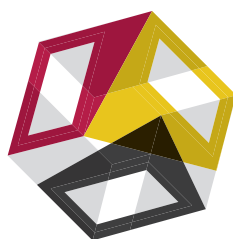




LESSAM

Εγχειρίδιο Εκπαιδευτικού  
Βελτίωση της μάθησης και της διδασκαλίας  
του μαθηματικού συλλογισμού μέσω  
Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος





LESSAM

**Εγχειρίδιο Εκπαιδευτικού**

# **Βελτίωση της μάθησης και της διδασκαλίας του μαθηματικού συλλογισμού μέσω Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος**

**του προγράμματος**

Lesson Study as a vehicle for improving  
achievement in mathematics (LESSAM)

**με χρηματοδότηση από**

Πρόγραμμα Erasmus+, Βασική Δράση 2,  
Συμπράξεις Συνεργασίας



Με συγχρηματοδότηση από το  
πρόγραμμα «Erasmus+»  
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Το σχέδιο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η παρούσα δημοσίευση (ανακοίνωση) δεσμεύει μόνο τον συντάκτη της και η Επιτροπή δεν ευθύνεται για τυχόν χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —



ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ  
ΚΥΠΡΟΥ

# Περιεχόμενα

Συγγραφείς	01
<b>Μέρος 1: Συλλογισμός στην διδακτική των μαθηματικών</b>	<b>02</b>
1. Εισαγωγή	03
2. Σκεπτικό για τον μαθηματικό συλλογισμό (στη Μελέτη Μαθήματος)	04
3. Τρόποι μαθηματικού συλλογισμού	07
4. Σχεδιασμός, αναπαράσταση και αξιολόγηση μαθημάτων για τη δόμηση μιας κοινότητα τάξης που προωθεί τον μαθηματικό συλλογισμό	10
5. Τελικές παρατηρήσεις	25
<b>ΜΕΡΟΣ 2: Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος</b>	<b>26</b>
1. Εισαγωγή	27
2. Ξεκινώντας την Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος	33
3. Καθορισμός ερευνητικού στόχου και εντοπισμός μαθητών περίπτωσης	35
4. Σχεδιασμός του πρώτου ερευνητικού μαθήματος	37
5. Διδασκαλία του πρώτου ερευνητικού μαθήματος	43
6. Διεξαγωγή συνεντεύξεων μαθητών-περίπτωσης και χορήγηση του σύντομου ερωτηματολογίου/κάρτας εξόδου	44
7. Η Συζήτηση Αναστοχασμού μετά από την ολοκλήρωση του μαθήματος	45
8. Η Συνολική Αξιολόγηση	49
9. Διάδοση της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος σε μαθητές και συναδέλφους	49
Άδεια έντυπα	50
Βιβλιογραφικές αναφορές	64

# Αναφορές Εικονιδίων



Εργασία για τους εκπαιδευτικούς



Μαθηματικό έργο



Παράδειγμα

# Συγγραφείς

- **Barbier, Katelijne**  
Department of Training and Educational Sciences, University of Antwerp, Belgium
- **Donche, Vincent**  
Department of Training and Educational Sciences, University of Antwerp, Belgium
- **Struyf, Elke**  
Department of Training and Educational Sciences and Antwerp School of Education, University of Antwerp, Belgium
- **Vandervieren, Ellen**  
Department of Training and Educational Sciences and Antwerp School of Education, University of Antwerp, Belgium
- **Pepin, Birgit**  
Eindhoven University of Technology and Eindhoven School of Education, The Netherlands
- **Schüler-Meyer, Alexander**  
Eindhoven University of Technology and Eindhoven School of Education, The Netherlands
- **Vermunt, Jan**  
Eindhoven University of Technology and Eindhoven School of Education, The Netherlands
- **Δημητριάδη, Κατερίνα**  
17ο Γυμνάσιο Περιστερίου, Αθήνα, Ελλάδα
- **Πόταρη, Δέσποινα**  
Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Ελλάδα
- **Ψυχάρης, Γιώργος**  
Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Ελλάδα
- **Τριαντάφυλλου, Χρυσσαυγή**  
Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Ελλάδα
- **Κωνσταντίνος Στουραϊτης**  
Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, Ελλάδα
- **Παπαριστοδήμου, Έφη**  
Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, Κύπρος
- **Dudley, Pete**  
Faculty of Education, University of Cambridge, UK

## Σε συνεργασία

- **Κυριακίδης, Λεωνίδας**  
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Κύπρος
- **Βρίκκη, Μαρία**  
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Κύπρος
- **Αντωνίου, Παναγιώτης**  
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Κύπρος
- **Ιωάννου, Γιάννης**  
Υπουργείο Παιδείας, Πολιτισμού, Αθλητισμού και Νεολαίας Κύπρου
- **Ζαχαριάδης, Θεοδόσης**  
Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Ελλάδα
- **Μεταξάς, Νικόλαος**  
Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Ελλάδα
- **Πετροπούλου, Γεωργία**  
Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, Ελλάδα
- **van der Wal, Nathalie**  
Eindhoven University of Technology and Eindhoven School of Education, The Netherlands

**Συλλογισμός  
στην διδακτική  
των μαθηματικών**

**01**



## 1. Εισαγωγή

Στο πρώτο μέρος του εγχειριδίου, εισάγουμε την έννοια του 'συλλογισμού' με τρόπους που μπορούν να αξιοποιηθούν από το πρόγραμμα της Μελέτης Μαθήματος. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζουμε το σκεπτικό της μελέτης του συλλογισμού στο πλαίσιο της Μελέτης Μαθήματος.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι 8 (οκτώ) τύποι συλλογισμού που διερευνούμε στη Μελέτη Μαθήματος. Τέλος, εξετάζουμε ζητήματα που σχετίζονται με τον σχεδιασμό και την υλοποίηση μαθημάτων με σκοπό τη δημιουργία μιας κοινότητα σχολικής τάξης που προωθεί τον μαθηματικό συλλογισμό.



## 2. Σκεπτικό για τον μαθηματικό συλλογισμό (στη Μελέτη Μαθήματος)

Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι για να συλλάβει και να ορίσει κανείς τον όρο 'συλλογισμός' στα σχολικά μαθηματικά. Εδώ παρουσιάζουμε μερικούς από αυτούς τους τρόπους ώστε να μπορείτε να συζητήσετε ποιος είναι πιο κοντά στη δική σας κατανόηση του όρου 'συλλογισμός'.

**Στα Μαθηματικά, ο 'συλλογισμός' περιλαμβάνει την εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων τα οποία βασίζονται σε τεκμήρια ή σε διατυπωμένες παραδοχές.**

National Council of Teachers of Mathematics (1900, p. 1)



**Ο συλλογισμός ενεργοποιεί τη δυνατότητα στους μαθητές να χρησιμοποιούν όλες τις μαθηματικές τους δεξιότητες και, υπό αυτή την έννοια, μπορεί να θεωρηθεί ως η «συγκολλητική ουσία» η οποία βοηθά να νοηματοδοτούν τα Μαθηματικά.**

The NRICH Primary Team (2014, σελ. 1)

**Ο συλλογισμός είναι η διαδικασία χειρισμού και ανάλυσης αντικειμένων, αναπαραστάσεων, διαγραμμάτων, συμβόλων ή ισχυρισμών για την εξαγωγή συμπερασμάτων βασισμένων σε τεκμήρια ή παραδοχές.**

Battista (2017, σελ. 1)



**Ο συλλογισμός είναι η διαδικασία επικοινωνίας με άλλους ή με τον εαυτό η οποία επιτρέπει να συμπεραίνουμε μαθηματικές προτάσεις από άλλες τέτοιες προτάσεις.**

Jeannotte & Kieran (2017, σελ. 9)



**Ο συλλογισμός αναφέρεται στη γραμμή σκέψης η οποία υιοθετείται με σκοπό [...] να φθάσει κανείς σε συμπέρασμα όταν επιλύει μαθηματικά έργα. Ο συλλογισμός δεν βασίζεται, απαραίτητα, στην τυπική λογική και, γι' αυτό, δεν περιορίζεται στην απόδειξη. Μπορεί να είναι ακόμη και λανθασμένος, για όσο διάστημα υπάρχουν (για το άτομο που κάνει τον συλλογισμό) λόγοι που τον στηρίζουν.**

Bergqvist & Lithner (2012, σελ. 253)





### Εργασία για τους εκπαιδευτικούς:

**Συγκρίνετε τους παραπάνω ορισμούς του μαθηματικού συλλογισμού.**

Ποια στοιχεία για τον συλλογισμό είναι κοινά σε όλα τα αποσπάσματα; Ποια στοιχεία είναι μοναδικά σε κάθε απόσπασμα; Σκεφτείτε δύο παραδείγματα μαθηματικού συλλογισμού από μία πρόσφατη διδασκαλία σας. Χαρακτηρίστε τα χρησιμοποιώντας κάποιον από τους παραπάνω ορισμούς.

Ο μαθηματικός συλλογισμός θεωρείται θεμελιώδης για τη γεφύρωση του χάσματος ανάμεσα στις βασικές δεξιότητες και στην υψηλότερου επιπέδου σκέψη. Στην πραγματικότητα, η έρευνα έχει δείξει ότι **οι μαθητές οι οποίοι διδάσκονται δεξιότητες συλλογισμού από νωρίς, τελικά εξελίσσονται ώστε στη μάθησή τους είναι πιο σίγουροι για τον εαυτό τους και πιο ανεξάρτητοι.**

**Αναπτύσσουν μία βαθύτερη κατανόηση για το πώς μπορεί να εφαρμοστεί μία ιδέα σε ποικίλες καταστάσεις και είναι πρόθυμοι να διερευνήσουν τι λειτουργεί και τι όχι.**

Η επόμενη εργασία<sup>1</sup> παρέχει ευκαιρίες για συλλογισμό σε διαφορετικά επίπεδα:



### Μαθηματικό έργο 1: Μικρά τετράγωνα

#### Σχήμα 1



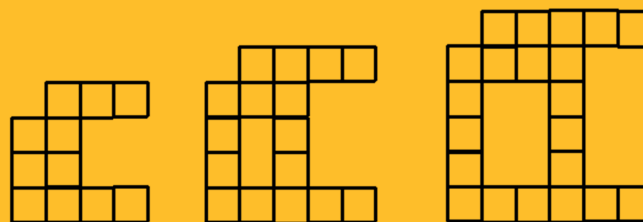
Μοτίβο 1

Μοτίβο 2

Μοτίβο 3

1. Πώς θα ήταν το Μοτίβο 4; Πώς θα ήταν το Μοτίβο 100; Ή το Μοτίβο 957;
2. Πόσα μικρά τετράγωνα θα περιέχει το Μοτίβο n;
3. Πώς φτάσατε σε αυτό τον αριθμό;
4. (πιο προχωρημένη) Παρατηρήστε το Σχέδιο 2 (παρακάτω) και επαναλάβετε τις ερωτήσεις 1-3. Τι παρατηρείτε, σε αντίθεση με το πρωτότυπο Σχήμα 1; Γιατί συμβαίνει αυτό ;
5. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός μικρών τετραγώνων ο οποίος μπορεί να μετακινηθεί από το αρχικό Μοτίβο στο Σχέδιο 1, ώστε αυτό να συνεχίζει να αυξάνεται τετραγωνικά;

#### Σχήμα 2



Μοτίβο 1

Μοτίβο 2

Μοτίβο 3

<sup>1</sup>Εμπνευσμένο από την Boaler (2016, p.73)



### Εργασία για τους εκπαιδευτικούς:

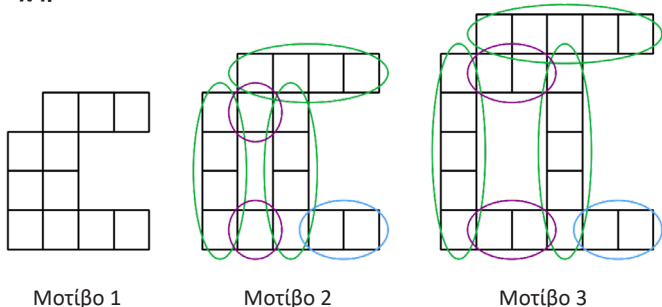
1. Σκεφτείτε σχετικά με τον δικό σας συλλογισμό ( π.χ., απαντώντας τις παρακάτω ερωτήσεις)
  - Πώς βρήκατε τη δομή στο Μοτίβο;
  - Χρησιμοποιήσατε αριθμητικά παραδείγματα; Αν ναι, πώς;
  - Πώς μεταφράσατε αυτή την κατασκευή σε αλγεβρική παράσταση;
  - Οι συνάδελφοί σας βρήκαν την ίδια αλγεβρική παράσταση; Αν ναι, πώς; Αν όχι, τι διαφορετικό έκαναν οι συνάδελφοί σας;
  - Βρείτε όσες περισσότερες συμβολικές αναπαραστάσεις μπορείτε.
2. Περιγράψτε τα διαφορετικά είδη συλλογισμού με τα οποία ενδεχομένως εμπλακούν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της εργασίας τους στο συγκεκριμένο έργο. Πώς θα είναι οι λύσεις των μαθητών;
3. Αναγνωρίστε τα είδη των αναπαραστάσεων τα οποία μπορεί οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν.
4. Ποιο είδος επικοινωνίας απαιτείται από τους μαθητές;
5. Ποια είδη μαθηματικής σκέψης απαιτούνται για την επίλυση του θέματος;

Η διατύπωση εικασιών και η γενίκευση είναι ουσιώδη συστατικά για τη διδασκαλία και τη μάθηση του μαθηματικού συλλογισμού. Ο συλλογισμός εμπριέχει την αιτιολόγηση, η οποία είναι, 'ή δημιουργία, η διερεύνηση και αξιολόγηση των εικασιών, και η ανάπτυξη μαθηματικών επιχειρημάτων ώστε να πεισθεί κανείς και να πείσει και άλλους ότι οι εικασίες είναι αληθείς'.<sup>2</sup>Συμπεπώς, **ο συλλογισμός επιτρέπει στους μαθητές να προχωρήσουν πέρα από διαδικασίες ρουτίνας προς την εκτίμηση των διασυνδεδεμένων, λογικών και γεμάτων νόημα όψων των Μαθηματικών**<sup>3</sup>.

