Χαρακτηρισμός της συμπάγειας

Θεώρημα

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο X είναι συμπαγής.

(β) Κάθε άπειρο υποσύνολο A του X έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο X (δηλαδή, $A' \neq \emptyset$).

(γ) Ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής.

(δ) Ο X είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.

Απόδειξη.

Έχουμε αποδείξει ότι (α) $\Rightarrow$ (β) και (β) $\Rightarrow$ (γ).

(γ) $\Rightarrow$ (δ): Υποθέτουμε ότι ο (X,ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής.

1. *Ο X είναι πλήρης.* Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X. Από την υπόθεση, η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Τότε, $x_n \to x$ (γνωρίζουμε ότι, σε κάθε μετρικό χώρο, αν μια βασική ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία τότε είναι και η ίδια η ακολουθία συγκλίνουσα).

2. *Ο X είναι ολικά φραγμένος.* Με απαγωγή σε άτοπο: αν ο X δεν είναι ολικά φραγμένος, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $z_1, \ldots, z_m \in X$ ισχύει

$$(*) \qquad X \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B(z_j, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Χρησιμοποιώντας την $(*)$ ορίζουμε επαγωγικά ακολουθία (x_n) στον X ως εξής: επιλέγουμε τυχόν $x_1 \in X$ και χρησιμοποιώντας την $(*)$ επιλέγουμε

$$x_2 \in X \setminus B(x_1, \varepsilon).$$

Παρατηρούμε ότι $\rho(x_2, x_1) \geqslant \varepsilon$.
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει $x_1, \ldots, x_n$ έτσι ώστε, αν $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ και $i \neq j$ τότε $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$. Τότε, χρησιμοποιώντας και πάλι την $(*)$, επιλέγουμε

$$x_{n+1} \in X \setminus \big(B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon)\big).$$

Παρατηρούμε ότι $\rho(x_{n+1}, x_i) \geqslant \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.
Κατ' αυτόν τον τρόπο, ορίζεται ακολουθία (x_n) στον X με την εξής ιδιότητα: αν $n \neq m$ τότε $\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon$. Η ακολουθία (x_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (σκεφτείτε γιατί). Συνεπώς, καταλήγουμε σε άτοπο. Συμπεραίνουμε ότι ο X είναι ολικά φραγμένος.

Αφήνουμε προς το παρόν την απόδειξη της κατεύθυνσης (δ) $\Rightarrow$ (α), η οποία είναι πιο σύνθετη.

Μια πολύ σημαντική συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι ο επόμενος χαρακτηρισμός των συμπαγών υποσυνόλων των Ευκλείδειων χώρων $\mathbb{R}^m$.

Θεώρημα

Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, με την Ευκλείδεια μετρική. Ένα υποσύνολο K του $\mathbb{R}^m$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση ισχύει γενικά: σε κάθε μετρικό χώρο, κάθε συμπαγές σύνολο είναι κλειστό και φραγμένο.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Θα δείξουμε ότι το K είναι ακολουθιακά συμπαγές. Έστω (x_n) ακολουθία στο K. Αφού το K είναι φραγμένο, η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη. Στο 2ο Κεφάλαιο είδαμε ότι, κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Υπενθυμίζουμε την απόδειξη: καθώς η σύγκλιση στον $\mathbb{R}^m$ είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση κατά συντεταγμένη, εφαρμόζουμε διαδοχικά το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass για το $\mathbb{R}$ για να βρούμε υπακολουθία $(x_{k_n}(1))$ της $(x_n(1))$ η οποία συγκλίνει σε ένα $x(1) \in \mathbb{R}$, στη συνέχεια υπακολουθία $(x_{l_n}(2))$ της $(x_{k_n}(2))$ η οποία συγκλίνει σε ένα $x(2) \in \mathbb{R}$ κ.ο.κ. για m βήματα.

Επομένως, υπάρχει υπακολουθία (x_{r_n}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^m$. Όμως, το K είναι κλειστό και η (x_{r_n}) περιέχεται στο K. Άρα, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{r_n} \in K$.

Αφού κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του K, συμπεραίνουμε ότι το K είναι συμπαγές.

