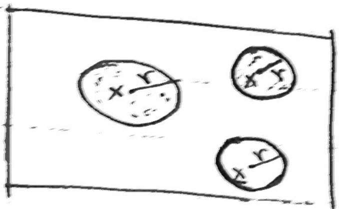
14/10/21

Τοπολογία Μετρικών Χώρων

Ορισμός: Έστω (X,d) μ.χ., $x\in X$, $r>0$.

- Η ανοικτή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα r:
$$B(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}.$$
- Η κλειστή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα r:
$$\hat{B}(x,r)=\{y\in X: d(x,y)\le r\}.$$
- Η σφαίρα με κέντρο το x και ακτίνα r
$$S(x,r)=\{y\in X: d(x,y)=r\}$$



$$\hat{B}(x,r)=B(x,r)\cup S(x,r)$$

Παραδείγματα

(1) Στον (X,δ) έχουμε $B(x,r)=\begin{cases}\{x\}, & \text{αν } 0<r<1\\ X, & \text{αν } r>1\end{cases}$

$$\hat{B}(x,r)=\begin{cases}X, & \text{αν } r>1\\ \{x\}, & \text{αν } 0<r<1\\ X, & \text{αν } r=1\end{cases} \qquad S(x,r)=\begin{cases}\emptyset, & \text{αν } r\neq 1\\ X\setminus\{x\}, & \text{αν } r=1\end{cases}$$

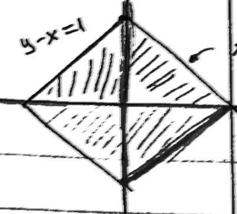
(2) Στον $(\mathbb{R},|\cdot|)$

- $B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}: |y-x|<r\}=(x-r,x+r)$
- $\hat{B}(x,r)=\{y\in\mathbb{R}: |y-x|\le r\}=[x-r,x+r]$
- $S(x,r)=\{x-r,x+r\}$

(3) Στον $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$

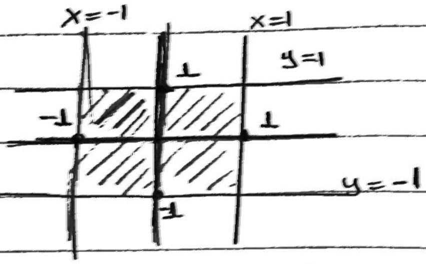
- $B_2(0,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \sqrt{x^2+y^2}<1\}$

- $B_1(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$



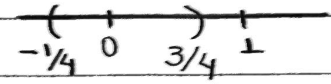
ρόμβος

- $B_\infty(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1,\ |y| < 1\}$



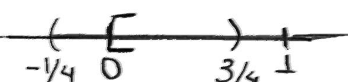
τετράγωνο

(4) $([0,1], |\cdot|)$ $\quad B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \left\{ y \in [0,1] : \left|y - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{2} \right\} =$

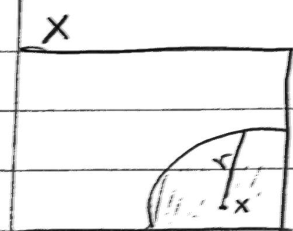


$= \left\{ y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1,\ -\frac{1}{4} < y < \frac{3}{4} \right\}$

Άρα



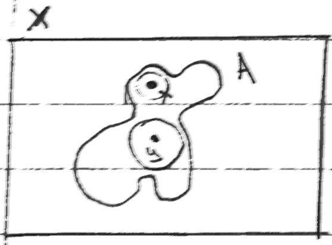
$= [0, 3/4)$.



Πρέπει τα σημεία της μπάλας να ανήκουν στον μ.χ.

Δύο ειδικές κλάσεις υποσυνόλων ενός μ.χ. (ανοικτά & κλειστά)

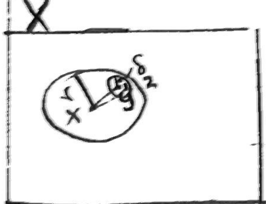
Ορισμός (εσωτερικό σημείο): Έστω (X,d) μ.χ. και $A \subseteq X$. Ένα σημείο x του A λέγεται εσωτερικό σημείο του A αν $\exists\, r > 0$ τ.ω. $B(x,r) \subseteq A$



Ορισμός (ανοικτό σύνολο): Ένα $A \subseteq (X,d)$ λέγεται **ανοικτό**, αν κάθε $x \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του A:
"$\forall x \in A \ \exists r>0$ τ.ω. $B(x,r) \subseteq A$."