Η αιτιολόγηση είναι κάτι περισσότερο από την εξήγηση του «τι» και περιλαμβάνει το «γιατί» στην επαλήθευση ενός ισχυρισμού<sup>4</sup>. Η μαθηματική αιτιολόγηση είναι ένα λογικό επιχείρημα το οποίο βασίζεται σε αποδεκτές διαδικασίες, ιδιότητες, έννοιες και μαθηματικές ιδέες<sup>5</sup>. Όσο η ευχέρεια των μαθητών για συλλογισμό μεγαλώνει, αυτοί γίνονται ικανοί να προσφέρουν ένα μαθηματικό και λογικό επιχείρημα για να στηρίξουν έναν ισχυρισμό<sup>6</sup>. Ωστόσο, οι μαθητές σπάνια έχουν την ευκαιρία να εμπλακούν σε δραστηριότητες μαθηματικού συλλογισμού<sup>7</sup>.

Στο παραπάνω παράδειγμα, ο συλλογισμός των μαθητών σας θα μπορούσε να ήταν ο εξής:

#### Σχήμα 3<sup>8</sup>



Για να αναγνωρίσουν το μοτίβο στην ακολουθία, οι μαθητές χρειάζονται:

- Ανάλυση και δόμηση: Εντοπίστε στοιχεία τα οποία αλλάζουν από το ένα μοτίβο στο άλλο (πράσινα, μωβ) και στοιχεία τα οποία παραμένουν ίδια (μπλε).
- Εικασία σχετικά με τη φύση της αλλαγής: Τα πράσινα στοιχεία αυξάνονται με τον ίδιο τρόπο, οπότε υπάρχουν 3 σχήματα από τα οποία κάθε ένα αυξάνεται κατά +1 από το ένα βήμα έως το επόμενο. Παρόμοια, υπάρχουν 2 μωβ στοιχεία τα οποία αυξάνονται κατά 1. Το μπλε στοιχείο δεν αλλάζει από το ένα μοτίβο στο επόμενο.
- Γενίκευση των κοινών στοιχείων που εντοπίστηκαν: Επομένως, ένα γενικό μοτίβο μπορεί να αναπαρασταθεί με τη σχέση  $3^* (n + 2) + 2^* (n - 1) + 2$ .
- Έλεγχο της εικασίας: Η σχέση περιγράφει κατάλληλα το πρώτο ή το μοτίβο που αντιστοιχεί στο μηδέν; Τι συμβαίνει με το 5ο μοτίβο;

Στο παραπάνω παράδειγμα, οι μαθητές εμπλέκονται κυρίως με την ανάλυση και τη γενίκευση. Η γενίκευση αφορά τον εντοπισμό κοινών χαρακτηριστικών ανάμεσα στις καταστάσεις και επεκτείνεται πέρα από την αρχική κατάσταση<sup>9</sup>.

Δεδομένης της σημασίας που έχει η ενθάρρυνση του συλλογισμού, θα θέλαμε να προσέξετε την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού στα μαθήματά σας. Έτσι, στο επόμενο μέρος, σκιαγραφούμε τους τρόπους συλλογισμού που διακρίνουμε ως περισσότερο σχετικούς με τα σχολικά Μαθηματικά. Στο τρίτο μέρος, διερευνούμε τη διδασκαλία και τη μάθηση του συλλογισμού.

<sup>2</sup>Goos, Vale, & Stillman (2017, σελ. 37)

<sup>3</sup>Mata-Pereira & da Ponte (2017)

<sup>4</sup>Sowder & Harel (1998)

<sup>5</sup>Mata-Pereira & da Ponte (2017)

<sup>6</sup>Jeannotte & Kieran (2017)

<sup>7</sup>Prediger, et al. (2018)

<sup>8</sup>Adapted from Boaler (2016)

<sup>9</sup>Blanton & Kaput (2005); Küchemann (2010)

### 3. Τρόποι μαθηματικού συλλογισμού

Ποικίλες προσπάθειες έχουν γίνει για να κατηγοριοποιηθούν οι τρόποι μαθηματικού συλλογισμού ώστε να κατανοήσουμε τη φύση και τις παραλλαγές του. Στο μαθηματικό πλαίσιο του PISA 2021<sup>10</sup>, ο μαθηματικός συλλογισμός συνιστά κεντρική πτυχή του μαθηματικού εγγραμματισμού. Ο κατάλληλος συλλογισμός που βασίζεται σε παραδοχές, μπορεί να οδηγήσει σε συμπεράσματα που είναι αξιόπιστα σε μία ευρεία ποικιλία πραγματικών συνθηκών. Το πλαίσιο του PISA διακρίνει έξι βασικούς τύπους κατανόησης που παρέχουν δομή και υποστηρίζουν τον μαθηματικό συλλογισμό. Αυτοί οι τύποι περιλαμβάνουν:

- Κατανόηση της ποσότητας, του αριθμητικού συστήματος και των αλγεβρικών ιδιοτήτων τους
- Εκτίμηση της δύναμης της αφαίρεσης και των συμβολικών αναπαραστάσεων
- Αντίληψη μαθηματικών δομών και της κανονικότητάς τους
- Αναγνώριση των λειτουργικών σχέσεων ανάμεσα στις ποσότητες
- Χρήση μαθηματικών μοντέλων ως φακό για τον πραγματικό κόσμο (π.χ. τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στις φυσικές, βιολογικές, κοινωνικές, οικονομικές και συμπεριφορικές επιστήμες) και
- Κατανόηση της μεταβολής ως την 'καρδιά' της στατιστικής

Στην τρέχουσα συζήτηση σχετικά με τις μαθηματικές ικανότητες, ο μαθηματικός συλλογισμός έχει αναγνωριστεί ως μία από τις οκτώ (8) βασικές μαθηματικές ικανότητες<sup>11</sup>. Αυτή η ικανότητα περιλαμβάνει αφενός την επικοινωνιακή παροχή αιτιολόγησης των μαθηματικών ισχυρισμών, και αφετέρου την κριτική ανάλυση

και αξιολόγηση της επιχειρούμενης αιτιολόγησης. Η ικανότητα αυτή συμφωνεί με ένα ευρύ φάσμα μορφών αιτιολόγησης - από την επανεξέταση ή την παροχή παραδειγμάτων (ή αντι-παραδειγμάτων) πάνω σε ευρετικές και τοπικά συμπεράσματα έως την αυστηρή απόδειξη που στηρίζεται σε λογικά συμπεράσματα που προκύπτουν από συγκεκριμένα αξιώματα.

Ο μαθηματικός συλλογισμός σχετίζεται, επίσης, με τις δραστηριότητες 'δημιουργία μαθηματικών γενικεύσεων' και 'υποστήριξης μαθηματικών ισχυρισμών'<sup>12</sup>. Η δεύτερη δραστηριότητα έχει συζητηθεί πιο ευρέως στη βιβλιογραφία και έχει συνδεθεί με συγκεκριμένες μορφές συλλογισμού. Το παράδειγμα του Μαθηματικού Έργου 1 παραπάνω αποτυπώνει το πώς μοιάζει ο συλλογισμός στο πλαίσιο της μαθηματικής γενίκευσης.

Σκεπτόμενοι πάνω στις παραπάνω συζητήσεις και τα ευρήματα, αναπτύξαμε στο πρόγραμμα LESSAM ένα πλαίσιο από **οκτώ βασικές διαστάσεις του μαθηματικού συλλογισμού**. Παρακάτω, παρουσιάζουμε ένα πίνακα με μία σύντομη περιγραφή της κάθε διάστασης και κάποια παραδείγματα έργων τα οποία μπορούν να φωτίσουν αυτές τις διαστάσεις. Αναγνωρίζουμε ότι κάθε κατηγοριοποίηση έχει δυνατότητες και περιορισμούς. Ωστόσο, θεωρούμε ότι παρέχει ένα εργαλείο για τους εκπαιδευτικούς α) να αναγνωρίσουν σαφή χαρακτηριστικά στον μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών τους, β) να σκεφτούν τον σχεδιασμό έργων που θα προωθούν διαφορετικές πτυχές του μαθηματικού συλλογισμού, και γ) να αναλογιστούν πάνω στη δυνατότητα προώθησης του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών στη διδασκαλία.



<sup>10</sup>OECD (2022)

<sup>11</sup>Niss & Højgaard (2019)

<sup>12</sup>Α Όπως αναλύονται στο πλαίσιο του Stylianides (2009)

## Πίνακας 1

Βασικά χαρακτηριστικά του μαθηματικού συλλογισμού (όπως χρησιμοποιούνται στο πρόγραμμα LESSAM)



### Βασικές πτυχές μαθηματικού συλλογισμού



### Περιγραφή



### Σχετικό Έργο

Γενίκευση από συγκεκριμένες περιπτώσεις (επαγωγικός συλλογισμός)

π.χ. εύρεση του γενικού όρου σε ένα μοτίβο

Στον παρακάτω πίνακα, συμπληρώστε τα κελιά κάτω από το 100 και το n:

2	2	3	4	...	100	n
3	6	9	12	...	...	...

Αξιολόγηση μαθηματικών ισχυρισμών

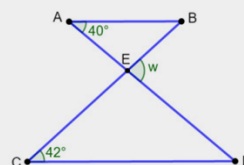
π.χ. διάψευση μέσω αντιπαραδειγμάτων

Ο Γιώργος ισχυρίζεται ότι ένα ορθογώνιο τρίγωνο δεν μπορεί να είναι ισοσκελές. Συμφωνείτε μαζί του ή όχι; Εξηγήστε γιατί.

Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω παραγωγικού συλλογισμού π.χ. χρησιμοποιήστε μαθηματικές

π.χ. χρησιμοποιήστε μαθηματικές προτάσεις για να καταλήξετε σε ένα συμπέρασμα

Στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι  $AB \parallel CD$ . Βρείτε την τιμή της γωνίας  $w$ .



Αναλογικός συλλογισμός π.χ. μεταφορά δομικής πληροφορίας από ένα σύστημα σε ένα άλλο

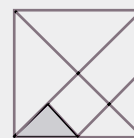
π.χ. μεταφορά της δομής χειραπτικών βοηθημάτων διδασκαλίας σε αφηρημένο πλαίσιο

Σε ένα βασίλειο υπάρχουν μαύροι και κόκκινοι ιππότες. Κάθε φορά που ένας κόκκινος ιππότης συναντά έναν μαύρο (ή το αντίστροφο) και οι δύο εξοντώνονται. Μπορείτε να ερμηνεύσετε τον παρακάτω αριθμητικό υπολογισμό με τους όρους της παραπάνω ιστορίας;  $-1+1=0$

Συλλογισμός με εικόνες

π.χ. αποσύνθεση γεωμετρικών σχημάτων στη διαδικασία αιτιολόγησης/απόδειξης

Πόσες φορές το χρωματισμένο τρίγωνο χωράει στο μεγάλο τετράγωνο; Εξηγήστε.



Αξιολόγηση της σχέσης ενός μαθηματικού μοντέλου με μία ρεαλιστική κατάσταση

Υπολογισμός της καταλληλότητας πιθανών μαθηματικών μοντέλων στην επίλυση ενός προβλήματος.

