Άπειρο γινόμενο μετρικών χώρων.

Έστω (X_i, d_i), $i = 1, 2, \dots$ ακολουθία μετρικών χώρων ώστε $d_i(x, y) \leqslant 1$ για κάθε $x, y \in X_i$, $i = 1, 2, \dots$. Στο $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ ορίζουμε τη *μετρική* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x(i), y(i)),$$

όπου $x = (x(1), x(2), \dots)$, $y = (y(1), y(2), \dots)$ με $x(i), y(i) \in X_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots$.

Η d είναι πράγματι μετρική και μπορούμε να ελέγξουμε ότι είναι *μετρική γινόμενο*, δηλαδή η σύγκλιση ως προς την d είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση κατά συντεταγμένη (Άσκηση).

Βασικές ακολουθίες και φραγμένες ακολουθίες

Ο ορισμός της ακολουθίας Cauchy (ή βασικής ακολουθίας) πραγματικών αριθμών γενικεύεται κι αυτός άμεσα στο πλαίσιο των μετρικών χώρων.

Ορισμός. Έστω (x_n) μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Λέμε ότι η (x_n) είναι *βασική* (ή Cauchy) αν:
για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε
αν $m, n \geqslant n_0$ τότε $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Πρόταση. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη. Έστω (x_n) συγκλίνουσα ακολουθία. Τότε, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \xrightarrow{\rho} x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant n_0$ τότε $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Έστω $m, n \geqslant n_0$. Τότε,

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Συνεπώς, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Ορισμός. Έστω (x_n) μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Λέμε ότι η (x_n) είναι *φραγμένη* αν το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει $C > 0$ ώστε $\rho(x_m, x_n) \leqslant C$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε, κάθε βασική ακολουθία στον X είναι φραγμένη.

Ειδικότερα, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (X,ρ). Τότε, υπάρχει $n_0 > 1$ ώστε αν $m, n \geqslant n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, x_m) < 1$. Ειδικότερα, $\rho(x_n, x_{n_0}) < 1$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Θέτουμε

$$C = \max\{\rho(x_1, x_{n_0}), \ldots, \rho(x_{n_0-1}, x_{n_0}), 1\} > 0.$$

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\rho(x_n, x_{n_0}) \leqslant C.$$

Από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι

$$\sup\{\rho(x_m, x_n) : m, n \in \mathbb{N}\} \leqslant 2C.$$

Συνεπώς, η (x_n) είναι φραγμένη.

Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από τον πρώτο, αφού κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι βασική.

Παρατηρήσεις

(α) Υπενθυμίζουμε ότι στο $\mathbb{R}$ (δηλαδή στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$) ισχύει ότι κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.
Υπάρχουν όμως παραδείγματα μετρικών χώρων στους οποίους δεν συγκλίνουν όλες οι βασικές ακολουθίες.
(i) Ένα παράδειγμα είναι ο χώρος $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ των ρητών με τη συνήθη μετρική: η ακολουθία (q_n) όπου $q_n = (1+\frac{1}{n})^n$, ενώ είναι βασική, δεν συγκλίνει σε ρητό αριθμό.

(ii) Για ένα άλλο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το χώρο $(\mathbb{R}, \rho)$ με τη μετρική

$$\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

όπου $f(t) = \frac{t}{|t|+1}$. Παρατηρήστε ότι η f είναι 1-1 από το $\mathbb{R}$ επί του $(-1,1)$. Τότε η ακολουθία $x_n = n$ είναι ρ-βασική αλλά δεν είναι ρ-συγκλίνουσα.
Πράγματι, επειδή η $(f(n))$ με $f(n) = \frac{n}{n+1}$ συγκλίνει στο 1 ως προς τη συνήθη μετρική, είναι και $|\cdot|$-βασική, δηλαδή

$$\rho(n,m) = |f(n) - f(m)| \to 0 \quad \text{καθώς } m, n \to \infty.$$

Αλλά, η (x_n) δεν είναι ρ-συγκλίνουσα, διότι αν ήταν τότε θα υπήρχε $x \in \mathbb{R}$ ώστε $\rho(n,x) \to 0$. Από την άλλη πλευρά, αφού $f(n) \to 1$,

$$\rho(n,x) = |f(n) - f(x)| \to |1 - f(x)|.$$

Όμως τότε, $|1 - f(x)| = 0$, δηλαδή $\frac{x}{|x|+1} = 1$. Αυτό είναι άτοπο.

