

①

Μάθημα 1

II] Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

α) Αν $A \subseteq X$ δείξτε ότι $\overline{X|A} = X|A^\circ$

β) i) Έστω $x_0 \in X$. Δείξτε ότι το $X| \{x_0\}$ είναι πυκνό στον X αν και μόνο αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του X

ii) Δώστε παράδειγμα μετρικού χώρου που δεν έχει κανένα οντόσιο πυκνό υποσύνολο.

γ) Έστω $A, B \subseteq X$ με το A να είναι κλειστό τέτοιο ώστε $A^\circ = B^\circ$. Δείξτε ότι $(A \cup B)^\circ = \emptyset$.

Λύση

α) Έστω $x \in X$. Ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:

1) Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq A \Leftrightarrow x \in A^\circ$
ή

2) $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap (X|A) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{X|A}$

Άρα τα σύνολα A° και $\overline{X|A}$ είναι ζένα κι έχουν ως ένωση τον X . Έπεται ότι $\overline{X|A} = X|A^\circ$.

β) i) Έστω ότι το $X| \{x_0\}$ είναι πυκνό στον X . Τότε, υπάρχει ακολουθία (x_n) στοιχείων του $X| \{x_0\}$ ώστε

(2)

$x_n \rightarrow x_0$, δηλαδή υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X με $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \rightarrow x_0$. Έρεται ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του X .

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του X , αλλά το $X \setminus \{x_0\}$ δεν είναι πυκνό. Τότε, $\overline{X \setminus \{x_0\}} \neq X \Leftrightarrow \{x_0\}^\circ \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\{x_0\} = B(x_0, \varepsilon)$. Έρεται ότι

$$B(x_0, \varepsilon) \cap (X \setminus \{x_0\}) = \{x_0\} \cap (X \setminus \{x_0\}) = \emptyset \text{ Απογο,}$$

αφού το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης.

ii) Ένα παράδειγμα τέτοιου χώρου είναι ο (X, δ) , όπου X μη κενό σύνολο και δ η διακριτή μετρική. Κάθε $A \subseteq X$ είναι ~~δ-κλειστό~~ δ -κλειστό, άρα έχουμε

$$A = \overline{A}. \text{ Αν το } A \text{ υποθεθεί γνήσιο υποσύνολο του } X \text{ βλέπουμε ότι δεν είναι πυκνό}$$

γ) Παρατηρούμε ότι η σχέση $(A \cup B)^\circ = \emptyset$ είναι ισοδύναμη με την $\overline{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)} = X$. Πράγματι, $(A \cup B)^\circ = \emptyset \Leftrightarrow X \setminus (A \cup B)^\circ = X \Leftrightarrow \overline{X \setminus (A \cup B)} = X \Leftrightarrow \overline{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)} = X$,

(3)

άρα αρκεί να δείξουμε ότι η τομή $(X|A) \cap (X|B)$ είναι πυκνή στον X .

Αφού $A^0 = B^0 = \emptyset$ έχουμε ότι

$X|A^0 = X \Leftrightarrow \overline{X|A} = X \Leftrightarrow$ Το $X|A$ είναι πυκνό στον X . Όμοια αποδεικνύεται και η πυκνότητα του $X|B$.

Το $X|A$ είναι επιπλέον ανοιχτό, άρα και η τομή $(X|A) \cap (X|B)$ είναι πυκνή στον X , όπως θέλαμε.

[2] Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$ μη κενό. Για κάθε $x \in X$ ορίσαμε

$$\text{dist}(x, A) = \inf \{ d(x, a) \mid a \in A \}.$$

Δείξτε ότι:

- $\text{dist}(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$
- Η $\text{dist}(\cdot, A): X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής
- Ένα $G \subseteq X$ είναι ανοιχτό αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $G = f^{-1}(0, +\infty)$

Πύση

- Παρατηρούμε ότι $\text{dist}(x, A) = 0 \Leftrightarrow$

(4)

$\Leftrightarrow \inf \{ d(x, a) \mid a \in A \} = 0 \Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει
 $a \in A$ με $d(x, a) < \varepsilon \Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon > 0$, $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$
 $\Leftrightarrow x \in \bar{A}$.