Πόσος θερμός αέρας χρειάζεται για να γεμίσει ένα αερόστατο;





### Βασικές πτυχές μαθηματικού συλλογισμού



### Περιγραφή

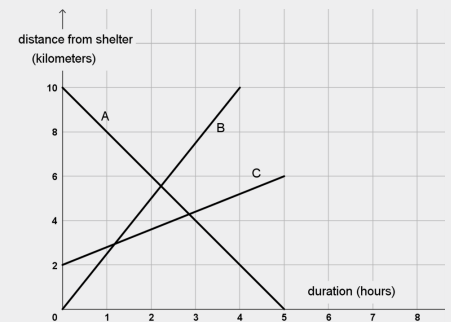


### Σχετικό Έργο

Δημιουργία συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων

Συνδέοντας οπτικές, συμβολικές, λεκτικές, σχετικές με τα συμφραζόμενα ή φυσικές αναπαραστάσεις

Η Μαρία ξεκινάει το πρωί από την κατασκήνωση να ανέβει σε ένα καταφύγιο στον Όλυμπο, μία απόσταση 10 χιλιομέτρων. Η Κατερίνα ξεκινάει την ίδια ώρα να κατεβαίνει από το καταφύγιο στην κατασκήνωση. Ποια γραμμή ( ανάμεσα στην A, B, C) και ποια εξίσωση (από τις 1,2,3), αντιπροσωπεύει την απόσταση της Μαρίας από το καταφύγιο και ποια αντιπροσωπεύει την απόσταση της Κατερίνας από το καταφύγιο;

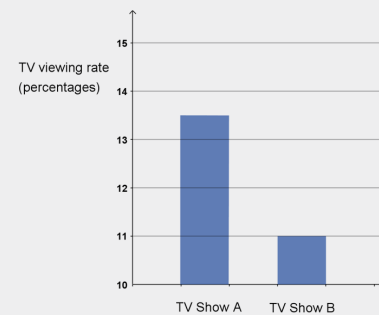


1.  $y=2.5x$
2.  $y=0.8x+2$
3.  $y=-2x+10$

Δημιουργία προβλέψεων σε στοχαστικές καταστάσεις

π.χ. αξιολόγηση υποθέσεων/πληροφοριών από τα ΜΜΕ

Παρουσιάζοντας το παρακάτω διάγραμμα, ο κύριος Ο. υποστηρίζει ότι το τηλεοπτικό σόου Α είναι, περίπου, τρεις φορές πιο δημοφιλές από το τηλεοπτικό σόου Β. Πιστεύετε ότι είναι σωστό; Γιατί;



Με αυτές τις σκέψεις πάνω στον μαθηματικό συλλογισμό, τώρα επικεντρώνουμε στον σχεδιασμό και την υλοποίηση μαθημάτων τα οποία προωθούν τον μαθηματικό συλλογισμό.

## 4. Σχεδιασμός, αναπαράσταση και αξιολόγηση μαθημάτων για τη δόμηση μιας κοινότητας τάξης που προωθεί τον μαθηματικό συλλογισμό

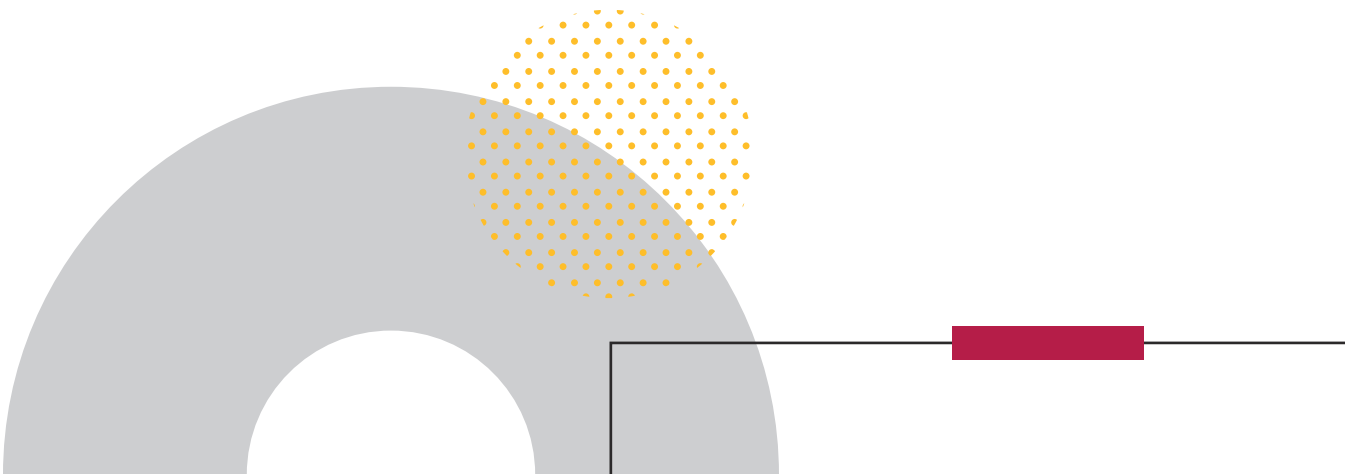
Ο προσανατολισμός της οπτικής μας σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση του συλλογισμού εξετάζει την αντίληψη ότι με σκοπό τον σχεδιασμό μαθημάτων τα οποία προωθούν τον συλλογισμό, συγκεκριμένες συνθήκες πρέπει να τεθούν επί τόπου. Σε αυτό το μέρος, συζητάμε τα παρακάτω συσχετιζόμενα ζητήματα τα οποία συνδέονται με αυτές τις συνθήκες : α) υλοποίηση έργων συλλογισμού και (προσεκτική) υποστήριξη, β) (στρατηγικές) ερωτήσεις , γ) παρατήρηση κρίσιμων συμβάντων στην τάξη και δ) αξιολόγηση των δραστηριοτήτων συλλογισμού των μαθητών.

### 4.1 Υλοποίηση έργων συλλογισμού και κατάλληλη υποστήριξη

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι τα είδη των έργων τα οποία οι μαθητές καλούνται να εκτελέσουν, θέτουν τη βάση για τη διδασκαλία. Με άλλα λόγια, διαφορετικά είδη έργων οδηγούν σε διαφορετική 'οργάνωση' της διδασκαλίας.

Είναι γενική υπόθεση ότι, η οργάνωση της διδασκαλίας η οποία παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να σκεφτούν, να επικοινωνήσουν και να συλλογιστούν είναι δομημένη σε αυθεντικά προβλήματα για τους μαθητές και τις μαθήτριες.

Επιλέγοντας έργα τα οποία εστιάζουν στον συλλογισμό αντί στην αναζήτηση της σωστής απάντησης (δείτε **Πίνακα 2**), οι εκπαιδευτικοί δημιουργούν ευκαιρίες για τους μαθητές τους να ερευνήσουν μαθηματικές υποθέσεις και να καταλήξουν σε λογικές λύσεις. Μπορούμε να πούμε ότι κατάλληλα έργα είναι εκείνα που έχουν τρία (3) χαρακτηριστικά<sup>13</sup>: (1) κάνουν το αντικείμενο ενδιαφέρον για τους μαθητές, (2) επιτρέπουν συνδέσεις με το επίπεδο γνώσεων στο οποίο βρίσκονται οι μαθητές, (3) εμπλέκουν τους μαθητές με σημαντικές μαθηματικές ιδέες.



<sup>13</sup>Hiebert et al. (1997)



## Πίνακας 2

Στοιχεία των έργων μαθηματικού συλλογισμού



### Θέματα με περιορισμένες ευκαιρίες για συλλογισμό

- Προβλήματα που μπορούν να λυθούν χωρίς τη χρήση του πλαισίου αλλά χρησιμοποιώντας μία διαδικασία που έχει παρουσιαστεί νωρίτερα και οι μαθητές έχουν απομνημονεύσει (π.χ. στο σχολικό βιβλίο)
- Οι μαθητές διατυπώνουν γεγονότα, τύπους, ορισμούς τα οποία έχουν μάθει νωρίτερα
- Οι μαθητές εργάζονται με μία αναπαράσταση
- Οι μαθητές πρέπει να δώσουν μια αναμενόμενη απάντηση
- Τα έργα δεν είναι 'ανοικτά' σε διαφορετικές στρατηγικές

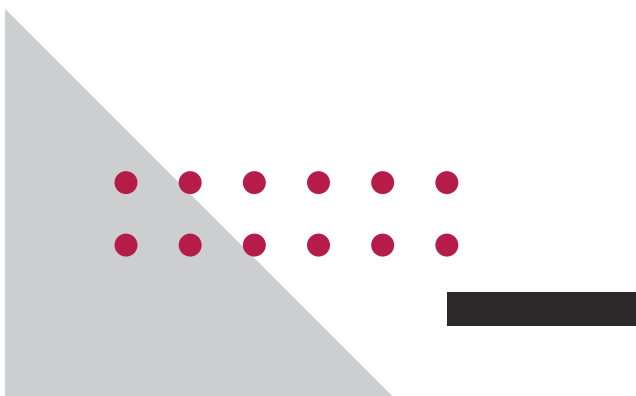


### Θέματα με ευκαιρίες για συλλογισμό

- Οι μαθητές γενικεύουν βασιζόμενοι σε παραδείγματα
- Οι μαθητές δημιουργούν τα δικά τους έργα ή προβλήματα με βάση κριτήρια που τους έχουν δοθεί
- Οι μαθητές αιτιολογούν τις επιλογές τους ( π.χ. για μία στρατηγική λύσης, ένα θεώρημα)
- Οι μαθητές χρησιμοποιούν πολλαπλές αναπαραστάσεις (γραφήματα, πίνακες, τύπους) για να καταλήξουν σε ένα συμπέρασμα
- Οι μαθητές υιοθετούν και εφαρμόζουν μία διαδικασία σε ένα νέο, μη οικείο πρόβλημα
- Οι μαθητές αντιλαμβάνονται πώς οι αλλαγές σε μία αναπαράσταση επηρεάζουν μία άλλη αναπαράσταση (π.χ. πώς αλλάζοντας την κλίση επηρεάζεται το γράφημα και η συμβολική έκφραση μιας συνάρτησης)
- Οι μαθητές επινοούν ένα μαθηματικό μοντέλο για μια ρεαλιστική κατάσταση
- Οι μαθητές κατανοούν μια μαθηματική έννοια μέσω καταστάσεων της καθημερινής ζωής

Σε ό,τι αφορά τον ρόλο του εκπαιδευτικού, ο εκπαιδευτικός παρεμβαίνει και παρέχει κατάλληλη υποστήριξη η οποία ενθαρρύνει και διατηρεί την διερεύνηση και τον συλλογισμό των μαθητών και δεν απορρίπτει αποτελέσματα ή σημαντικά βήματα μαθηματικού συλλογισμού. Αυτό σημαίνει ότι ο εκπαιδευτικός επιλέγει προβλήματα/έργα τα οποία προσφέρουν ευκαιρίες για μάθηση στους μαθητές, υποστηρίζει την κατανόηση των μαθητών μέσω ερωτήσεων, διευκολύνει την εγκαθίδρυση μιας κουλτούρας

στην τάξη όπου οι μαθητές συνεργάζονται και συζητούν τις απαντήσεις και τις στρατηγικές τους. Αυτό το είδος διδασκαλίας ελαχιστοποιεί τον παρεμβατικό ρόλο του εκπαιδευτικού κατά τη διάρκεια της (αρχικής) διερεύνησης, έτσι ώστε οι μαθητές να είναι πολύ πιθανό να συμμετάσχουν σε μαθηματική συζήτηση, να μοιραστούν αναπαραστάσεις, να αναπτύξουν από κοινού ιδέες και αιτιολογήσεις και, τελικά, να έχουν έναν περισσότερο ενεργό ρόλο στην προσωπική τους μάθηση.



#### 4.2 Προκαλώντας τους μαθητές με έργα μαθηματικών συλλογισμών

Η επιλογή έργων που ευνοούν την ανάπτυξη μαθηματικών συλλογισμών από τους μαθητές είναι απαιτητική. Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα από τη διδασκαλία της Άλγεβρας και ειδικότερα από την εισαγωγή των μεταβλητών μέσω λεκτικών τύπων:



#### Μαθηματικό έργο 2<sup>14</sup>: Σπίρτα

Να υπολογίσετε τον αριθμό των σπάρτων στο σχήμα 4 με χρήση του τύπου: “αριθμός των σπάρτων=  $2+3*$  αριθμός μοτίβου”

#### Σχήμα 4



Μοτίβο 1

Μοτίβο 2

Μοτίβο 3

Μοτίβο 4

- Πόσα σπίρτα βρίσκονται στο μοτίβο 16;
- Υπολογίστε πόσα σπίρτα χρειάζονται για το μοτίβο 28;
- Ο Σωτήρης έχει ένα κουτί με 120 σπίρτα.  
Ποιο είναι το μεγαλύτερο μοτίβο που μπορεί να σχηματιστεί με αυτό τον αριθμό σπάρτων;



#### Εργασία για τους εκπαιδευτικούς

Περιγράψτε το είδος του μαθηματικού συλλογισμού στον οποίο εμπλέκονται οι μαθητές καθώς εργάζονται στο Μαθηματικό Έργο 2. Σκεφτείτε για παράδειγμα ποιο είδος αναπαραστάσεων χρησιμοποιούν οι μαθητές και το είδος της επικοινωνίας και της μαθηματικής σκέψης που αναμένεται να αναπτυχθούν από τους μαθητές για την επίλυση του έργου. Συγκρίνετε με το προηγούμενο έργο (Μαθηματικό Έργο 1).