Οι μετρικοί χώροι στους οποίους κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει λέγονται **πλήρεις μετρικοί χώροι**.

(β) Είναι πολύ απλό να δώσουμε παραδείγματα μετρικών χώρων στους οποίους υπάρχουν φραγμένες ακολουθίες που δεν είναι βασικές. Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, η $x_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά δεν είναι βασική, αφού $|x_n - x_{n+1}| = 2$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

Υπακολουθίες

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω (x_n) μια ακολουθία στον X. Αν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τότε η (x_{k_n}) λέγεται **υπακολουθία** της (x_n).

Παρατήρηση

Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, έχουμε ότι $k_n \geqslant n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού γίνεται με επαγωγή.

Αποδεικνύεται, ακριβώς όπως στην περίπτωση των ακολουθιών πραγματικών αριθμών, ότι αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε για κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ισχύει $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$ (Άσκηση). Ένα άλλο αποτέλεσμα που μεταφέρεται χωρίς καμιά δυσκολία από το πλαίσιο των πραγματικών αριθμών σε αυτό των μετρικών χώρων είναι το εξής:

Πρόταση. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω (x_n) ακολουθία στον X. Αν η (x_n) είναι βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε συγκλίνει.

Απόδειξη. Έστω ότι η (x_n) είναι βασική και ότι $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$, όπου η (x_{k_n}) είναι υπακολουθία της (x_n).

Ισχυρισμός. Η (x_n) συγκλίνει στο x.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η (x_n) είναι βασική έχουμε ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{αν} \quad n, m \geqslant n_1.$$

Επιπλέον, $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$, άρα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\rho(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{αν} \quad n \geqslant n_2.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Παρατηρήστε ότι αν $n \geqslant n_0$ τότε $k_n \geqslant n \geqslant n_0$, οπότε $n, k_n \geqslant n_1$ και $n \geqslant n_2$. Συνεπώς,

$$\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ισχύει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται στην περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου οποιασδήποτε διάστασης, όχι όμως και σε κάθε μετρικό χώρο.

Θεώρημα. Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$ (με την Ευκλείδεια μετρική) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη. Έστω $x_n = (x_n(1), \ldots, x_n(m))$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$. Αν η (x_n) είναι φραγμένη, τότε η $(x_n(1))$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Από το αντίστοιχο αποτέλεσμα στο $\mathbb{R}$, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n}(1))$:

$$x_{k_n}(1) \to x_1.$$

Η υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) έχει λοιπόν συγκλίνουσα την ακολουθία της πρώτης συντεταγμένης.

Η $(x_{k_n}(2))$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}}(2))$:

$$x_{k_{\lambda_n}}(2) \to x_2.$$

Παρατηρήστε ότι

$$x_{k_{\lambda_n}}(1) \to x_1,$$

διότι η $x_{k_n}(1) \to x_1$ και η $(x_{k_{\lambda_n}}(1))$ είναι υπακολουθία της $x_{k_n}(1)$.
Άρα, η υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}})$ έχει συγκλίνουσα πρώτη και δεύτερη συντεταγμένη. Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο μέχρι την m-οστή συντεταγμένη και παίρνοντας m διαδοχικές υπακολουθίες της (x_n) βρίσκουμε υπακολουθία της η οποία έχει κάθε συντεταγμένη της συγκλίνουσα. Έχουμε δείξει ότι η σύγκλιση ακολουθίας στον Ευκλείδειο χώρο είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση κατά συντεταγμένη, συνεπώς η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Παρατήρηση. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται ότι το ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει σε κάθε χώρο $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$, όπου $1 \leq p \leq +\infty$.