β) Έστω $x, y \in X$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε

$$\text{dist}(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

$$\Rightarrow \text{dist}(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$$

$$\Rightarrow \text{dist}(x, A) - d(x, y) \leq \text{dist}(y, A)$$

$$\Rightarrow \text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A) \leq d(x, y)$$

Με παρόμοιο τρόπο, $\text{dist}(y, A) - \text{dist}(x, A) \leq d(x, y)$.

Έπεται ότι $|\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$,

δηλαδή η $\text{dist}(\cdot, A)$ είναι Lipschitz (με σταθερά 1),
 άρα ομοιόμορφα συνεχής.

γ) Το αντίστροφο είναι άμεσο.

Έστω G ανοικτό $\subseteq X$. Θεωρούμε $F = X \setminus G$ και

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \text{dist}(x, F)$$

Η f είναι συνεχής και $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F$

(5)

Έσεται ότι $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in G$, δηλαδή $G = f^{-1}(10, +\infty)$.

[3] Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

- α) Αν $A, B \subseteq X$ με $A \cup B = X$, να αποδειχθεί ότι $\bar{A} \cup B^\circ = X$.
- β) i) Αν $A \subseteq X$, να δείχθεί ότι $\partial A = \emptyset$ αν και μόνο αν το A είναι ταυτόχρονα ανοιχτό και κλειστό.
- ii) Δώστε παράδειγμα μετρικού χώρου που έχει ορισμένο κενό υποσύνολο χωρίς συνοριακά σημεία.

γ) Έστω $(X, d), (Y, \sigma)$ μετρικοί χώροι, $f, g: X \rightarrow Y$ συνεχείς και $x_0 \in X$ ώστε $f(x_0) \neq g(x_0)$. Να δείχθεί ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in B(x_0, \delta)$.

Πύση

- α) Θα δείξουμε ότι αν $x \in X$ και $x \notin \bar{A}$, τότε $x \in B^\circ$.
Πράγματι, αν $x \notin \bar{A}$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$,
δηλαδή $B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A \subseteq B$, αφού $A \cup B = X$. Αυτό απο-
δεικνύει ότι $x \in B^\circ$.
- β) i) Αν $\partial A = \emptyset$, τότε $\bar{A} \setminus A^\circ = \emptyset$ κι αφού $A^\circ \subseteq \bar{A}$ έσεται
ότι $A^\circ = \bar{A}$, δηλαδή το A είναι ταυτόχρονα ανοιχτό
και κλειστό.

Αντίστροφα, αν το A είναι ανοιχτό και κλειστό, τότε
 $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = A \setminus A = \emptyset$

(6)

ii) Εφοδιάσαμε οποιοδήποτε σύνολο X με ταλλάχιστον 2 σημεία με τη διακριτή μετρική δ . Κάθε $A \subseteq X$ είναι δ -ανοιχτό και κλειστό, άρα έχει κενό σύνολο.

γ) Θέτουμε $\varepsilon = \frac{\sigma(f(x_0), g(x_0))}{4} > 0$. Τότε

$B_\sigma(f(x_0), \varepsilon) \cap B_\sigma(g(x_0), \varepsilon) = \emptyset$. Ο, f, g είναι συνεχείς στο x_0 , άρα υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ ώστε

$$f(B_\delta(x_0, \delta_1)) \subseteq B_\sigma(f(x_0), \varepsilon) \text{ και } g(B_\delta(x_0, \delta_2)) \subseteq B_\sigma(g(x_0), \varepsilon)$$

Επιλέγουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ κι έχουμε

$$f(B_\delta(x_0, \delta)) \cap g(B_\delta(x_0, \delta)) \subseteq B_\sigma(f(x_0), \varepsilon) \cap B_\sigma(g(x_0), \varepsilon) = \emptyset.$$

Έστω ότι για κάθε $x, t \in B(x_0, \delta)$ ισχύει $f(x) \neq g(t)$.