Παρόλο που το Μαθηματικό Έργο 1 και το παραπάνω έργο σχετίζονται με ακολουθίες μοτίβων στην εισαγωγή αλγεβρικών εκφράσεων, ενδεχομένως να παρατηρήσετε ότι το είδος του μαθηματικού συλλογισμού στα δυο έργα διαφέρει σημαντικά. Στο αρχικό έργο του παρόντος κεφαλαίου (Μαθηματικό Έργο 1) δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές σας για:

- **Σύνδεση αναπαραστάσεων:** Οι μαθητές χρησιμοποιούν το μοτίβο με τα γραφήματα για να αναγνωρίσουν μια δομή και στη συνέχεια να μεταφράσουν τη δομή αυτή σε μια αλγεβρική ή αριθμητική έκφραση του μοτίβου.
- **Επικοινωνία:** Οι μαθητές μπορούν να βρουν διαφορετικές γραφικές δομές και συμβολικές εκφράσεις. Έτσι, υπάρχουν πολλές ευκαιρίες για μαθηματική επικοινωνία.

Για παράδειγμα οι μαθητές συγκρίνουν τις διαφορετικές λύσεις τους ή επιχειρηματολογούν σχετικά με την ισότητα διαφορετικών εκφράσεων.

- **Εννοιολογική ενεργοποίηση:** Οι μαθητές αναπτύσσουν άτυπη κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής μέσω συμμεταβολής αναγνωρίζοντας τη σχέση ανάμεσα στη θέση του μοτίβου (αριθμός του μοτίβου) στην ακολουθία και τον αριθμό των τετραγώνων που υπάρχουν σε αυτό. Μπορούν να διερευνήσουν την έννοια αρχικά δουλεύοντας με συγκεκριμένους αριθμούς (5, 100). Στη συνέχεια, όταν οι μαθητές σκεφτούν τον αριθμό 957, πιθανόν να τον αντιμετωπίσουν ως ψευδο-μεταβλητή, καθώς δεν μπορούν να οπτικοποιήσουν πλέον το 957ο μοτίβο και ως εκ τούτου θα χρειαστεί να σκεφτούν αφηρημένα.

<sup>14</sup>From Dijkhuis, et al. (2016, σελ. 74)

Αντίθετα, το έργο του σχολικού εγχειριδίου (Μαθηματικό Έργο 2) παρέχει τη συμβολική έκφραση και επομένως αφαιρεί από τους μαθητές την ευκαιρία να αναλύσουν το μοτίβο, να γενικεύσουν τη δομή ή να βρουν μια αλγεβρική έκφραση. Αντί αυτών, απαιτεί από τους μαθητές να εισάγουν αριθμούς σε ένα δεδομένο τύπο.

- **Σύνδεση αναπαραστάσεων:** Οι μαθητές δεν χρειάζεται να συνδέουν αναπαραστάσεις, μπορούν να εργαστούν αποκλειστικά με τη δεδομένη συμβολική έκφραση. Η εικόνα του σπύριτρου είναι περιττή.
- **Επικοινωνία:** Οι μαθητές μπορούν να δώσουν μονολεκτικές απαντήσεις, δηλαδή τα αριθμητικά τους αποτελέσματα, χωρίς να χρειάζεται συζήτηση ή εξήγηση.
- **Εννοιολογική ενεργοποίηση:** Οι μαθητές εργάζονται με τη μεταβλητή ως σύμβολο θέσης για αριθμούς και κάνουν υπολογισμούς, στους οποίους η μεταβλητή αναπαρίσταται ως λεκτική-μεταβλητή. Καθώς τους ζητείται να κάνουν υπολογισμούς, δεν συνειδητοποιούν τη συμμεταβολή του αριθμού των σπύριτρων και της θέσης του μοτίβου στην ακολουθία.

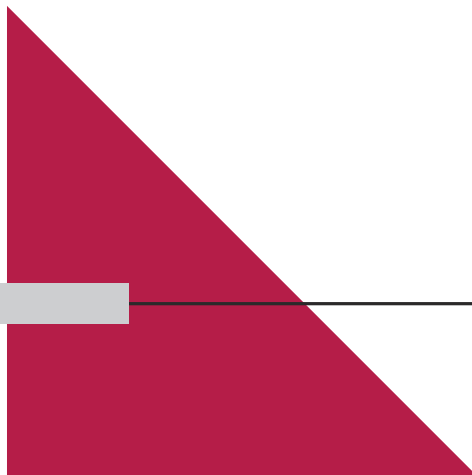
Όσον αφορά τη διαφοροποίηση, το Μαθηματικό Έργο 2 δεν είναι ανοικτό σε διαφορετικές μαθησιακές δεξιότητες. Αντίθετα, καθώς υπάρχει μόνο μία στρατηγική λύσης (εισαγωγή αριθμών), όσοι μαθητές δεν εισάγουν αριθμούς για να υπολογίσουν το αποτέλεσμα δεν θα μπορέσουν να εργαστούν στο έργο χωρίς βοήθεια. Στο αρχικό Μαθηματικό έργο 1, οι μαθητές μπορούν να ακολουθήσουν διαφορετικές στρατηγικές. Για παράδειγμα, οι μαθητές σε πιο προχωρημένο αλγεβρικό επίπεδο μπορούν να βρουν μια αλγεβρική έκφραση χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή  $n$ . Επίσης, μπορούν να βρουν περισσότερο σύνθετες οπτικές δομές και τις αντίστοιχες αλγεβρικές εκφράσεις. Οι μαθητές που σκέφτονται κυρίως αριθμητικά μπορεί να δοκιμάσουν μεγάλους αριθμούς αλλά να βρουν λιγότερες οπτικές δομές. Ωστόσο, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα οι περισσότεροι μαθητές να είναι σε θέση να εργαστούν στο έργο ανάλογα με το επίπεδό τους.

Η υλοποίηση των δύο έργων διαφέρει. Το έργο του σχολικού βιβλίου (Μαθηματικό έργο 2) προορίζεται να δοθεί στους μαθητές αφού έχουν έρθει σε επαφή με την εισαγωγή αριθμών ως στρατηγική λύσης, μέσω μιας σύντομης περιγραφής της θεωρίας σε μορφή κειμένου. Το αρχικό έργο (Μαθηματικό έργο 1) είναι ένα πρόβλημα ενεργοποίησης που μπορεί να δοθεί στους μαθητές στην αρχή ενός μαθήματος, με την προϋπόθεση ότι οι μαθητές είναι σε θέση να εντοπίσουν γραφικές δομές και να κατασκευάσουν αριθμητικές παραστάσεις.



### Εργασία για τους εκπαιδευτικούς

Διαβάστε το παραπάνω κείμενο και σκεφτείτε τι μπορεί να σημαίνει για τον σχεδιασμό του μαθήματός σας. Ποιες στρατηγικές θα επιλέγατε για να παρουσιαστούν σε όλη την τάξη;



### 4.3 Επιλογή, ανάλυση και τροποποίηση έργων μαθηματικού συλλογισμού για όλους τους μαθητές

Προκειμένου να προγραμματίσετε ένα μάθημα που προσφέρει ευκαιρίες για υψηλού επιπέδου μαθηματικό συλλογισμό απαιτούνται πολλές και προσεκτικές αποφάσεις. Η εύρεση σχετικών έργων μπορεί να είναι απαιτητική και χρονοβόρα. Επίσης, συχνά απαιτείται επιπλέον προσπάθεια για την εκτύπωση και την

παρουσίαση αυτών των έργων, καθώς συνήθως δεν βρίσκονται στο σχολικό βιβλίο. Ως εκ τούτου, μια καλή πρακτική είναι να επιλέγουμε έργα του σχολικού βιβλίου, αλλά να βελτιώνουμε τις δυνατότητές τους για μαθηματικό συλλογισμό κάνοντας συγκεκριμένες προσαρμογές.



#### Μαθηματικό έργο 3:

Το κορίτσι με τις εφημερίδες<sup>15</sup>

Η Μαρία μοιράζει εφημερίδες στη γειτονιά της. Υπολογίζει πόσα κερδίζει ανά εβδομάδα σε Ευρώ με τον ακόλουθο τύπο:

**χρήματα που κερδίζει (σε Ευρώ) =  $14 + 0.25 \times$  αριθμός των συνδρομητών**

α) Πόσα χρήματα κερδίζει η Μαρία την εβδομάδα με 40 συνδρομητές; Με 60 συνδρομητές;

β) Η Μαρία δηλώνει ότι με 80 συνδρομητές κερδίζει διπλάσια από ό,τι με 40 συνδρομητές. Διερευνήστε τον ισχυρισμό της αφού ελέγξετε μέσω υπολογισμού αν είναι αληθής.

γ) Η Μαρία αποκτά άλλους 20 συνδρομητές.

Πόσα περισσότερα χρήματα κερδίζει την εβδομάδα;

δ) Κάποια στιγμή η Μαρία κερδίζει 44 ευρώ την εβδομάδα.

Πόσοι συνδρομητές υπάρχουν τη δεδομένη στιγμή;

Το έργο αυτό έχει παρόμοιες δυνατότητες για μαθηματικό συλλογισμό με το προηγούμενο έργο σχετικά με τα μοτίβα (βλ. Εικόνα 4). Οι μαθητές μπορούν να δουλέψουν ακολουθώντας δύο στρατηγικές: να εισάγουν διαφορετικές τιμές για τον αριθμό των συνδρομητών εφημερίδων (40, 60, 80, 20) ή για το ποσό των χρημάτων που κερδίζει η Μαρία (44). Σε καθεμία από τις περιπτώσεις αυτές οι μαθητές αναπτύσσουν διαφορετικό μαθηματικό συλλογισμό. Και στις δύο περιπτώσεις οι μαθητές αντικαθιστούν τη μεταβλητή με συγκεκριμένες τιμές εργαζόμενοι όμως σε διαφορετική κατεύθυνση ('προς τα μπρος'/'προς τα πίσω'). Επιπλέον, η εισαγωγή στον τύπο των χρημάτων που κερδίζει απαιτεί την αναγνώριση της ισότητας ως σχέσης, επειδή η δεδομένη εξίσωση πρέπει να διαβαστεί προς τα πίσω.

Το έργο θα μπορούσε να ευνοήσει περαιτέρω την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού, με τις παρακάτω τροποποιήσεις:

- Χρησιμοποιήστε έναν πίνακα για να απεικονίσετε το κέρδος της Μαρίας για 20, 40, 60, 80, 100 συνδρομητές στη διαδρομή της. Σχεδιάστε ένα γράφημα.
- Η εταιρεία της προσφέρει δύο εναλλακτικές επιλογές: (1) εφάπαξ 5€, αλλά 0,40€ ανά συνδρομητή, ή (2) εφάπαξ 20€ και 0,15€ ανά συνδρομητή. Να συμβουλευτείτε τη Μαρία σχετικά με το ποια επιλογή είναι περισσότερο συμφέρουσα για την ίδια.
- Η Μαρία θέλει να κάνει οικονομία για ένα νέο κινητό τηλέφωνο. Σε τρεις μήνες θέλει να εξοικονομήσει 650€. Πόσους συνδρομητές θα χρειαζόταν;

Αυτές οι πρόσθετες ερωτήσεις μπορούν να αντικαταστήσουν ή να συμπληρώσουν τις ερωτήσεις β έως δ. Παρέχουν περισσότερες ευκαιρίες για μαθηματικό συλλογισμό καθώς διευκολύνουν τη σύνδεση αναπαραστάσεων και την επικοινωνία ενώ επίσης φέρνουν στην επιφάνεια την έννοια της μεταβλητής ως συμμεταβαλλόμενο αριθμού.