Σε τυχόντα μετρικό χώρο το Θεώρημα αυτό δεν ισχύει κατ″ ανάγκην, όπως φαίνεται και από τα ακόλουθα παραδείγματα:

Παραδείγματα. (α) Θεωρούμε το χώρο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ των μηδενικών ακολουθιών με τη μετρική που επάγεται από την supremum νόρμα: αν $x = (x_n)$ και $y = (y_n)$ τότε

$$d_\infty(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Σε αυτό το χώρο θεωρούμε την ακολουθία (e_n) όπου

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0,\ldots) \\ e_2 &= (0,1,0,0,\ldots) \\ e_3 &= (0,0,1,0,\ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

η οποία είναι φραγμένη αφού $d_\infty(e_n, e_m) = \|e_n - e_m\|_\infty = 1$ αν $n \neq m$. Η ίδια ισότητα δείχνει ότι η (e_n) δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία:
Αν είχε, οι όροι της υπακολουθίας θα έπρεπε τελικά να απέχουν απόσταση μικρότερη από 1.

(β) Ένα ακόμα πιο απλό παράδειγμα παίρνουμε αν θεωρήσουμε τη διακριτή μετρική δ σε ένα άπειρο σύνολο, για παράδειγμα το $\mathbb{N}$. Η ακολουθία $x_n = n$ στον $(\mathbb{N}, \delta)$ είναι φραγμένη αλλά δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, αφού, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, δύο διαφορετικοί όροι της απέχουν πάντα απόσταση ίση με 1.

Παρατήρηση

Παρατηρήστε ότι στα προηγούμενα παραδείγματα οι φραγμένες ακολουθίες που θεωρούμε δεν έχουν καν βασική υπακολουθία. Αν θέλουμε απλώς ένα παράδειγμα φραγμένης ακολουθίας σε μετρικό χώρο, η οποία δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, μπορούμε να θεωρήσουμε την ακολουθία $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ στον μετρικό χώρο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ή και την $y_n = \frac{1}{n}$ στον μετρικό χώρο $\Big((0,1), |\cdot|\Big)$.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.2. *Έστω (x_n) και (y_n) βασικές ακολουθίες στο μετρικό χώρο (X,ρ). Δείξτε ότι η $\alpha_n = \rho(x_n, y_n)$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι βασική, άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ για κάθε $n, m \geqslant n_1$. Ομοίως, η (y_n) είναι βασική, άρα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(y_n, y_m) < \varepsilon/2$ για κάθε $n, m \geqslant n_2$.
Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ και παρατηρούμε ότι: αν $n, m \geqslant n_0$, τότε

$$|\alpha_n - \alpha_m| = |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Συνεπώς, η (α_n) είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 2.3. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Θεωρούμε την ακολουθία $\{E_n\}$ υποσυνόλων του X με*

$$E_n = \{x_k : k \geqslant n\},\ n = 1,2,\ldots$$

και την ακολουθία

$$t_n = \sup\{\rho(x_k, x_n) : k \geqslant n\} \in [0,+\infty],\ n = 1,2,\ldots$$

Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η (x_n) είναι βασική.

(β) $\operatorname{diam}(E_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(γ) $t_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Απόδειξη

Παρατηρούμε αρχικά ότι η ακολουθία υποσυνόλων (E_n) είναι φθίνουσα, δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $E_n \supseteq E_{n+1}$.

Επομένως ισχύει και $\operatorname{diam}(E_n) \geq \operatorname{diam}(E_{n+1})$, δηλαδή η (πραγματική) ακολουθία $\Big(\operatorname{diam}(E_n)\Big)$ είναι φθίνουσα.

Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύουν:

$$t_n = \sup\{\rho(x_k, x_n) : k \geqslant n\} \leq \sup\{\rho(x_k, x_m) : k, m \geqslant n\} = \operatorname{diam}(E_n)$$

και, για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$ με $k, m \geq n$,

$$\rho(x_k, x_m) \leq \rho(x_k, x_n) + \rho(x_n, x_m) \leq 2t_n$$

άρα,

$$t_n \leq \operatorname{diam}(E_n) \leq 2t_n. \tag{1}$$

Έχουμε λοιπόν:

(α) $\Rightarrow$ (β). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική,
υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geqslant n_0$.

Έπεται ότι $\mathrm{diam}(E_{n_0}) \leq \varepsilon$ και, αφού η ακολουθία $\Big(\mathrm{diam}(E_n)\Big)$ είναι φθίνουσα, έπεται ότι

$$\mathrm{diam}(E_n) \leq \varepsilon, \quad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(β) $\Rightarrow$ (γ). Είναι

$$0 \leq t_n \leq \mathrm{diam}(E_n),$$

επομένως αν $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}(E_n) = 0$, τότε και $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$.

(γ) $\Rightarrow$ (α). Από την (1) έχουμε

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $t_n < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Από την (1) έχουμε $\mathrm{diam}(E_n) \leq 2t_n$, άρα, για κάθε $n, m \geq n_0$, ισχύει

$$\rho(x_n, x_m) \leq \mathrm{diam}(E_n) \leq 2t_{n_0} < \varepsilon.$$

Έπεται ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία.

Άσκηση 2.4. *Έστω* (x_n) *ακολουθία στο μετρικό χώρο* (X,ρ) *και έστω* $x \in X$. *Δείξτε ότι:*

(α) *Αν η* (x_n) *συγκλίνει στο* x *τότε κάθε υπακολουθία* (x_{k_n}) *της* (x_n) *συγκλίνει στο* x.

(β) *Αν κάθε υπακολουθία της* (x_n) *έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο* x, *τότε η* (x_n) *συγκλίνει στο* x.

Απόδειξη. (α) Έστω (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n) και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) συγκλίνει στο x, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m \geqslant n_0$, $\rho(x_m, x) < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι: αν $n \geqslant n_0$ τότε $k_n \geqslant n \geqslant n_0$. Συνεπώς, $\rho(x_{k_n}, x) < \varepsilon$. Δηλαδή, η (x_{k_n}) συγκλίνει στο x.

(β) Υποθέτουμε ότι η (x_n) δεν συγκλίνει στο x. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $s \geqslant m$ ώστε $\rho(x_s, x) \geqslant \varepsilon$.

Ορίζουμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ως εξής: θέτουμε $m = 1$ και επιλέγουμε $k_1 \geqslant 1$ ώστε $\rho(x_{k_1}, x) \geqslant \varepsilon$. Θέτουμε $m = k_1 + 1$ και επιλέγουμε $k_2 \geqslant k_1 + 1 > k_1$ ώστε $\rho(x_{k_2}, x) \geqslant \varepsilon$. Συνεχίζουμε επαγωγικά: αν έχουμε επιλέξει $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ ώστε $\rho(x_{k_j}, x) \geqslant \varepsilon$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$, θέτουμε $m = k_n + 1$ και επιλέγουμε $k_{n+1} \geqslant k_n + 1 > k_n$ ώστε $\rho(x_{k_{n+1}}, x) \geqslant \varepsilon$.