Παρατήρηση 1.

Ειδικότερα, κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Όμοια, κάθε ορθογώνιο $R_m = [a_1, b_1]\times\cdots\times[a_m, b_m]$ και κάθε κλειστή μπάλα $\hat{B}_2(x, \varepsilon)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$.

Παρατήρηση 2.

Καθώς, για οποιοδήποτε p με $1 \leq p \leq \infty$, ισχύει ότι η σύγκλιση με τη μετρική που επάγεται από την p - νόρμα είναι ισοδύναμη με την σύγκλιση κατά συντεταγμένη, με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και στον $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$ τα συμπαγή σύνολα είναι ακριβώς τα κλειστά και φραγμένα.

Παρατήρηση 3.

Τονίζουμε ότι στο γενικότερο πλαίσιο των πλήρων μετρικών χώρων δεν ισχύει ότι κάθε κλειστό και φραγμένο σύνολο είναι συμπαγές:

Για παράδειγμα, είδαμε ότι, στον $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, η κλειστή μπάλα $\hat{B}(0, 1)$, δεν είναι συμπαγές σύνολο.

Επιπλέον, οποιοδήποτε άπειρο σύνολο με τη διακριτή μετρική αποτελεί ένα παράδειγμα πλήρους φραγμένου μετρικού χώρου ο οποίος δεν είναι συμπαγής - και κάθε άπειρο υποσύνολο ενός τέτοιου χώρου είναι κλειστό, φραγμένο και όχι συμπαγές.

Άλλες βασικές ιδιότητες των συμπαγών συνόλων

Θεώρημα *Κάθε ολικά φραγμένος μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος. Ειδικότερα, κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Έστω (X, ρ) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. Σύμφωνα με τον ορισμό, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $\mathcal{F}_\varepsilon$ του X ώστε οι ανοικτές μπάλες με κέντρα στο $\mathcal{F}_\varepsilon$ και ακτίνα $\varepsilon > 0$ να καλύπτουν τον X.

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τον ορισμό για $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ παίρνουμε μια ακολουθία $D_1, D_2, D_3, \ldots$ πεπερασμένων υποσυνόλων του X ώστε

$$X = \bigcup_{x \in D_n} B\Big(x, \frac{1}{n}\Big)$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Θέτουμε $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Το D είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων.

Ισχυρισμός. Το D είναι πυκνό στον X.

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ανοικτή μπάλα τέμνει το D.

Έστω $B(x, \varepsilon)$ μια ανοικτή μπάλα στον X. Τότε, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Επίσης, $X = \bigcup_{y \in D_n} B(y, \frac{1}{n})$.

Συνεπώς, $x \in \bigcup_{y \in D_n} B(y, \frac{1}{n})$ δηλαδή υπάρχει $y \in D_n$ ώστε $x \in B(y, \frac{1}{n})$. Τότε, $\rho(x, y) < \frac{1}{n} < \varepsilon$, ή ισοδύναμα, $y \in B(x, \varepsilon)$.

Άρα, $D_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, δηλαδή $D \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Ορισμός.

Έστω X μη κενό σύνολο και $(F_i)_{i\in I}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Λέμε ότι η $(F_i)_{i\in I}$ έχει την **ιδιότητα πεπερασμένων τομών** αν για κάθε μη κενό πεπερασμένο $J \subseteq I$ ισχύει

$$\bigcap_{i\in J} F_i \neq \emptyset.$$

Παραδείγματα

1. Η οικογένεια $\{[n, +\infty) : n \in \mathbb{N}\}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών.

2. Το ίδιο ισχύει για την οικογένεια όλων των υποσυνόλων A του $\mathbb{N}$ για τα οποία το $\mathbb{N} \setminus A$ είναι πεπερασμένο σύνολο.

Παρατηρήστε ότι στα δύο προηγούμενα παραδείγματα, η τομή ολόκληρης της οικογένειας είναι το κενό σύνολο.

3. Σε οποιοδήποτε μη κενό σύνολο X, κάθε φθίνουσα ακολουθία μη κενών υποσυνόλων $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ του X έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών.

Θεώρημα Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Ο (X, ρ) είναι συμπαγής.