Στην προσαρμογή του έργου έγιναν τροποποιήσεις σε σχέση με την:

- Σύνδεση αναπαραστάσεων:** Το έργο τώρα ζητά από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν έναν πίνακα, ο οποίος αποτελεί κατάλληλη αναπαράσταση, με σκοπό να κατανοήσουν τη μεταβλητή ως συμμεταβαλλόμενο αριθμό. Οι πίνακες και οι γραφικές παραστάσεις είναι μέσα που υποστηρίζουν την εξαγωγή συμπερασμάτων.
- Επικοινωνία:** Το να ζητηθεί από τους μαθητές να δώσουν συμβουλές απαιτεί επιχειρηματολογία. Επίσης, οι μαθητές πρέπει να επιλέξουν εύλογες προϋποθέσεις (μιας και δεν δίνονται) για να προκρίνουν την καταλληλότερη από τις εναλλακτικές.
- Εννοιολογική ενεργοποίηση:** Κατά τη σύγκριση διαφορετικών επιλογών, οι μαθητές διερευνούν τη συμμεταβολή μεταξύ των χρημάτων που κερδίζει η Μαρία και του αριθμού των συνδρομητών. Ως εκ τούτου, ενισχύεται η κατανόηση της μεταβλητής ως συμμεταβαλλόμενης ποσότητας.

Στην ιδανική περίπτωση, ο μαθηματικός συλλογισμός υπερβαίνει τα παραδοσιακά έργα εστιάζοντας επίσης στα επόμενα:

- Συνάφεια:** Θα πρέπει να γίνει σαφέστερο πώς τα μαθηματικά που διερευνήθηκαν μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τα φαινόμενα της πραγματικής ζωής ή να αναπτύξουν τη μαθηματική τους διαίσθηση για ένα συγκεκριμένο θέμα.
- Εξερεύνηση:** Οι μαθητές μπορούν να εξερευνήσουν διαφορετικές επιλογές και να ακολουθήσουν διαφορετικές διαδρομές, αντί να εργαστούν σε απλές διαδικασίες βήμα-προς-βήμα. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές μπορούν να αποκτήσουν εννοιολογική κατανόηση. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές μπορούν να αποκτήσουν εννοιολογικές γνώσεις.
- Αναστοχασμός:** Οι μαθητές θα πρέπει να ενθαρρύνονται να προβληματιστούν σχετικά με το μαθησιακό περιεχόμενο ή τη δική τους μαθησιακή πρόοδο.

<sup>15</sup>Adapted from Dijkhuis, et al. (2016, σελ. 78)

Ακολουθώντας αναφερόμαστε σε στρατηγικές για την ενίσχυση της ευελιξίας σκέψης των μαθητών.

### Στρατηγική 1:

#### Εργασία των μαθητών με αφητηρία συγκεκριμένα ή δεδομένα αποτελέσματα ('προς τα πίσω')

Πολλά έργα μπορούν να τροποποιηθούν με τέτοιο τρόπο ώστε οι μαθητές να καλούνται να εργαστούν 'προς τα πίσω' για να καταλήξουν σε συγκεκριμένα αποτελέσματα (βλ. Μαθηματικό έργο 4). Με αυτόν

τον τρόπο, οι μαθητές συλλογίζονται για τη φύση του έργου και ταυτόχρονα βελτιώνουν τις δεξιότητές τους στην πραγματοποίηση των αντίστοιχων διαδικασιών.



#### Μαθηματικό έργο 4:

Προσαρμογή έργων για πορεία εργασίας 'προς τα πίσω'<sup>16</sup>

Αν  $a=5$ , υπολογίστε:

- α.  $a+7$
- β.  $a-12$
- γ.  $3a$
- δ.  $5a+6$
- ε.  $5(a-3)$
- ζ.  $6-3a$

Μπορείτε να παραλείψετε το: 'αν  $a=5$ , υπολογίστε' και στη θέση του να ρωτήσετε:

1. Για ποιο  $a$  είναι το αποτέλεσμα 0;
2. Ποιος όρος γίνεται ο μεγαλύτερος όταν το  $a$  παίρνει την μεγαλύτερη τιμή;
3. Ποιος όρος γίνεται ο μικρότερος όταν το  $a$  παίρνει την μικρότερη τιμή;

### Στρατηγική 2:

#### Δόμηση

Η δόμηση ζητά από τους μαθητές να εντοπίσουν δομές σε ένα έργο, πριν ή μετά την ολοκλήρωση του έργου. Στο παράδειγμα του μαθηματικού έργου που ακολουθεί, ζητείται από τους μαθητές να ομαδοποιήσουν αλγεβρικές εξισώσεις ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας τους σε σχέση με την εύρεση της άγνωστης

μεταβλητής. Κάποιοι μαθητές μπορεί να σκεφτούν διαφορετικά είδη ομαδοποίησης, όπως για παράδειγμα ως προς τις μαθηματικές ιδιότητες. Θα μπορούσε να ζητηθεί από τους μαθητές να εντοπίσουν δευτεροβάθμιες εξισώσεις που μπορούν να λυθούν ευκολότερα με μια συγκεκριμένη τεχνική, όπως η συμπλήρωση τετραγώνου.



#### Μαθηματικό έργο 5:

Προσαρμογή έργων για διευκόλυνση της δόμησης<sup>17</sup>

#### Αρχικό έργο

Λύστε τις εξισώσεις:

- α.  $12p-3=-9p+11$
- β.  $6s-15=75$
- γ.  $10k-5=88k+34$
- δ.  $5x-15=71+3x$
- ε.  $710+6a=630+12a$
- ζ.  $1.5x+70=0.7x+150$

#### Έργο μαθηματικού συλλογισμού

Κατατάξτε τα έργα σε εύκολα και δύσκολα.  
Τι κάνει κάποια έργα δύσκολα;

<sup>16</sup>Adapted from Dijkhuis, et al. (2016, σελ. 81)

<sup>17</sup>Mathematics task 5, 6, 7 and 9 are from De Bruijn, et al. (2018)

**Στρατηγική 3:****Λειτουργική παραλλαγή**

Μέσα από την εργασία σε έργα όπου η μια παράμετρος αλλάζει συστηματικά, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν μοτίβα. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι να γίνει εισαγωγή σε τέτοια έργα.

Το μαθηματικό έργο 6 που ακολουθεί δείχνει ότι καθώς αλλάζει ένα συγκεκριμένο στοιχείο με συστηματικό τρόπο, οι μαθητές μπορούν να εξερευνήσουν μοτίβα. Στο παράδειγμα αυτό οι μαθητές αναπτύσσουν διαδικαστική ευχέρεια εκτελώντας πολλές φορές μια διαδικασία.

**Μαθηματικό έργο 6:**

Λειτουργική παραλλαγή στο πλαίσιο των γραμμικών συναρτήσεων

**Αρχικό έργο**

Για κάθε ζεύγος τύπων γραμμικών συναρτήσεων να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των αντίστοιχων γραφημάτων.

α.  $y=2x+8$  and  $y=6x-12$

β.  $y=7-x$  and  $y=x+1$

γ.  $y=-1/2 x+4$  and  $y=-3 1/2 x+19$

**Έργο μαθηματικού συλλογισμού**

1. Αλλάξτε το 2 στην πρώτη παράσταση σε 1, 3, 4, 5, 6, ...  
Πώς θα αλλάξει το σημείο τομής;
2. Αλλάξτε το 8 στην πρώτη παράσταση σε 1, 2, 3, ...  
Πώς θα αλλάξει το σημείο τομής;

**Στρατηγική 4:****Δημιουργία παραδειγμάτων**

Η εμπλοκή των μαθητών στη δημιουργία παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων με συγκεκριμένες ιδιότητες, μπορεί να ευνοήσει την ανάπτυξη της αντίστροφης σκέψης (βλ. μαθηματικό έργο 7). Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές μπορούν να σκεφτούν τι κάνει ένα έργο δύσκολο ή εύκολο. Συχνά, ένα τέτοιο έργο μπορεί να δοθεί καλύτερα σε ζευγάρια ή ομάδες, ώστε οι μαθητές να μπορούν να κάνουν προτάσεις και να συζητήσουν τις ιδέες τους (καταιγισμός ιδεών, συζήτηση).

Αν ζητηθεί από τους μαθητές να συγκρίνουν την εργασία τους με άλλες και να την κατηγοριοποιήσουν όπως στη στρατηγική 2, μπορούν να προκύψουν περαιτέρω ευκαιρίες για μαθηματικό συλλογισμό.

**Μαθηματικό έργο 7:**

Δημιουργία παραδειγμάτων με συγκεκριμένες ιδιότητες για γραμμικές συναρτήσεις

**Αρχικό έργο**

Για κάθε ζεύγος τύπων γραμμικών συναρτήσεων υπολογίστε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των αντίστοιχων γραφημάτων.

α.  $y=2x+8$  and  $y=6x-12$

β.  $y=7-x$  and  $y=x+1$

γ.  $y=-1/2 x+4$  and  $y=-3 1/2 x+19$

**Έργο μαθηματικού συλλογισμού**

1. Βρείτε δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο (3,4).
2. Βρείτε δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο (-3,4)
3. Βρείτε δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο (3,-4)
4. Βρείτε δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο (-3,-4)

Εξετάστε το Μαθηματικό έργο 8 σχετικά με τους μέσους όρους και τον αριθμητικό μέσο (δείτε παρακάτω) το οποίο δεν συνδέεται άμεσα με ένα συνηθισμένο έργο σχολικού βιβλίου. Ωστόσο το έργο αυτό δείχνει ότι έργα ερμηνείας στα οποία οι μαθητές διερευνούν μια

δήλωση μέσω της ανάπτυξης προβληματισμού και της δημιουργίας παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, μπορούν να σχεδιαστούν σχετικά εύκολα.



### Μαθηματικό έργο 8:

Διερεύνηση της ισχύος μιας δήλωσης μέσα από τη δημιουργία παραδειγμάτων και την ανάπτυξη προβληματισμού<sup>18</sup>

Ο αριθμητικός μέσος τεσσάρων αριθμών είναι αρνητικός.

- A) Μπορεί και οι τέσσερις αριθμοί να είναι αρνητικοί; Εξηγήστε.  
 B) Μπορεί και οι τέσσερις αριθμοί να είναι θετικοί; Εξηγήστε.  
 Γ) Μπορεί ακριβώς δύο από τους αριθμούς να είναι θετικοί; Εξηγήστε.

- Δ) Μπορεί ακριβώς δύο από τους αριθμούς να είναι αρνητικοί; Εξηγήστε.  
 Ε) Μπορεί ακριβώς ένας από τους αριθμούς να είναι αρνητικός; Εξηγήστε.

### Στρατηγική 5: Εφαρμογές

Τα έργα που είναι εφαρμογές χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά στα σχολικά βιβλία. Συχνά, μπορούν να αναπροσαρμοστούν ώστε να βελτιώσουν τις δυνατότητες των μαθητών για μαθηματικό συλλογισμό. Πράγματι, οι προηγούμενες στρατηγικές μπορούν να εφαρμοστούν για τη βελτίωση τέτοιων έργων.

Επιπλέον, μπορεί να ενθαρρυνθεί η μαθηματική επικοινωνία των μαθητών όταν τους ζητείται να συγκρίνουν δύο επιλογές (βλ. έργο συλλογισμού 3 ή μαθηματικό έργο 9) ή να προβληματιστούν σχετικά με το εάν ένα μαθηματικό μοντέλο έχει νόημα στον πραγματικό κόσμο.



### Μαθηματικά έργα 9:

Εφαρμογές και πρόσθετα έργα μαθηματικού συλλογισμού

#### Αρχικό έργο

Οι οδηγοί φορτηγών πληρώνουν ένα ποσό (ναύλος) για να χρησιμοποιήσουν ένα πλοίο. Ο ναύλος εξαρτάται από το μήκος του φορτηγού. Ο ναύλος αποτελείται από ένα σταθερό ποσό 20€ συν 2€ ανά μέτρο του μήκους του φορτηγού.

- α. Γράψτε έναν τύπο για το ποσό που πρέπει να πληρώσει ένας οδηγός φορτηγού.  
 β. Ο ναύλος άλλαξε. Το σταθερό ποσό αυξάνεται κατά 10%, αλλά το ποσό ανά μέτρο μειώνεται κατά 10%. Γράψτε έναν τύπο για το νέο ναύλο.

#### Έργο μαθηματικού συλλογισμού

1. Πώς αλλάζει ο τύπος εάν αυξηθεί το σταθερό ποσό κατά 20% και μειωθεί κατά 20% ανά μέτρο;
2. Πώς αλλάζει ο τύπος εάν και τα δύο ποσά αυξηθούν κατά 30%; 40% 50% 100%;
3. Ποια από τις επιλογές αυτές είναι η καλύτερη για την ακτοπλοϊκή εταιρεία; Γιατί;

<sup>18</sup>from Friedlander, A., & Arcavi, A. (2012), σελ.612

#### 4.4 Εφαρμογή έργων συλλογισμού σε μια τάξη που προάγει τον μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών

Έχουμε δει ότι η ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών στην καθημερινή διδασκαλία αποτελεί μια βασική πτυχή της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών<sup>19</sup>, και ότι η επιλογή και η προσαρμογή των έργων είναι κρίσιμη. Ωστόσο, για την προώθηση του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών ενώ εργάζονται σε έργα συλλογισμού, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να ξέρουν πώς να θέτουν ερωτήματα στρατηγικής (βλ. παρακάτω) όπως και πώς να διαμορφώνουν μαθησιακά περιβάλλοντα και κουλτούρα στην τάξη (βλ. παρακάτω) που παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες για την ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού.