Η υπακολουθία (x_{k_n}) δεν έχει υπακολουθία η οποία να συγκλίνει στο x, διότι όλοι οι όροι της έχουν απόσταση τουλάχιστον ίση με ε από το x. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

Άσκηση 2.9. *Έστω* $1 \leqslant p < \infty$ *και* $x = (x(k))_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p$. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ορίζουμε* $x_n \in \ell_p$ *με*

$$x_n = (x(1), \ldots, x(n), 0, 0, \ldots).$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p = 0$. *Ισχύει το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον* ℓ_∞;

Απόδειξη. Η ακολουθία $x \in \ell_p$, άρα $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < +\infty$. Έπεται (οι «ουρές» συγκλίνουσας σειράς τείνουν στο 0) ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)|^p = 0.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $x - x_n = (0, \ldots, 0, x(n+1), x(n+2), \ldots)$, οπότε

$$\|x - x_n\|_p^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)|^p \to 0.$$

Στον ℓ_∞ δεν έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα: αν θεωρήσουμε τη σταθερή ακολουθία $x = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ τότε $x - x_n = (0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\|x - x_n\|_\infty = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_\infty = 1 \neq 0.$$

Άσκηση 2.10. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει στο $x \in X$ αν και μόνο αν η ακολουθία*

$$(y_n) = (x_1, x, x_2, x, x_3, x, \dots, x_n, x, \dots)$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Η ακολουθία (y_n) έχει οριστεί ως εξής: $y_{2k-1} = x_k$ και $y_{2k} = x$, $k \in \mathbb{N}$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $k \geqslant k_0$ τότε $\rho(x_k, x) < \varepsilon$. Θέτουμε $n_0 = 2k_0 - 1$ και θεωρούμε $n \geqslant n_0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $n = 2k$ τότε $\rho(y_n, x) = \rho(x, x) = 0 < \varepsilon$.
2. Αν $n = 2k-1$ τότε $2k-1 \geqslant n_0 = 2k_0 - 1$, δηλαδή $k \geqslant k_0$. ’ρα, $\rho(y_n, x) = \rho(x_k, x) < \varepsilon$.

Είδαμε ότι $\rho(y_n, x) < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$. ’ρα, $y_n \to x$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $y_n \to y$ για κάποιο $y \in X$. Τότε, $y_{2k} \to y$. Όμως, η (y_{2k}) είναι σταθερή και ίση με x, άρα $y = x$. Τώρα, από την $y_n \to x$ βλέπουμε ότι $y_{2k-1} \to x$, άρα $x_k \to x$.

Άσκηση 2.14. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Δείξτε ότι η (x_n) έχει βασική υπακολουθία αν και μόνο αν έχει υπακολουθία (x_{k_n}) με την ιδιότητα $\rho(x_{k_n},x_{k_{n+1}})<\frac{1}{2^n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η (x_n) έχει βασική υπακολουθία (x_{t_n}).
Θα βρούμε υπακολουθία της (x_{t_n}) με τη ζητούμενη ιδιότητα, δηλαδή θα βρούμε υπακολουθία $(x_{t_{s_n}})$ της (x_{t_n}) η οποία ικανοποιεί την

$$\rho(x_{t_{s_{n+1}}},x_{t_{s_n}})<\frac{1}{2^n}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$.
Θέτουμε $\varepsilon=\frac{1}{2}$ και βρίσκουμε $s_1\in\mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_{t_k},x_{t_m})<\frac{1}{2}$ για κάθε $k,m\geqslant s_1$.
Στη συνέχεια θέτουμε $\varepsilon=\frac{1}{2^2}$ και βρίσκουμε $s_2>s_1$ ώστε $\rho(x_{t_k},x_{t_m})<\frac{1}{2^2}$ για κάθε $k,m\geqslant s_2$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά: στο n-οστό βήμα θέτουμε $\varepsilon=\frac{1}{2^n}$ και βρίσκουμε $s_n>s_{n-1}$ ώστε $\rho(x_{t_k},x_{t_m})<\frac{1}{2^n}$ για κάθε $k,m\geqslant s_n$.

Θεωρούμε την υπακολουθία $(x_{t_{s_n}})$. Από τον τρόπο ορισμού των s_n βλέπουμε ότι: για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε $s_{n+1},s_n\geqslant s_n$, άρα $\rho(x_{t_{s_{n+1}}},x_{t_{s_n}})<\frac{1}{2^n}$.