(i) Αν $(F_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X που έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, τότε

$$\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset.$$

Απόδειξη.

Η απόδειξη είναι σχεδόν άμεση με βάση τον δυϊσμό μεταξύ ανοικτών και κλειστών συνόλων και τους κανόνες De Morgan.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Υποθέτουμε ότι ο X είναι συμπαγής και έστω $(F_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X που έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών.

Υποθέτουμε ότι $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$.

Τότε,

$$X = X \setminus \Big(\bigcap_{i\in I} F_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(X \setminus F_i).$$

Δηλαδή, η οικογένεια $(X\setminus F_i)_{i\in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένο $J \subset I$ ώστε

$$X = \bigcup_{i\in J}(X \setminus F_i) = X \setminus \Big(\bigcap_{i\in J} F_i\Big).$$

Τότε, $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Υποθέτουμε ότι ισχύει το (ii) και έστω $(U_i)_{i\in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X, δηλαδή $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.

Τότε $\bigcap_{i\in I}(X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset$, οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση (ii), συμπεραίνουμε ότι η οικογένεια κλειστών συνόλων $(X \setminus U_i)_{i\in I}$, δεν έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, επομένως υπάρχει πεπερασμένο $J \subset I$ με $\bigcap_{i\in J}(X \setminus U_i) = \emptyset$, δηλαδή $X \setminus \bigcup_{i\in J} U_i = \emptyset$.

Έπεται ότι $\bigcup_{i\in J} U_i = X$, δηλαδή το (τυχόν) ανοικτό κάλυμμα $(U_i)_{i\in I}$ του X έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Συμπεραίνουμε ότι ο μετρικός χώρος X είναι συμπαγής.

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει τη συμπάγεια για τα πεπερασμένα γινόμενα συμπαγών μετρικών χώρων.

Θεώρημα

Έστω $(X_i, d_i)_{i=1}^m$ συμπαγείς μετρικοί χώροι. Αν $X = \prod_{i=1}^m X_i$ είναι ο χώρος γινόμενο των X_i και d είναι οποιαδήποτε μετρική γινόμενο στο X, τότε ο (X, d) είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ο (X, d) είναι ακολουθιακά συμπαγής. Αυτό αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο που εφαρμόσαμε για να δείξουμε ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία:

Έστω $x_n = (x_n(1), \ldots, x_n(m))$ ακολουθία στον (X, d). Αφού ο X_1 είναι συμπαγής, η ακολουθία $(x_n(1))$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n}(1))$:

$$x_{k_n}(1) \to x(1) \in X_1.$$

Αφού ο X_2 είναι συμπαγής, η $(x_{k_n}(2))$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{l_n}(2))$:

$$x_{l_n}(2) \to x(2) \in X_2.$$

Παρατηρούμε ότι και

$$x_{l_n}(1) \to x(1),$$

διότι η $x_{k_n}(1) \to x(1)$ και η $(x_{l_n}(1))$ είναι υπακολουθία της $x_{k_n}(1)$. Άρα, η υπακολουθία (x_{l_n}) έχει συγκλίνουσα πρώτη και δεύτερη συντεταγμένη. Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο μέχρι την m-οστή συντεταγμένη και παίρνοντας m διαδοχικές υπακολουθίες της (x_n) βρίσκουμε υπακολουθία της η οποία έχει κάθε συντεταγμένη της συγκλίνουσα. Η d είναι μετρική γινόμενο στο X, άρα η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Ασκήσεις

6.11. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:*

(α) Αν $A_1,\ldots,A_m$ είναι ολικά φραγμένα υποσύνολα του X τότε το $A_1\cup\cdots\cup A_m$ είναι επίσης ολικά φραγμένο.

(β) Αν A είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του X τότε το $\overline{A}$ είναι επίσης ολικά φραγμένο.