4) α) Έστω $(X, d), (Y, \sigma)$ μετρικοί χώροι και $f: X \rightarrow Y$ συνεχής και επί συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$d(x, t) \leq \sigma(f(x), f(t)), \quad x, t \in X.$$

Αποδείξτε ότι: i) Η f είναι ομομορφισμός

ii) Αν επιπλέον υποθέσαμε ότι ο X είναι πλήρης, τότε και ο Y είναι πλήρης.

β) Στο $\mathbb{Q}$ εφοδιασμένο με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής από το $\mathbb{R}$, βρείτε μία ακολουθία (ζ_n) ανοιχτών

(7)

και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{Q}$ με $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$

Πύση

α) i) Δείχναμε αρχικά ότι η f είναι 1-1. Έστω $x \neq y \in X$. Έχουμε $0 < d(x, y) \leq \sigma(f(x), f(y))$, άρα $f(x) \neq f(y)$ και η f είναι 1-1. Στην συνέχεια δείχναμε ότι αν (x_n) είναι μία ακολουθία στον X τότε

$$x_n \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x)$$

Το εδώ είναι άμεσο λόγω της συνέχειας της f .

Για το αντίστροφο, $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x) \Leftrightarrow \sigma(f(x_n), f(x)) \rightarrow 0$.

Όμως, $d(x_n, x) \leq \sigma(f(x_n), f(x))$, άρα $d(x_n, x) \rightarrow 0$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{d} x$.

ii) Έστω (y_n) ακολουθία Cauchy στον Y . Η f είναι επί, άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ με $f(x_n) = y_n$. Επίσης, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: για κάθε $m, n \geq n_0$

$d(x_m, x_n) \leq \sigma(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$, άρα η (x_n) είναι Cauchy στον X . Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \rightarrow x$. Από τη συνέχεια της f έπεται ότι $f(x_n) \rightarrow f(x)$, δηλαδή η (y_n) είναι συγκλίνουσα. Έπεται ότι ο Y είναι πλήρης.

β) Έστω $\{q_n / n \in \mathbb{N}\}$ μια αριθμηση του $\mathbb{Q}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$

⑧

ορίσαμε $G_n = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{n}\}$, τα οποία είναι ανοιχτά και
 άδεια στο $\mathbb{Q}$. Όμως,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{n}\} = \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q} = \emptyset.$$

5) α) Στο $X = [1, +\infty)$ θεωρούμε τη μετρική $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίσαμε $F_n = [n, +\infty)$. Είναι κλειστά?

Υπολογίστε την $\text{diam}(F_n)$. Είναι ο (X, d) πλήρης;

β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ συνεχής και
 επί. Δείξτε ότι υπάρχουν μη κενά ανοιχτά $G_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$
 ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ και η $f|_{G_n}$ είναι σταθερή για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

γ) Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $f: X \rightarrow \mathbb{Q}$
 συνεχής. Να δείχθεί ότι υπάρχει μη κενό ανοιχτό $G \subseteq X$
 ώστε η $f|_G$ να είναι σταθερή.

Πύση

α) Η d είναι ισοδύναμη με τον περιορισμό της συνήθους
 μετρική στο X . Πράγματι, έστω $(x_n) \subseteq X$ και $x \in X$. Τότε
 $x_n \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow |\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{x} \Leftrightarrow x_n \rightarrow x$ (για $x_n, x \neq 0$).