##### Υποβολή ερωτήσεων ως πρακτική

Η υποβολή ερωτήσεων από τον εκπαιδευτικό αποτελεί σημαντική διδακτική πρακτική για την υποστήριξη του συλλογισμού, καθώς αντλεί από τις ιδέες και τις κατανοήσεις των μαθητών. Στη συνέχεια, αυτές οι ιδέες και οι κατανοήσεις μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο διαπραγμάτευσης στην τάξη, έτσι ώστε η κοινότητα της τάξης να μπορέσει να βρει λύσεις μέσω συνεργασίας. Οι ερωτήσεις που θέτει ο εκπαιδευτικός παίζουν καθοριστικό ρόλο στην προώθηση της κατανόησης των μαθητών, στην κατασκευή νέας γνώσης, καθώς και στην ανταλλαγή ιδεών<sup>20</sup>. Με άλλα λόγια, **η υποβολή κατάλληλων ερωτήσεων αναφορικά με τις στρατηγικές των μαθητών μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν καλύτερα την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών**. Επιπλέον, βοηθούν τους εκπαιδευτικούς στη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων για τα επόμενα μαθήματά τους<sup>21</sup>.



##### Εργασία για τους εκπαιδευτικούς

Όταν (στη Μελέτη Μαθήματος) παρατηρείτε ένα μάθημα ή ένα βίντεο κλιπ, σκεφτείτε ποιες από τις παραπάνω πέντε αρχές χρησιμοποιούνται στο μάθημα. Σε τι συνίστανται οι ερωτήσεις που απευθύνονται σε όλους τους μαθητές; Πώς κρίνονται οι λάθος απαντήσεις ή πώς αξιολογούνται οι σωστές απαντήσεις;

Στη συνέχεια, και ανάλογα με το είδος των ερωτήσεων που τίθενται (από τον εκπαιδευτικό) και απαντώνται από τον/τους μαθητή/ές, μπορεί να δοθούν ενδείξεις για το τι έχουν μάθει οι μαθητές από το μάθημα. Στην πραγματικότητα, η επικοινωνία των μαθητών αποκαλύπτει πολλά για τη σκέψη τους<sup>24</sup> και ως εκ τούτου αποτελεί κύριο εργαλείο για την αξιολόγηση της μαθηματικής τους σκέψης.

##### Κοινωνική κουλτούρα της τάξης

Οι διδακτικές ενέργειες του εκπαιδευτικού είναι κρίσιμες για την δημιουργία Μαθηματικών Κοινοτήτων Μάθησης. Ο μαθηματικός συλλογισμός και η κατανόηση προκύπτουν με φυσικό τρόπο μέσα από την επικοινωνία που λαμβάνει χώρα σε τέτοιες κοινότητες. Οι Μαθηματικές Κοινότητες Μάθησης περιγράφονται σχολικές τάξεις στις οποίες οι μαθητές μαθαίνουν να εργάζονται σε μαθηματικά έργα συμμετέχοντας σε μαθηματικές συζητήσεις, αναπτύσσοντας επιχειρήματα και απαντώντας στις ιδέες και τις εικασίες των συμμαθητών τους. Αντίστοιχα, οι μαθηματικές συζητήσεις ολόκληρης της τάξης που πυροδοτούνται από έργα συλλογισμού αποτελούν ευκαιρίες για την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών. Ο σχεδιασμός και η εισαγωγή στην τάξη έργων που προκαλούν σκέψη οδηγεί σε τέτοιες συζητήσεις, οι οποίες με

Οι ερευνητές ανέπτυξαν ένα μοντέλο για τις ερωτήσεις των εκπαιδευτικών<sup>22</sup>. Θεώρησαν τρεις κύριους τύπους ερωτήσεων:

- Οι **διερευνητικές ερωτήσεις** είναι ερωτήσεις που ζητούν από τους μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με το έργο να εξηγήσουν τη σκέψη τους, να παράσχουν αιτιολογίες ή αποδείξεις και να χρησιμοποιήσουν τις προηγούμενες γνώσεις τους. Αυτές οι ερωτήσεις επεκτείνουν την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών και τους ενθαρρύνουν να συσχετίσουν νέες ιδέες με προηγούμενες έννοιες και σχήματα.
- Οι **καθοδηγητικές ερωτήσεις** βοηθούν τους μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων ζητώντας λύσεις, στρατηγικές ή διαδικασίες, και έτσι υποστηρίζουν την κατανόησή τους για μια έννοια. Οι καθοδηγητικές ερωτήσεις μπορούν να υποστηρίξουν τους μαθητές στη δημιουργία των δικών τους ευρετικών και στη νοηματοδότηση των μαθηματικών εννοιών.
- Οι **πραγματολογικές ερωτήσεις** ζητούν διαδικασίες ή ορισμούς, καθώς και απαντήσεις ή επόμενα βήματα σε ένα πρόβλημα.

Σχετικά με το ποιοι τύποι ερωτήσεων μπορούν να ενισχύσουν/ενθαρρύνουν το συλλογισμό των μαθητών, το έργο PRIMAS EU<sup>23</sup> παρέχει πέντε αρχές για αποτελεσματική υποβολή ερωτήσεων:

- Σχεδιάστε ερωτήσεις που ενθαρρύνουν τη σκέψη και τον συλλογισμό.
- Κάντε ερωτήσεις που απευθύνονται σε όλους τους μαθητές.
- Δώστε χρόνο στους μαθητές να σκεφτούν.
- Αποφύγετε τις κρίσεις για τις απαντήσεις των μαθητών.
- Ακούστε προσεκτικά τις απαντήσεις των μαθητών και αξιοποιείστε τις με τρόπους που ενθαρρύνουν τη βαθύτερη σκέψη.

τη σειρά τους συνεισφέρουν στη διαμόρφωση μιας κουλτούρας αιτιολόγησης και απόδειξης.

Μια τάξη είναι μια κοινότητα μαθητών. Η δημιουργία μιας κοινότητας μάθησης στην οποία οι μαθητές οικοδομούν την κατανόηση των μαθηματικών έρχεται μέσα από την καθιέρωση ορισμένων προσδοκιών και νομών (που προωθούν την αιτιολόγηση και τον συλλογισμό) για τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αλληλεπιδρούν μεταξύ τους στο μάθημα των μαθηματικών. Σημειώνουμε ότι η αλληλεπίδραση είναι απαραίτητη, καθώς η επικοινωνία αποτελεί προϋπόθεση για την οικοδόμηση της κατανόησης. Υπάρχουν τέσσερα χαρακτηριστικά της κοινωνικής κουλτούρας της τάξης που αντιστοιχούν στο είδος της διδασκαλίας που οραματιζόμαστε: (1) οι ιδέες και οι μέθοδοι, που εκφράζονται από οποιονδήποτε μαθητή, είναι σημαντικές (καθώς δυνητικά συμβάλλουν στη μάθηση όλων και επομένως απαιτούν σεβασμό). (2) οι μαθητές επιλέγουν και μοιράζονται τις μεθόδους τους (καθώς υπάρχει μια ποικιλία μεθόδων που αξίζουν την προσοχή). (3) τα λάθη αποτελούν ευκαιρίες μάθησης για όλους (καθώς δυνητικά ανεβάζουν το επίπεδο μαθηματικής σκέψης κάθε μαθητή) και (4) η ορθότητα βρίσκεται στο μαθηματικό επιχείρημα (καθώς η πειστικότητα μιας εξήγησης ή αιτιολόγησης εξαρτάται από το μαθηματικό νόημα που έχει και όχι από, για παράδειγμα, την αποδοχή ή την κοινωνική θέση εκείνου που την παρουσιάζει).

<sup>19</sup> e.g., Boaler (2010)

<sup>20</sup> Moyer & Milewicz (2002)

<sup>21</sup> Jacobs et al., 2010

<sup>22</sup> Sahin and Kulm (2008)

<sup>23</sup> Utrecht University (2022)

<sup>24</sup> Sfard (2008)

<sup>25</sup> Yackel & Cobb (1996)

<sup>26</sup> Goos (2004)

<sup>27</sup> Ruthven (1989)

<sup>28</sup> Hiebert et al. (1997, σελ. 12)



### Κοινοποίηση των λύσεων των μαθητών

Το ακόλουθο έργο σχετίζεται με την «Κοινοποίηση των λύσεων των μαθητών» σε συζητήσεις ολόκληρης της τάξης. (Μπορείτε να το βρείτε στο έργο EU Educate<sup>29</sup>): Εξετάστε το ακόλουθο έργο που

σχεδιάστηκε και εφαρμόστηκε σε ένα τμήμα της Α' Γυμνασίου στην Ελλάδα. Το έργο, όπως φαίνεται στο φύλλο εργασίας των μαθητών, είναι το εξής:



### Μαθηματικό έργο 10: Επίλυση προβλήματος

Τα  $\frac{2}{3}$  μιας ποσότητας είναι 20€. Πόσα ευρώ είναι τα  $\frac{3}{4}$  της ίδιας ποσότητας;

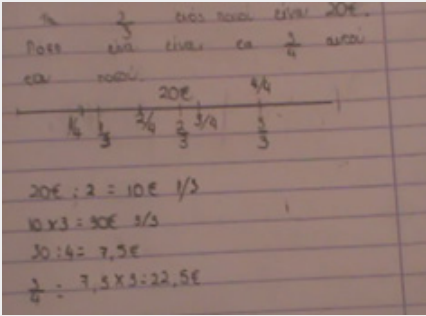

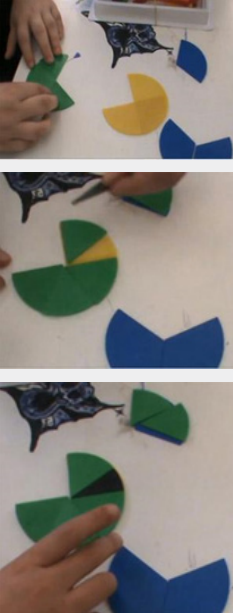
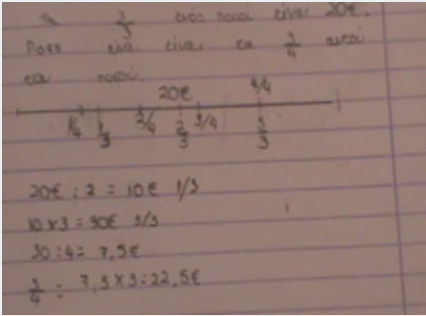
- Μπορείτε να επιλύσετε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας διαφορετικά υλικά (ράβδους Cuisenaire, δίσκους κλασμάτων, μάρκες, χάντρες, διαφανές χαρτί, χαρτί με κύκλους κλασμάτων, τετραγωνισμένο χαρτί) και αντίστοιχες αναπαραστάσεις.
- Να προσπαθήσετε να βρείτε όσο το δυνατό περισσότερες λύσεις.
- Δεν θα γίνουν αποδεκτές λύσεις που ακολουθούν αποκλειστικά μια αριθμητική μέθοδο (π.χ. αναγωγή στην κλασματική μονάδα). Αυτές οι λύσεις θα παρουσιαστούν ως επιπρόσθετες των υπολοίπων λύσεων.

Το έργο εφαρμόστηκε σε ένα τμήμα της Α' Γυμνασίου, όπου οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες των τριών ή τεσσάρων

για περίπου 10 λεπτά. Ο Πίνακας 3 δείχνει μερικές από τις απαντήσεις τους.