Παραδείγματα

① Κάθε ανοικτή μπάλα $B(x,r)$, $x \in X$, $r>0$ είναι ανοικτό σύνολο



Απόδειξη: Έστω $y \in B(x,r)$. Ξέρουμε ότι $d(x,y)<r$.
Παίρνουμε $\delta = r - d(x,y)$. Θ.δ.ο. $B(y,\delta) \subseteq B(x,r)$.
Έστω $\boxed{z \in B(y,\delta)}$. Τότε

$$d(z,x) \leq \underbrace{d(z,y)}_{<\delta} + d(y,x) < \delta + d(y,x) = r$$

Άρα $\boxed{z \in B(x,r)}$

② Στον (X,δ) **κάθε** $A \subseteq X$ είναι ανοικτό.

Απόδειξη: Έστω $x \in A$. Τότε $B\left(x,\frac{1}{2}\right) = \{x\} \subseteq A$.
Άρα το x είναι εσωτερικό σημείο του A.
Αφού το $x \in A$ ήταν τυχόν, το A είναι ανοικτό.

③ Το $\mathbb{Q}$ **δεν** ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Έστω ότι είναι. Παίρνουμε τυχόντα $q \in \mathbb{Q}$.
Το q είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{Q} \Rightarrow \exists r>0$:
$B(q,r) = (q-r, q+r) \subseteq \mathbb{Q}$ **άτοπο**, γιατί $\exists$ άρρητος $\xi \in (q-r, q+r)$

④ Στον $[0,1]$ με τη συνήθη μετρική.

Το $[0,3/4) = B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ είναι ανοικτό

Στο $\mathbb{R}$ το $\left[0,\frac{3}{4}\right]$ δεν είναι ανοικτό ↙ έχει σημασία ο μ.χ.

<u>Πρόταση</u> (βασικές ιδιότητες της οικογένειας των ανοικτών συνόλων)

Έστω (X,d) μ.χ.

(α) Το ϕ και το X είναι ανοικτά σύνολα

(β) Αν $G_1, G_2, \ldots, G_n$ είναι ανοικτά σύνολα $\Rightarrow$
$\Rightarrow G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n$ είναι ανοικτό.

(γ) Αν $\{G_i, i\in I\}$ είναι οικογένεια ανοικτών συνόλων $\Rightarrow$
$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} G_i$ είναι ανοικτό σύνολο.

<u>Απόδειξη</u>: (α) X ανοικτό: Έστω $x\in X$. Παίρνουμε $r=1$ (οποιοδήποτε $r>0$).
Τότε $B(x,1)\subseteq X$, δηλ. το x είναι εσωτερικό σημείο του X.
ϕ ανοικτό: Έστω ότι δεν είναι. Τότε $\exists\, x\in\phi$ που δεν είναι εσωτερικό σημείο του ϕ ↳ <u>άτοπο</u>
[$x\in\phi \Rightarrow x$ εσ. σημείο του ϕ ⇝ η συνεπαγωγή ισχύει]

(β) Έστω $x\in G_1\cap G_2\cap\ldots\cap G_n$. Τότε: $x\in G_1 \overset{G_1\text{ αν.}}{\Longrightarrow} \exists\, r_1>0 : B(x,r_1)\subseteq G_1$

$x\in G_2 \overset{G_2\text{ αν.}}{\Longrightarrow} \exists\, r_2>0 : B(x,r_2)\subseteq G_2$

$\vdots$

$x\in G_n \overset{G_n\text{ αν.}}{\Longrightarrow} \exists\, r_n>0 : B(x,r_n)\subseteq G_n$

Θέτουμε $r=\min\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}>0$ $\boxed{\forall k\ r_k\geq r}$

Τότε $\forall k=1,\ldots,n$ $B(x,r)\subseteq B(x,r_k)\subseteq G_k \Rightarrow B(x,r)\subseteq G_1\cap\ldots\cap G_n$.