Αφού η $(x_{t_{s_n}})$ είναι υπακολουθία της (x_n), έχουμε το ζητούμενο (με $k_n=t_{s_n}$).

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) με την ιδιότητα: για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $\rho(x_{k_{n+1}},x_{k_n})<\frac{1}{2^n}$. Τότε, η (x_{k_n}) είναι βασική ακολουθία. Πράγματι, αν $m>n$ έχουμε

$$\rho(x_{k_n},x_{k_m})\leqslant\rho(x_{k_n},x_{k_{n+1}})+\cdots+\rho(x_{k_{m-1}},x_{k_m})<\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}<\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Συνεπώς, για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$, αν επιλέξουμε $n_0\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{2^{n_0-1}}<\varepsilon$, έχουμε: για κάθε $m>n\geqslant n_0$,

$$\rho(x_{k_m},x_{k_n})<\frac{1}{2^{n_0-1}}<\varepsilon.$$

Συνεχείς συναρτήσεις

Υπενθυμίζουμε τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας για πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού υποσύνολο του $\mathbb{R}$:

Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$, τότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\text{αν } x \in A \text{ και } |x - x_0| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο A αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$. Η γενίκευση του ορισμού της συνέχειας στο πλαίσιο των μετρικών χώρων είναι άμεση:

Ορισμός

Έστω (X, ρ) και (Y, σ) δύο μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται *συνεχής στο* $x_0 \in X$ αν

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \equiv \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ ώστε:
αν $x \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται συνεχής στον X αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X. Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, το συμβολίζουμε με $\mathcal{C}(X, Y)$. Ειδικότερα, αν $Y = \mathbb{R}$ γράφουμε $\mathcal{C}(X)$ αντί του $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Παραδείγματα

(α) Έστω δ η διακριτή μετρική σε ένα μη κενό σύνολο X και έστω (Y, σ) τυχών μετρικός χώρος. Κάθε συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $f : (X, \delta) \to (Y, \sigma)$ τυχούσα συνάρτηση και έστω $x_0 \in X$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Πράγματι: έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\eta = \frac{1}{2} > 0$. Από τον ορισμό της δ, αν $x \in X$ και $\delta(x, x_0) < \eta = \frac{1}{2}$ τότε $x = x_0$, άρα $f(x) = f(x_0)$ και $\sigma(f(x), f(x_0)) = 0 < \varepsilon$.

(β) Κάθε ακολουθία $f : \mathbb{N} \to X$ είναι συνεχής συνάρτηση. (Άσκηση) (γ) Η ταυτοτική συνάρτηση $I : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c_{00}, \|\cdot\|_2)$ *δεν* είναι συνεχής.

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι η άρνηση του ορισμού της συνέχειας μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ στο $x_0 \in X$ διατυπώνεται ως εξής:

> Η $f : X \to Y$ είναι ασυνεχής στο $x_0 \in X$ αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ και $\sigma(f(x), f(x_0)) \geqslant \varepsilon$.

Θα αποδείξουμε ότι η I είναι ασυνεχής στο $0 = (0, 0, 0, \ldots)$. Πράγματι: αν $x_n = (\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n-\text{θέσεις}}, 0, 0, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε έχουμε

$$\|I(x_n) - I(0)\|_2 = \|I(x_n)\|_2 = \|x_n\|_2 = 1$$

και

$$\|x_n - 0\|_\infty = \|x_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Αν επιλέξουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ παρατηρούμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in c_{00}$ με $\|x_\delta\|_\infty < \delta$ και $\|I(x_\delta) - I(0)\|_2 > \frac{1}{2}$ (αρκεί να επιλέξουμε $x_\delta = x_n$ για κάποιο n αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{\sqrt{n}} < \delta$). Συνεπώς, η $I : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c_{00}, \|\cdot\|_2)$ είναι ασυνεχής στο 0.