Απόδειξη. (α) Αρκεί να το δείξουμε για δυο σύνολα A_1, A_2. Κατόπιν επαγωγικά θα έχουμε το συμπέρασμα.
Έστω $\varepsilon>0$. Αφού το A_1 είναι ολικά φραγμένο υπάρχουν $x_1,\ldots,x_k\in A_1$ ώστε $A\subseteq\bigcup_{i=1}^k B(x_i,\varepsilon)$. Ομοίως, υπάρχουν $y_1,\ldots,y_n\in A_2$ ώστε $A_2\subseteq\bigcup_{j=1}^n B(y_j,\varepsilon)$. Θέτουμε $\mathcal{Z}=\{x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_n\}\subseteq A_1\cup A_2$, το οποίο είναι πεπερασμένο και $A_1\cup A_2\subseteq\bigcup_{z\in\mathcal{Z}}B(z,\varepsilon)$.

(β) Έστω $\varepsilon>0$. Αφού το A είναι ολικά φραγμένο υπάρχουν $x_1,\ldots,x_k\in X$ ώστε $A\subseteq\bigcup_{i=1}^k B(x_i,\varepsilon/2)$. Τότε,

$$\overline{A}\subseteq\bigcup_{i=1}^k\overline{B(x_i,\varepsilon/2}.$$

Από την

$$\overline{B(x_i,\varepsilon/2)}\subseteq\hat{B}(x_i,\varepsilon/2)\subseteq B(x_i,\varepsilon),$$

έπεται ότι $\overline{A}\subseteq\bigcup_{i=1}^k B(x_i,\varepsilon)$.

6.12. (α) *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f στέλνει τα ολικά φραγμένα υποσύνολα του X σε ολικά φραγμένα υποσύνολα του Y.*

(β) *Δείξτε ότι η ιδιότητα του ολικά φραγμένου δεν διατηρείται από ομοιομορφισμούς.*

Απόδειξη. (α) Έστω $A \subseteq X$ ολικά φραγμένο και έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $x \in X$, $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$. Το A είναι ολικά φραγμένο, άρα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in X$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(x_i,\delta)$. Τότε,

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} f(B(x_i),\delta) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(f(x_i),\varepsilon).$$

Έπεται ότι το $f(A)$ είναι ολικά φραγμένο.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ με $f(t) = \frac{t}{1-|t|}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί και η αντίστροφή της, $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-1,1)$ με $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$ είναι επίσης συνεχής. Άρα η f είναι ομοιομορφισμός. Παρατηρούμε ότι το $(-1,1)$ είναι ολικά φραγμένο, ενώ το $\mathbb{R}$ δεν είναι.

6.13. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και (x_n) βασική ακολουθία στον X. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in B(x_{n_0},\varepsilon)$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_0} B(x_j,\varepsilon).$$

6.31. *Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω (K_n) φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X ώστε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ να είναι μονοσύνολο. Δείξτε ότι $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(\mathrm{diam}(K_n))$ δεν συγκλίνει στο 0 και, αφού αυτή είναι φθίνουσα και μη αρνητική, έπεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\mathrm{diam}(K_n) \geq \delta$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να επιλέξουμε $x_n, y_n \in K_n$ με $d(x_n, y_n) \geq \frac{\delta}{2}$.

Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n), η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ και υπάρχει υπακολουθία (y_{l_n}) της (y_{k_n}) , η οποία συγκλίνει σε κάποιο $y \in X$. Έπεται ότι και $x_{l_n} \to x$, αφού η (x_{l_n}) είναι υπακολουθία της (x_{k_n}).

Από τη συνέχεια της μετρικής και την Αρχή της μεταφοράς, παίρνουμε ότι $d(x_{l_n}, y_{l_n}) \to d(x,y)$ και, αφού για κάθε n ισχύει $d(x_{l_n}, y_{l_n}) \geq \frac{\delta}{2}$, συμπεραίνουμε ότι $d(x,y) \geq \frac{\delta}{2}$.

Όμως $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$.

Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει: Για κάθε $m \geq n$,

$$x_{l_m} \in K_{l_m} \subseteq K_{l_n} \subseteq K_n.$$

Αφού το K_n είναι κλειστό έπεται ότι $x = \lim_{m\to\infty} x_{l_m} \in K_n$.

Συμπεραίνουμε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Όμοια $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$.

Άρα $x \neq y$ και $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, το οποίο είναι άτοπο, αφού η τελευταία τομή είναι μονοσύνολο.

Συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$.