Τα F_n είναι κλειστά στη συνήθη μετρική, άρα είναι και
 d -κλειστά. Για τη διάμετρο των F_n έχουμε

$$\text{diam}(F_n) = \sup \left\{ \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| : x, y \geq n \right\} = \frac{1}{n}, \text{ αφού } n$$

(9)

$x \mapsto \frac{1}{x}$, $x > 0$ είναι φθίνουσα. Έτσι, η ακολουθία των d -κλειστών, μη κενών συνόλων (F_n) είναι φθίνουσα και ικανοποιεί $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$. Αν ο (X, d) ήταν πλήρης, θα υπήρχε $x \in X$ με $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$ (Cantor-Fréchet). Όμως, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \emptyset$, άρα ο X δεν είναι πλήρης.

β) Γράψαμε $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma n \mathbb{Z}$ και παρατηρούμε ότι κάθε μονοσύνολο είναι ανοιχτό ($\Sigma n \mathbb{Z} = (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) \cap \mathbb{N}$). Ορίζουμε $G_n = f^{-1}(\Sigma n \mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{N}$. Κάθε G_n είναι μη κείο αφού η f είναι επί και ανοιχτό αφού η f είναι συνεχής. Επίσης, $X = f^{-1}(\mathbb{N}) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma n \mathbb{Z}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\Sigma n \mathbb{Z}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Είναι άμεσο από τον ορισμό των G_n ότι $f|_{G_n} = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

γ) Έστω $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Ορίζουμε

$F_n = f^{-1}(\Sigma \varphi_n \mathbb{Z})$, τα οποία είναι κλειστά στον X αφού η f είναι συνεχής. Όπως πάνω, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Ο X είναι πλήρης, άρα από το Θεώρημα Βαίρε, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $F_k^{\circ} \neq \emptyset$. Ορίζουμε $G = F_k^{\circ}$ και παρατηρούμε ότι η $f|_G$ είναι σταθερή.

- 6) α) Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f: X \rightarrow X$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X με την ιδιότητα $d(x_n, f(x_n)) \rightarrow 0$. Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in X$ με $f(x_0) = x_0$.
- β) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής κι εξετάστε αν είναι κατ'ανάγκη Lipschitz.
- γ) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής και 1-1 συνάρτηση $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$.

Πύση

- α) Ο X είναι συμπαγής, άρα υπάρχει υποακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) και $x_0 \in X$ ώστε $x_{k_n} \rightarrow x_0$. Η f είναι συνεχής, άρα $f(x_{k_n}) \rightarrow f(x_0)$. Η ακολουθία $(d(x_{k_n}, f(x_{k_n})))$ συγκλίνει στο $d(x_0, f(x_0))$ και είναι υποακολουθία της $d(x_n, f(x_n))$ που συγκλίνει στο 0. Έπεται ότι $d(x_0, f(x_0)) = 0$, δηλαδή $f(x_0) = x_0$.
- β) Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέξαμε $\delta = 1$ κι έχουμε ότι αν $m, n \in \mathbb{N}$ με $|m - n| < 1$, τότε $m = n$, άρα $|f(m) - f(n)| = 0 < \varepsilon$, δηλαδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
- Δεν είναι όλες οι συναρτήσεις $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ Lipschitz συνεχείς.
- Θεωρούμε $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$
 $n \mapsto n^2$
- Έστω ότι υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ ισχύει

11

$|m^2 - n^2| \leq C |m - n|$. Τότε $|m - n| \cdot |m + n| \leq C |m - n|$
κι αν $m \neq n$, έχουμε $|m + n| \leq C$, για κάθε $m \neq n \in \mathbb{N}$,
το οποίο είναι άτοπο.

δ) Έστω πως υπάρχει $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ συνεχής και 1-1.

Θεωρούμε την ακολουθία $\frac{1}{n}$. Τότε,

$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow g\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow g(0)$. Η $\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ είναι συγκλινούσα

ακολουθία στο $\mathbb{N}$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε
 $n \geq n_0$, $g\left(\frac{1}{n}\right) = g(0)$. Άτοπο, αφού η g είναι 1-1,