(γ) Έστω $G_i, i\in I$ ανοικτά. Έστω $x\in\bigcup_{i\in I} G_i \Rightarrow \exists\, i_0\in I$ τω. $x\in G_{i_0}$

Αφού το G_{i_0} είναι ανοικτό $\exists\, r>0$ τω.
$B(x,r)\subseteq G_{i_0}\subseteq\bigcup_{i\in I} G_i$. Άρα, το x είναι εσωτερικό σημείο του $\bigcup_{i\in I} G_i$

Παράδειγμα

Τομή άπειρων το πλήθος υποσυνόλων δεν είναι απαραίτητα ανοικτό σύνολο.

Στο $\mathbb{R}$

$G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ — ανοικτό , $n=1,2,\dots$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\} \Rightarrow$ ΔΕΝ είναι ανοικτό

Αν ήταν, αφού είναι μη-κενό, θα περιέχει διάστημα

Πρόταση (Περιγραφή των Ανοικτών Συνόλων μέσω Ακολουθιών)

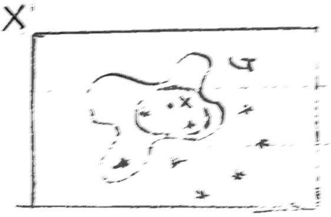
Έστω (X,d) μ.χ. και $G \subseteq X$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Το G είναι ανοικτό

(ii) Για κάθε ακολουθία x_n στο X η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in G$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\forall n \geq n_0$ $x_n \in G$

Απόδειξη: (i) $\Rightarrow$ (ii) Αφού $x \in G$ και το G είναι ανοικτό, $\exists r > 0$ τω. $B(x,r) \subseteq G$. Αφού $x_n \to x \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\forall n \geq n_0$ $d(x_n, x) < r \Rightarrow \forall n \geq n_0$ $x_n \in B(x,r) \subseteq G$ $\Rightarrow \forall n \geq n_0$ $x_n \in G$.

X



(ii) $\Rightarrow$ (i) Απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι το G δεν είναι ανοικτό.

$\exists x \in G$ που δεν είναι εσωτερικό σημείο του G. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall r > 0$ η $B(x,r)$ δεν περιέχεται στο G.

Εφαρμόζοντας το για $r = 1/n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ δεν περιέχεται στο $G \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x_n \in X : x_n \notin G$ και $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$

• Αφού: $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$ έχουμε $x_n \to x$ $\overset{\text{υπόθεση}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad x_n \in G$ <u>άτοπο</u> $(\forall n \quad x_n \notin G)$

<u>Ορισμός</u> (κλειστό σύνολο): Έστω (X, d) μ.χ. και $F \subseteq X$.
Λέμε ότι το F είναι <u>κλειστό</u>, αν το $X \setminus F$ είναι ανοικτό

<u>Πρόταση</u> (Βασικές Ιδιότητες της Οικογένειας των Κλειστών Συνόλων)

Έστω (X, d) μ.χ.
(α) Το $\emptyset$ και το X είναι κλειστά σύνολα.
(β) Αν $F_1, F_2, \ldots, F_n$ είναι κλειστά σύνολα $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ το $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$ είναι κλειστό.
(γ) Αν $\{F_i : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια κλειστών συνόλων $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ το $\bigcap_{i \in I} F_i$ είναι κλειστό σύνολο.