(δ) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $z_0 \in X$. Τότε η συνάρτηση

$$\phi : X \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \phi(x) = \rho(x, z_0),$$

για κάθε $x \in X$, (*απόσταση του x από το z_0*) είναι συνεχής.

Πράγματι, αυτό προκύπτει από την ανισότητα (συνέπεια της τριγωνικής):

$$|\rho(x, z_0) - \rho(y, z_0)| \leq \rho(x, y).$$

Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγοντας $\delta = \varepsilon$, έχουμε:

Αν $y \in X$ και $\rho(x, y) < \varepsilon$, τότε $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon$.

(ε) βφ Η μετρική είναι συνεχής συνάρτηση.

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times X$ θεωρούμε τη μετρική γινόμενο d με

$$d\Big((x,y),(x',y')\Big) = \rho(x,x') + \rho(y,y').$$

Τότε η μετρική ρ ως συνάρτηση από τον $(X \times X, d)$ στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Πράγματι, αυτό προκύπτει από την ανισότητα (τεσσάρων σημείων):

$$|\rho(x,y) - \rho(x',y')| \leq \rho(x,x') + \rho(y,y'),$$

δηλαδή

$$|\rho(x,y) - \rho(x',y')| \leq d\Big((x,y),(x',y')\Big).$$

Η συνέχεια περιγράφεται μέσω της σύγκλισης ακολουθιών, ακριβώς όπως και στην περίπτωση συναρτήσεων που ορίζονται σε υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Αρχή της μεταφοράς

Πρόταση. Έστω (X,ρ) και (Y,d) δύο μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$ και $x_0 \in X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι συνεχής στο x_0.

(β) Για κάθε ακολουθία (x_n) στοιχείων του X με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$.

(γ) Για κάθε ακολουθία (y_n) με $y_n \xrightarrow{\rho} x_0$, η ακολουθία $(f(y_n))$ είναι d-συγκλίνουσα.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα την ισοδυναμία των (α) και (β).

(α)⇒(β) Έστω $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ τότε $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Επιπλέον, επειδή $x_n \to x_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant n_0$ τότε $\rho(x_n, x_0) < \delta$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ αν $n \geqslant n_0$, δηλαδή $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$.
(β)⇒(α) Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$, για το οποίο, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να βρούμε $x_n \in X$ τέτοιο ώστε $\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ και $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$. Τότε, για την ακολουθία (x_n) έχουμε

$$(1) \qquad x_n \xrightarrow{\rho} x_0 \quad \text{και} \quad d(f(x_n), f(x_0)) \geqslant \varepsilon_0 \quad \forall n = 1, 2, \ldots .$$

Από την υπόθεση έχουμε $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (1).

Δείχνουμε τώρα την ισοδυναμία των (β) και (γ).

(β)⇒(γ) Προφανές: αν $y_n \xrightarrow{\rho} x_0$, από την υπόθεση έχουμε $f(y_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$, άρα η $(f(y_n))$ είναι d-συγκλίνουσα.

(γ)⇒(β) Έστω (x_n) ακολουθία στον (X,ρ) με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$y_n = (x_0, x_1, x_0, x_2, x_0, x_3, \ldots) \quad \text{δηλαδή} \quad y_n = \begin{cases} x_0, & n = 2k-1 \\ x_k, & n = 2k \end{cases},$$

για την οποία εύκολα δείχνουμε ότι συγκλίνει στο x_0. Από την υπόθεση, υπάρχει $y \in Y$ ώστε $f(y_n) \xrightarrow{d} y$. Επιπλέον, $f(y_{2n-1}) = f(x_0) \xrightarrow{d} f(x_0)$, άρα $y = f(x_0)$. Τώρα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f(x_n) = f(y_{2n}) \xrightarrow{d} y = f(x_0)$.

Χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς μπορούμε να δείξουμε ότι η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής.