### Πίνακας 3

Απαντήσεις Μαθητών στο μαθηματικό έργο 10

Λύση της ομάδας 1:	Λύση της ομάδας 2:	Λύση της ομάδας 3:
<p>Οι μαθητές/ήτριες έχουν κατασκευάσει μια ράβδο προσθέτοντας μια πορτοκαλί και μια κόκκινη ράβδο. Θεωρώντας αυτή τη ράβδο ως μονάδα, τη διαχώρισαν σε τρίτα (4 πράσινες ράβδοι), τέταρτα (3 μπλε ράβδοι) και δωδέκατα (12 λευκές ράβδοι).</p> <p>Η λευκή ράβδος (η μικρότερη από τις ράβδους Cuisenaire) είναι η διαφορά ανάμεσα σε 3 πράσινες ράβδους (αναπαριστώντας <math>\frac{3}{4}</math>) και 2 λιλά ράβδους (αναπαριστώντας <math>\frac{2}{3}</math>) και αυτή η διαφορά είναι <math>\frac{1}{12}</math>. Το ίδιο μοντέλο αναπαρίσταται με δίσκους κλασμάτων.</p>	<p>Οι μαθητές/ήτριες υπολόγισαν <math>\frac{3}{4}</math> (κίτρινα μέρη) του ποσού, μέσα από τη χρήση των πράσινων, των μπλε και των μαύρων κομματιών. Αρχικά, χρησιμοποίησαν μέρη κλασμάτων του <math>\frac{1}{6}</math> (πράσινα μέρη) για να μετρήσουν <math>\frac{2}{3}</math> (μπλε μέρη) αναγνωρίζοντας ότι τα <math>\frac{2}{3}</math> καλύπτονται από τα <math>\frac{4}{6}</math>. Μετά, έλυσαν το πρόβλημα δουλεύοντας με μαύρες ράβδους ("αν προσθέσουμε <math>\frac{1}{12}</math> και <math>\frac{2}{3}</math> αυτό ισούται με <math>\frac{3}{4}</math>").</p>	<p>Αυτή η ομάδα χρησιμοποίησε μια αριθμητική μέθοδο και την αριθμογραμμή.</p> 
		



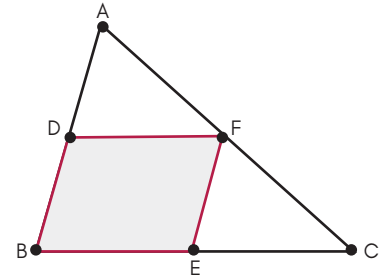
### Εργασία για τους εκπαιδευτικούς:

- Να συζητήσετε στην ομάδα σας σχετικά με τον συλλογισμό των μαθητών που οδήγησε στην λύση της κάθε ομάδας. Ποιες είναι οι διαφορές και οι ομοιότητες στον συλλογισμό των μαθητών;
- Φανταστείτε ότι θέλετε να οργανώσετε μια συζήτηση στην ολομέλεια προκειμένου όλη η τάξη να δουλέψει περαιτέρω με τις στρατηγικές και τις ιδέες των μαθητών. Με ποια σειρά θα θέτατε τις παραπάνω τρεις απαντήσεις στη συζήτηση; Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας. Να λάβετε υπόψη ότι σε τέτοιες συζητήσεις στην τάξη οι μαθητές ενθαρρύνονται να αναπτύξουν επιχειρήματα και να σχολιάσουν τις ιδέες και τις εικασίες των συμμαθητών τους. Να αιτιολογήσετε την απόφασή σας αν στοχεύετε να κατανοήσουν όλοι οι μαθητές τη λύση του έργου, λαμβάνοντας υπόψη τον ρόλο των διαφορετικών αναπαραστάσεων.
- Πώς μπορείτε να προωθήσετε τη διαμόρφωση μιας κοινότητας μάθησης στην παραπάνω τάξη;



### Μαθηματικό έργο 11: Τρίγωνο και τετράπλευρο

Στο σχήμα, τα σημεία D, F και E είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ABC. Να μελετήσετε πώς το τετράπλευρο BDFE αλλάζει, όταν το τρίγωνο ABC αλλάζει. Δηλαδή, πώς συνδέεται το είδος του τετράπλευρου με το είδος του τριγώνου.



### Εργασία για τους εκπαιδευτικούς:

Διαβάστε το μαθηματικό έργο 11. Παρακάτω θα βρείτε ένα απόσπασμα της συζήτησης στην τάξη σε ένα μάθημα Γεωμετρίας στην Α' Λυκείου. Προηγήθηκε εργασία όλων των μαθητών με το σχήμα και συζήτηση στην ολομέλεια (π.χ. πώς μπορεί να αλλάξει το τρίγωνο ABC). Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες για να μελετήσουν πώς αλλάζει το τετράπλευρο BDFE όταν αλλάζει το τρίγωνο ABC. Ο εκπαιδευτικός πλησιάζει μια ομάδα τεσσάρων μαθητών. Οι μαθητές αυτοί περιγράφουν τη δουλειά τους:

**M1:** Αν είναι ορθογώνιο τρίγωνο, θα είναι ή τετράγωνο ή ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, επειδή έχει μία γωνία ορθή και το τετράπλευρο παραμένει παραλληλόγραμμο,

**M2:** ναι, δηλαδή σε οποιοδήποτε είδος τριγώνου θα παραμένει παραλληλόγραμμο

**EΚΠ:** Ωραία, αλλά εδώ υπάρχουν ειδικές κατηγορίες παραλληλογράμμων. Μιλάτε για ορθογώνιο, για τετράγωνο κλπ. Πότε είναι ορθογώνιο; Πότε είναι τετράγωνο; Ο στόχος είναι να διερευνήσεις και να συνδέσεις το τι σόι παραλληλόγραμμο είναι αυτό με το πότε συμβαίνει αυτό. [δεν μιλούν]. Μπορείς να μου εξηγήσεις τι σχήμα είναι αυτό S1;

**M1:** το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

**EΚΠ:** ωραία.

**M1:** το BDFE είναι παραλληλόγραμμο και μπορεί να είναι ή τετράγωνο ή ορθογώνιο

**EΚΠ:** αμέσως μπαίνεις σε μια διαδικασία που λες αν - τότε. Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, τότε το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο. Συνέχισέ το αυτό. Αυτή την ιδέα. Αν - τότε. Να συνδέσεις δηλαδή το τι είναι το ένα [το τρίγωνο] με το τι είναι το άλλο [το παραλληλόγραμμο]

**M3:** Δηλαδή θα πούμε, ξέρω γω, αν είναι σκαληνό το τρίγωνο τότε αυτό, αν είναι ισόπλευρο τότε αυτό;

**EΚΠ:** Δεν ξέρω. Εκεί παίζεται; Στο αν είναι ισόπλευρο;

Ότι παίζεται. Ναι ίσως

**M3:** Απλά τι είδους υποθέσεις να κάνουμε, αυτό [να μας πείτε]...

**EΚΠ:** ... Δηλαδή πώς συνδέεται το είδος [τονίζει τη λέξη "είδος"] του τετραπλεύρου με το είδος [τονίζει τη λέξη "είδος"] του τριγώνου.

**M3:** Α, δηλαδή θα πούμε, αν, ας πούμε, το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, τότε και το τρίγωνο είναι τάδε...

**EΚΠ:** μάλιστα, αν νομίζεις έτσι ...

**M3:** [γελάει] ελάτε τώρα κύριε [σαν να διαμαρτύρεται που δεν παίρνει σαφή απάντηση]

**EΚΠ:** ναι, μα δεν θέλω να στο πω εγώ, θέλω να το σκεφτείς μόνος σου. Η ερώτηση είναι πώς συνδέεται το είδος του τετραπλεύρου με το είδος του τριγώνου. Κάνε ότι θες. Ο εκπαιδευτικός απομακρύνεται πηγαίνοντας προς άλλη ομάδα.

### Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- α) Πώς σχετίζεται το συγκεκριμένο έργο με τον μαθηματικό συλλογισμό;
- β) Ποιες πιστεύετε ότι είναι οι βασικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε αυτό το απόσπασμα;
- γ) Γιατί πιστεύετε ότι ο εκπαιδευτικός αφήνει τους μαθητές χωρίς να δώσει τελική απάντηση; Τι διαφορετικό θα μπορούσατε να κάνετε αν είχατε τον ρόλο του εκπαιδευτικού;
- δ) Εφαρμόζει ο εκπαιδευτικός τις πέντε αρχές της αποτελεσματικής υποβολής ερωτήσεων (Ενότητα 4.4); Ναι ή όχι και γιατί;

#### 4.5 Παρατήρηση του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών

Στο πλαίσιο της Μελέτης Μαθήματος, ο στόχος είναι να βελτιώσετε την κατανόησή σας για τα φαινόμενα της τάξης που σχετίζονται με τον μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών σας και με τον αντίκτυπο των διδακτικών σας ενεργειών. Για παράδειγμα, φανταστείτε ότι έχετε τον ρόλο του εκπαιδευτικού στο παραπάνω επεισόδιο. Θα μπορούσατε να παρατηρήσετε την εξέλιξη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας των μαθητών στο συγκεκριμένο απόσπασμα, προκειμένου να υποβάλλετε στοχευμένες ερωτήσεις (διερευνητικές, καθοδηγητικές, πραγματολογικές) με βάση τη συγκεκριμένη επιχειρηματολογία; Η παρατήρηση και ακολούθως η λήψη αποφάσεων σε μια δεδομένη στιγμή είναι πολύ απαιτητική.

Στο ερευνητικό πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών, το θεωρητικό δόγμα της παρατήρησης (noticing) από τον εκπαιδευτικό έχει αναπτυχθεί σε σχέση αυτή την ανάγκη. Το δόγμα αυτό έχει εισαχθεί στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά για τη μελέτη των αλλαγών στη δομή της εστίασής τους σε φαινόμενα της διδασκαλίας και, μέσω αυτού, στην αναγνώριση διαφορετικών επιπέδων κατανόησης τόσο στα μαθηματικά όσο και στη διδασκαλία των μαθηματικών<sup>30</sup>. Η παρατήρηση θεωρείται ως μια πολύπλοκη ενέργεια που εμπλέκει τους εκπαιδευτικούς στον εντοπισμό κρίσιμων συμβάντων από τις αλληλεπιδράσεις στην τάξη, στην ερμηνεία αυτών των αξιοσημείων συμβάντων με βάση τις γνώσεις και τις εμπειρίες τους και στη σύνδεσή τους με ευρύτερες αρχές της διδασκαλίας και της μάθησης<sup>31</sup>.

Η Μελέτη Μαθήματος παρέχει ένα ιδανικό πλαίσιο για να μάθουν οι εκπαιδευτικοί πώς να παρατηρούν, να ερμηνεύουν και να συζητούν τις αλληλεπιδράσεις στην τάξη σε σχέση με τη μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών. Η παρατήρηση κρίσιμων γεγονότων στην τάξη θα πρέπει να οδηγεί σε τεκμηριωμένες διδακτικές αποφάσεις που βασίζονται στον συλλογισμό των μαθητών και τον αναπτύσσουν. Αυτή η παρατήρηση περιλαμβάνει διάφορα βήματα:

1. την παρακολούθηση αξιοσημείων (δυναμικά κρίσιμων) συμβάντων,
2. την ερμηνεία αξιοσημείων συμβάντων σε σχέση με τους στόχους του μαθήματος και την κατανόηση των μαθητών, και
3. τις διδακτικές ενέργειες που συνιστούν την απάντηση στα συμβάντα, π.χ. ποια έργα θα επιλεχθούν για το επόμενο μάθημα ή ποιες ερωτήσεις θα τεθούν κατά τη διάρκεια μιας συζήτησης στην τάξη.

Το βασικό στοιχείο σε αυτά τα τρία βήματα είναι εάν η τεκμηρίωση των διδακτικών ενεργειών βασίζεται στις αρχές της καλής διδασκαλίας και μάθησης<sup>32</sup> (π.χ. αποτελεσματική υποβολή ερωτήσεων, βλ. ενότητα 4.4). Τα τρία παραπάνω βήματα μπορούν να υποστηριχθούν με τη χρήση διδακτικών πόρων που καθοδηγούν την ερμηνεία του συλλογισμού των μαθητών ή τη λεπτομερή ανάλυση βιντεοσκοπημένων μαθημάτων με σκοπό την διάκριση βημάτων στη μαθηματική σκέψη των μαθητών.

Στην ακόλουθη εργασία για εκπαιδευτικούς δίνεται ένα παράδειγμα κρίσιμου συμβάντος και ερωτήσεις που μπορούν να υποστηρίξουν τον εκπαιδευτικό στην παρατήρησή του, σε σχέση με τις πτυχές που συζητήθηκαν παραπάνω:



#### Εργασία για εκπαιδευτικούς

Σε ένα μάθημα στην Α΄ Γυμνασίου, ζητήθηκε από τους μαθητές να λύσουν το επόμενο πρόβλημα:

«Μπορείτε να κάνετε τις δύο παρακάτω στήλες να έχουν το ίδιο άθροισμα ανταλλάσσοντας μόνο δύο αριθμούς μεταξύ των στηλών; Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι.»

1	7
3	2
8	4
5	9

- α) Λύστε αυτό το πρόβλημα και περιγράψτε πιθανές στρατηγικές επίλυσης των μαθητών.
- β) Ποιες πτυχές του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών στοχεύει να αναδείξει αυτό το πρόβλημα;
- γ) Φανταστείτε ότι είστε εκπαιδευτικός σε ένα τμήμα Α΄ Γυμνασίου και έχετε θέσει αυτό το πρόβλημα στους μαθητές. Σκεφτείτε πιθανά συμβάντα σε σχέση με την επιχειρηματολογία και τον συλλογισμό των μαθητών και γράψτε έναν υποθετικό διάλογο ανάμεσα σε εσάς και τους μαθητές ή μεταξύ των ίδιων των μαθητών γύρω από ένα συμβάν που θεωρείτε κρίσιμο. Εξηγήστε γιατί θεωρείτε κρίσιμο αυτό το συμβάν.

