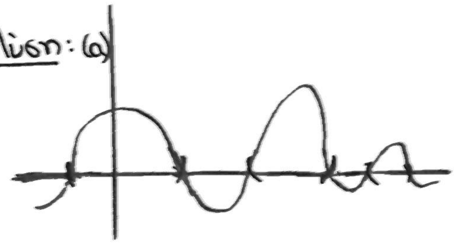
① $F, G \subseteq (X,d)$, G ανοικτό, F κλειστό.
Ν.δ.ο. $F \setminus G$ κλειστό και $G \setminus F$ ανοικτό.

Λύση: • $F \setminus G = \underset{\text{κλειστό}}{F} \cap \underset{\text{κλειστό ως συμπλήρωμα ανοικτού}}{G^c}$ = κλειστό ως τομή δύο κλειστών συνόλων

• $G \setminus F = \underset{\text{ανοικτό}}{G} \cap \underset{\text{ανοικτό, γιατί } F \text{ κλειστό}}{F^c}$ = ανοικτό ως τομή δύο ανοικτών συνόλων

③ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Ν.δ.ο.
(α) το $G = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ είναι ανοικτό
(β) το $F = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ είναι κλειστό

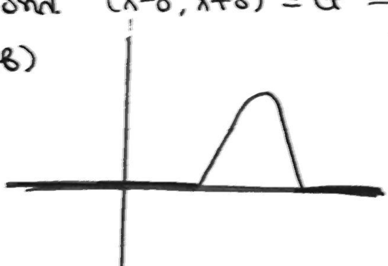
Λύση: (α)



Έστω $x \in G$. Τότε $f(x) > 0$.
Η f είναι συνεχής στο x, άρα $\exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall y \in (x-\delta, x+\delta)$ $|f(x) - f(y)| < \frac{f(x)}{2}$
$\Rightarrow 0 < \frac{f(x)}{2} < f(y) < \frac{3f(x)}{2} \Rightarrow 0 < f(y)$.

Δηλ. $\forall y \in (x-\delta, x+\delta)$ $y \in G$,
δηλ. $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G \Rightarrow x$ εσωτερικό σημείο του G

(β)



Έστω (x_n) στο F τ.ω. $x_n \to x \in \mathbb{R}$ (θ.δ.ο $x \in F$)
Έχουμε $\left.\begin{array}{l} \forall n \ f(x_n) = 0 \text{ (διότι } x_n \in F) \\ x_n \to x \xrightarrow{f \text{ συνεχής}} \underset{0}{f(x_n)} \to f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = 0$

Δεύτερος τρόπος: $\mathbb{R} \setminus F = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$
= ανοικτό ως ένωση δύο ανοικτών — ανοικτό το είδαμε — ανοικτό όμοια

④ Κάθε κλειστό διάστημα είναι αριθμήσιμη τομή αν. διαστ.
Κάθε ανοικτό — » — — » — ένωση κλ. διαστημάτων

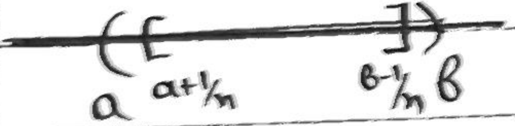
$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

<u>Λύση</u>: "$\subseteq$" - Απλό $\forall n \quad [\alpha,\beta] \subseteq \left(\alpha-\frac{1}{n}, \beta+\frac{1}{n}\right)$

"$\supseteq$" Έστω $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha-\frac{1}{n}, \beta+\frac{1}{n}\right) \; \forall n$

Για κάθε n, $x \in \left(\alpha-\frac{1}{n}, \beta+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \underset{\downarrow \alpha}{\alpha-\frac{1}{n}} < x < \underset{\downarrow \beta}{\beta+\frac{1}{n}} \Rightarrow \alpha \leq x \leq \beta$

$\Rightarrow x \in [\alpha,\beta]$.



Βρίσκω n_0 τ.ω. $\alpha+\frac{1}{n_0} < \alpha$