<u>Απόδειξη</u>: (α) Το $\emptyset$ είναι κλειστό, γιατί το $X \setminus \emptyset = X$ ανοικτό.
Το X είναι κλειστό, γιατί το $X \setminus X = \emptyset$ ανοικτό
(β) Έστω $F_1, F_2, \ldots, F_n$ κλειστά. Τότε τα $F_1^c, F_2^c, \ldots, F_n^c$ είναι ανοικτά $(F^c = X \setminus F)$ $\overset{\text{Πρόταση}}{\Longrightarrow}$ $F_1^c \cap F_2^c \cap \ldots \cap F_n^c$ ανοικτό $\Rightarrow$
$\Rightarrow \underbrace{(F_1^c)^c}_{F_1} \cup \ldots \cup \underbrace{(F_n^c)^c}_{F_n} = (F_1^c \cap \ldots \cap F_n^c)^c$ κλειστό

$\boxed{(A^c)^c = A}$

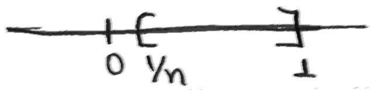
(γ) Έστω $F_i, i \in I$ κλειστά σύνολα. Τα $F_i^c, i \in I$ είναι ανοικτά
$\overset{\text{Πρόταση}}{\Longrightarrow} \bigcup_{i \in I} F_i^c$ ανοικτό $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} (F_i^c)^c = \left(\bigcup_{i \in I} F_i^c\right)^c$ κλειστό

Παράδειγμα (Άπειρη Ένωση κλειστών συνόλων δεν είναι απαραίτη-τα κλειστό σύνολο)

• $F_n = \left(-\infty, \frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, +\infty\right)$ − κλειστό

$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ − δεν είναι κλειστό γιατί $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c = \{0\}$ δεν είναι ανοικτό

•



$F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ $n \geq 2$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1] \rightarrow$ όχι κλειστό, γιατί το συμπλήρωμα όχι ανοικτό

Πρόταση (Περιγραφή των Κλειστών συνόλων μέσω Ακολουθιών)

Έστω (X, d) μ.χ. και $F \subseteq X$. Τα εξής είναι ισοδύναμα

(i) Το F είναι κλειστό σύνολο

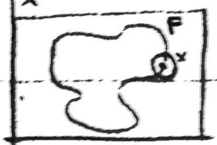
(ii) Για κάθε ακολουθία (x_n) στο F η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ ισχύει ότι $x \in F$.

Απόδειξη: (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω ότι $\exists\, (x_n)$ στο F τ.ω. $x_n \rightarrow x \notin F$.

Τότε $x \in X \setminus F$ και το $X \setminus F$ είναι ανοικτό.
Από γνωστή Πρόταση $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $x_n \in X \setminus F$
άτοπο, γιατί όλοι οι $x_n \in F$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Απαγωγή σε άτοπο.
Έστω ότι το F δεν είναι κλειστό σύνολο. Τότε το $X \setminus F$ δεν είναι ανοικτό. Υπάρχει $x \in X \setminus F$ που δεν είναι εσωτερικό σημείο του $X \setminus F$.

X

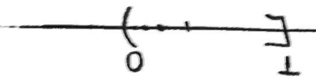


Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \not\subseteq X \setminus F$, δηλ. $\exists\, x_n \notin X \setminus F$ τ.ω. $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow x_n \in F$ και $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$

Τότε $\underline{x_n \in F}$ και $\underline{x_n \to x}$. Από την υπόθεση (ii) παίρνουμε ότι $x \in F$ <u>άτοπο</u>.

<u>Παραδείγματα</u>

① Το $(0,1]$ <u>δεν</u> είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.



$x_n = \frac{1}{2^n} \in (0,1]$ $\quad x_n = \frac{1}{2^n} \to 0 \notin (0,1]$

② Στον (X, δ) κάθε $A \subseteq X$ είναι κλειστό.

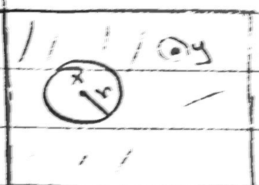
· Έστω $A \subseteq X$. Το $X \setminus A$ είναι ανοικτό (έχουμε δει ότι <u>όλα</u> τα $A \subseteq X$ είναι ανοικτά στον (X, δ))

$\overset{ορσ}{\Rightarrow}$ A κλειστό.

③ Κάθε κλειστή μπάλα $\hat{B}(x,r)$ είναι κλειστό σύνολο.

<u>α'-τρόπος</u>: Δ.ο. το $X \setminus \hat{B}(x,r) = \{y \in X : d(y,x) > r\}$ είναι ανοικτό

X



Έστω $y \in X \setminus \hat{B}(x,r) \Rightarrow d(y,x) > r$.