Πρόταση Έστω (X,ρ), (Y,σ) και (Z,τ) τρεις μετρικοί χώροι. Έστω $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ δύο συναρτήσεις. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ και η g είναι συνεχής στο $f(x_0) \in Y$, τότε η $g \circ f : X \to Z$ είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία σημείων του X με $x_n \to x_0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι $f(x_n) \to f(x_0)$. Αφού η g είναι συνεχής στο $f(x_0) \in Y$, για κάθε ακολουθία (y_n) σημείων του Y με $y_n \to f(x_0)$ έχουμε $g(y_n) \to g(f(x_0))$.

Όμως, $f(x_n) \in Y$ και $f(x_n) \to f(x_0)$. Συνεπώς,

$$g(f(x_n)) \to g(f(x_0)).$$

Για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του X με $x_n \to x_0$ δείξαμε ότι

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0).$$

Από την αρχή της μεταφοράς, η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει τη σχέση της συνέχειας με τις συνήθεις αλγεβρικές πράξεις ανάμεσα σε πραγματικές συναρτήσεις. Η απόδειξή του είναι άμεση, αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες ιδιότητες για τα όρια ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

Έστω $f, g : (X,\rho) \to \mathbb{R}$, έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in X$. Υποθέτουμε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο x_0. Τότε,

(α) Οι $f+g$, λf και fg είναι συνεχείς στο x_0.

(β) Αν επιπλέον $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$, τότε η $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο X και είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη. Η απόδειξη όλων των ισχυρισμών είναι απλή: για παράδειγμα, για να δείξουμε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του X που συγκλίνει στο x_0, η ακολουθία $\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x_n)\right)$ συγκλίνει στο $\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$. Από την υπόθεση, οι f και g είναι συνεχείς στο x_0. Από την αρχή της μεταφοράς έχουμε έχουμε

$f(x_n) \to f(x_0)$ και $g(x_n) \to g(x_0)$. Αφού $g(x_n) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(x_0) \neq 0$, έχουμε

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0).$$

Η απόδειξη της συνέχειας των $f+g$, λf και $f \cdot g$ στο x_0 αφήνεται ως άσκηση.

Πόρισμα. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Ο χώρος $\mathcal{C}(X)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικός χώρος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.5. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Θεωρούμε τον $X\times X$ με οποιαδήποτε μετρική γινόμενο d. Δείξτε ότι η $\rho:(X\times X,d)\to\mathbb{R}$ με $(x,y)\mapsto\rho(x,y)$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Από την αρχή της μεταφοράς, αρκεί να δείξουμε ότι αν $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο $X\times X$ και $(x_n,y_n)\xrightarrow{d}(x,y)\in X$, τότε $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$. Αν όμως η d είναι μετρική γινόμενο, από την $(x_n,y_n)\xrightarrow{d}(x,y)$ έπεται ότι $x_n\xrightarrow{\rho}x$ και $y_n\xrightarrow{\rho}y$.

Από την ανισότητα $|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)|\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(y_n,y)$ παίρνουμε τότε ότι

$$\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y).$$

Άσκηση 2.6. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x\in X$ ισχύει το εξής: για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:X\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x_n)\to f(x)$. Είναι σωστό ότι $x_n\to x$;*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi:(X,\rho)\to\mathbb{R}$ με $\phi(y)=\rho(y,x)$. Έχουμε δει ότι η ϕ είναι συνεχής.
(Αυτό προκύπτει άμεσα με τον ορισμό της συνέχειας, αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι, για κάθε $y,z\in X$,

$$|\phi(y)-\phi(z)|=|\rho(y,x)-\rho(z,x)|\leqslant\rho(y,z).)$$

Από την υπόθεση έχουμε $\phi(x_n)\to\phi(x)$, δηλαδή

$$\rho(x_n,x)\to\rho(x,x)=0\quad\text{όταν το}\quad n\to\infty.$$

Άρα, $x_n\xrightarrow{\rho}x$.