(*) Θα βρούμε $\delta > 0$ τ.ω. $B(y,\delta) \cap \hat{B}(x,r) = \emptyset$

$\Rightarrow B(y,\delta) \subseteq X \setminus \hat{B}(x,r) \Rightarrow y$ εσωτερικό σημείο του $X \setminus \hat{B}(x,r)$.

Ορίζουμε $\boxed{\delta = d(y,x) - r > 0}$. Έστω ότι $\exists z \in B(y,\delta) \cap \hat{B}(x,r)$.

Τότε $d(z,y) < \delta$ και $d(z,x) \le r$.

Άρα $d(y,x) \le d(y,z) + d(z,x) < \delta + r \Rightarrow \boxed{\delta > d(y,x) - r}$ <u>άτοπο</u>

<u>β'-τρόπος</u>: Παίρνουμε $x_n \in \hat{B}(x,r)$, υποθέτουμε ότι $x_n \to y \in X$ και δ.ο. $y \in \hat{B}(x,r)$.

· $d(x_n, x) \le r$ $\quad$ Ζητάμε $d(y,x) \le r$

· $x_n \to y \in X$

"$x \to x$"

$u_n \to u$

$v_n \to v$

$d(u_n, v_n) \to (u,v)$

Έχουμε $d(y,x) \leq d(y,x_n) + d(x_n,x) \leq d(y,x_n) + r \to 0 + r = r \Rightarrow$
$\Rightarrow d(y,x) \leq r$

$$\boxed{\text{Αν } a_n \geq b \text{ και } a_n \to a \Rightarrow a \geq b}$$

④ Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό, γιατί δεν περιέχει διάστημα

$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\in \mathbb{Q}} \to e \notin \mathbb{Q}$

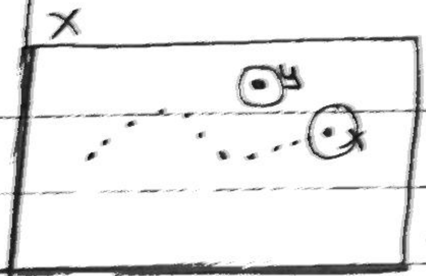
⑤ Το $[a,b]$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Έστω $x_n \in [a,b]$ με $x_n \to x \in \mathbb{R}$
$\Downarrow$
$\forall n \quad a \leq \underset{\downarrow x}{x_n} \leq b \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow x \in [a,b]$

⑥ Σε κάθε μ.χ. τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα.
Άρα όλα τα πεπερασμένα σύνολα είναι κλειστά.

- Έστω (x_n) στο $\{x\}$. Τότε $x_n = x \quad \forall n$.
  Αν $\underset{\overset{\|}{x}}{x_n} \to y \in X \Rightarrow y = x \in \{x\}$
- $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \underset{\text{κλειστό}}{\{x_1\}} \cup \underset{\text{κλειστό}}{\{x_2\}} \cup \ldots \cup \underset{\text{κλειστό}}{\{x_n\}} =$ κλειστό σύνολο ως πεπερασμένη ένωση κλειστών.

⑦ Έστω $x_n \to x$ στον (X,d).
Το σύνολο $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι κλειστό σύνολο.



Δ.ο. το $X \setminus F$ είναι ανοικτό

Έστω $y \in X \setminus F$

- $y \neq x \quad \exists \delta > 0 : B(y,\delta) \cap B(x,\delta) = \emptyset$ π.χ. $\delta = \dfrac{d(y,x)}{3}$
- $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad x_n \in B(x,\delta) \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad x_n \notin B(y,\delta)$
- $x_1, \dots, x_{n_0} \neq y$ (γιατί $y \notin F$) $\Rightarrow \exists \delta' > 0 : x_1, \dots, x_{n_0} \notin B(y,\delta')$.

Θέτουμε $r = \min\{\delta, \delta'\} > 0$. Τότε

$\rightarrow x \notin B(y,r) \Rightarrow B(y,r) \subseteq X \setminus F$

$\rightarrow \forall n \quad x_n \notin B(y,r)$