<sup>30</sup>Mason (2002)

<sup>31</sup>e.g., van Es & Sherin (2010)

<sup>32</sup>van Es (2011)




#### 4.6 Αξιολόγηση των ενεργειών συλλογισμού των μαθητών

Παρά τον κρίσιμο ρόλο του συλλογισμού στην τάξη των μαθηματικών, πολλοί εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην αξιολόγησή του<sup>33</sup>. Αυτό οφείλεται στην πολυπλοκότητα που περιλαμβάνεται στην ανάπτυξη λεπτομερών κρίσεων για τις ενέργειες συλλογισμού των μαθητών, καθώς και στην ανάγκη αξιοποίησης πολλαπλών πηγών τεκμηρίων για την αξιολόγηση των δεξιοτήτων συλλογισμού των μαθητών<sup>34</sup>. Αυτή η πολυπλοκότητα έχει ως αποτέλεσμα τις δυσκολίες των εκπαιδευτικών να παρατηρήσουν το επίπεδο των δεξιοτήτων συλλογισμού των μαθητών και, ως εκ τούτου, να συνεισφέρουν στη βελτίωσή του<sup>35</sup>.

Η Ρουμπρίκα Αξιολόγησης Μαθηματικού Συλλογισμού<sup>36</sup> σχεδιάστηκε για να αξιολογήσει και να αποτιμήσει τις δεξιότητες συλλογισμού των μαθητών. Είναι μια λεπτομερής ρουμπρίκα που περιλαμβάνει τις τρεις ενέργειες συλλογισμού: Ανάλυση (διερεύνηση του έργου συλλογισμού και σύνδεση με γνωστά γεγονότα και ιδιότητες), Γενίκευση (εντοπισμός κοινών ιδιοτήτων ή κανονικοτήτων στις διάφορες περιπτώσεις ή διατύπωση εικασιών) και Αιτιολόγηση (έλεγχος της αλήθειας των εικασιών ή χρήση λογικών επιχειρημάτων για να πειστούν οι άλλοι) σε πέντε επίπεδα επάρκειας (μη εμφανές, αρχικό, αναπτυσσόμενο, εμπεδωμένο και επεκτάσιμο).

#### Πίνακας 4

Ρουμπρίκα Αξιολόγησης Μαθηματικού Συλλογισμού<sup>37</sup>

	 <b>Ανάλυση</b>	 <b>Γενίκευση</b>	 <b>Αιτιολόγηση</b>
<b>Μη εμφανές</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Δεν παρατηρεί αριθμητική ή χωρική δομή των παραδειγμάτων ή των περιπτώσεων.</li> <li>Δίνει προσοχή σε μη μαθηματικές πτυχές των παραδειγμάτων ή των περιπτώσεων.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Δεν επικοινωνεί μια κοινή ιδιότητα ή κανόνα μοτίβου.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Δεν δικαιολογεί.</li> <li>Καλεί σε βοήθεια τον εκπαιδευτικό ή άλλους.</li> </ul>
<b>Αρχικό</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Παρατηρεί ομοιότητες μεταξύ των παραδειγμάτων.</li> <li>Ανακαλεί τυχαία γνωστά γεγονότα που σχετίζονται με τα παραδείγματα.</li> <li>Ανακαλεί και επαναλαμβάνει μοτίβα που εμφανίζονται οπτικά ή με τη χρήση υλικών.</li> <li>Προσπαθεί να ταξινομήσει περιπτώσεις με βάση μια κοινή ιδιότητα.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Εφιστά την προσοχή ή επιχειρεί να επικοινωνήσει μια κοινή ιδιότητα ή επαναλαμβανόμενα στοιχεία ενός μοτίβου χρησιμοποιώντας: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Τη γλώσσα του σώματος (χειρονομίες)</li> <li>- Σχέδιο</li> <li>- Χειραπτικά υλικά</li> <li>- Καταμέτρηση</li> <li>- Προφορική γλώσσα (μεταφορές)</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Περιγράφει τι έκανε και γιατί μπορεί να είναι ή να μην είναι σωστό.</li> <li>Αναγνωρίζει τι είναι σωστό ή λάθος χρησιμοποιώντας υλικά, αντικείμενα ή λέξεις.</li> <li>Κάνει κρίσεις με βάση απλά κριτήρια όπως γνωστά γεγονότα.</li> <li>Το επιχειρήμα του μπορεί να μην είναι συνεκτικό ή να μην περιλαμβάνει όλα τα βήματα του συλλογισμού.</li> </ul>
<b>Αναπτυσσόμενο</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Παρατηρεί μια κοινή αριθμητική ή χωρική ιδιότητα.</li> <li>Ανακαλεί και επαναλαμβάνει μοτίβα χρησιμοποιώντας αριθμητική ή χωρική δομή.</li> <li>Επιλέγει και ταξινομεί σε κατηγορίες σύμφωνα με μια κοινή ιδιότητα.</li> <li>Ταξινομεί περιπτώσεις για να δείξει τι είναι ή παραμένει ίδιο και τι είναι διαφορετικό ή αλλάζει.</li> <li>Περιγράφει την περίπτωση ή το μοτίβο αναφέροντας τον τίτλο της κατηγορίας ή της σειράς.</li> </ul>	<p>Κοινοποιεί έναν κανόνα (εικασία) σχετικά με:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Μια ιδιότητα χρησιμοποιώντας λέξεις, διαγράμματα ή αριθμητικές προτάσεις.</li> <li>Ένα μοτίβο χρησιμοποιώντας λέξεις, διαγράμματα για να δείξει την αναδρομικότητα ή αριθμητικών προτάσεων για να επικοινωνήσει το μοτίβο ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.</li> <li>Καταγράφει άλλες περιπτώσεις που ταιριάζουν στον κανόνα (εικασία) ή επεκτείνει το μοτίβο χρησιμοποιώντας τον κανόνα.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Προσπαθεί να επαληθεύσει δοκιμάζοντας περιπτώσεις ή εξηγώντας το νόημα μιας εικασίας χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα.</li> <li>Ανιχνεύει και διορθώνει σφάλματα και ασυνέπειες χρησιμοποιώντας υλικά, διαγράμματα και άτυπες γραπτές μεθόδους.</li> <li>Οι αρχικές δηλώσεις σε ένα λογικό επιχειρήμα είναι σωστές και αποδεκτές από την τάξη.</li> </ul>

<sup>33</sup>Herbert (2021)

<sup>34</sup>Davidson, Herbert & Bragg (2019)

<sup>35</sup>Llinares (2013)

<sup>36</sup>Australian Academy of Science (2018)

<sup>37</sup>Australian Academy of Science (2018).



### Ανάλυση



### Γενίκευση



### Αιτιολόγηση

#### Εμπεδωμένο

- Παρατηρεί περισσότερες από μία κοινές ιδιότητες δημιουργώντας συστηματικά περαιτέρω περιπτώσεις ή/και καταχωρώντας και λαμβάνοντας υπόψη μια σειρά από γνωστά γεγονότα ή ιδιότητες.
- Επαναλαμβάνει και επεκτείνει μοτίβα χρησιμοποιώντας τόσο αριθμητική όσο και χωρική δομή.
- Αναζητά και παράγει παραδείγματα χρησιμοποιώντας εργαλεία, τεχνολογία και μοντελοποίηση.
- Κάνει προβλέψεις για άλλες περιπτώσεις:
  - Που έχουν την ίδια ιδιότητα
  - Που ακολουθούν το μοτίβο

- Γενικεύει: κοινοποιεί έναν κανόνα (εικασία) χρησιμοποιώντας μαθηματικούς όρους, σύμβολα ή διαγράμματα (π.χ. μια αριθμητική πρόταση ή ένα γεωμετρικό σχήμα).
- Εξηγεί το νόημα του κανόνα (της εικασίας) χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα.
- Επεκτείνει το μοτίβο χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα για να εξηγήσει πώς λειτουργεί ο κανόνας.

- Επιβεβαιώνει την αλήθεια των προτάσεων χρησιμοποιώντας μια κοινή ιδιότητα, έναν κανόνα ή γνωστά γεγονότα που επιβεβαιώνουν όλες τις περιπτώσεις. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιεί υλικά και ανεπίσημες μεθόδους.
- Αντικρούει έναν ισχυρισμό χρησιμοποιώντας ένα αντιπαράδειγμα.
- Χρησιμοποιεί ένα σωστό λογικό επιχειρήμα που περιέχει μια πλήρη αλυσίδα συλλογισμών και χρησιμοποιεί λέξεις όπως «επειδή», «αν ... τότε...», «άρα», «και έτσι», «που οδηγεί σε»,...
- Επεκτείνει τη γενίκευση χρησιμοποιώντας λογικό επιχειρήμα.

#### Επεκτάσιμο

Παρατηρεί και διερευνά τις σχέσεις μεταξύ:

- Κοινών ιδιοτήτων
- Αριθμητικών δομών μοτίβων.

- Γενικεύει: επικοινωνεί τον κανόνα (εικασία) χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα.
- Εφαρμόζει τον κανόνα για να βρει επιπλέον παραδείγματα ή περιπτώσεις.
- Γενικεύει ιδιότητες σχηματίζοντας μια δήλωση για τη σχέση μεταξύ κοινών ιδιοτήτων.
- Συγκρίνει διαφορετικές συμβολικές εκφράσεις που χρησιμοποιούνται για να ορίσουν το ίδιο μοτίβο για να δείξει την ισοδυναμία.

- Χρησιμοποιεί ένα λογικό επιχειρήμα που είναι μαθηματικά ορθό και δεν αφήνει τίποτα ανεξήγητο.
- Επιβεβαιώνει ότι η πρόταση είναι αληθής ή ότι η γενίκευση ισχύει για όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιώντας λογικό επιχειρήμα.

Παρακάτω, δίνεται ένα παράδειγμα για το πώς αυτή η ρουμπρίκα μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους εκπαιδευτικούς.



## Μαθηματικό έργο 12: Χειραψίες και αεροπλάνα

1. Δέκα άνθρωποι παραβρέθηκαν σε μια συνάντηση. Αν όλοι αντάλλαξαν χειραψία με όλους, πόσες χειραψίες ανταλλάχτηκαν συνολικά;
2. Μια νέα διεθνής αεροπορική εταιρεία θα συνδέσει 12 αεροδρόμια σε 12 διαφορετικές χώρες. Ποια είναι όλα τα πιθανά δρομολόγια που θα χρειαστεί να δημιουργήσει η αεροπορική εταιρεία;

### Λύση μαθητή 1

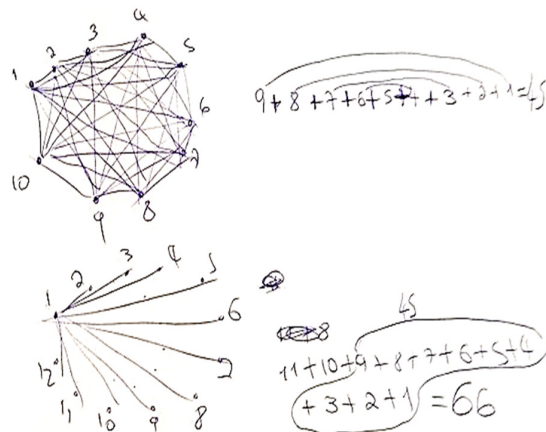
$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ handshakes}$$

$$\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66 \text{ routes}$$

They both can be solved using combination.

### Λύση μαθητή 2

They are both math problems,



They are connecting things. I make many connections among the dots to solve them. (Similar problems)



### Εργασία για τον εκπαιδευτικό

- α) Λύστε το πρόβλημα που αναφέρεται στο Μαθηματικό έργο 12.
- β) Παραπάνω, παρατίθενται οι λύσεις δύο μαθητών για το Μαθηματικό έργο 12. Παρατηρείται ομοιότητες μεταξύ των δυο λύσεων; Καταγράψτε αυτές τις ομοιότητες.

Ακολουθώντας, αξιολογούμε τον μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών 1 και 2. Ο Μαθητής 1 παρατηρεί ότι το πρόβλημα σχετίζεται με τη Συνδυαστική. Χρησιμοποιεί ένα ορθό μαθηματικό επιχείρημα. Χρησιμοποιεί συμβολικές εκφράσεις για να ορίσει το ίδιο μοτίβο

στα δυο προβλήματα. Μπορεί να εφαρμόσει τον κανόνα σε παρόμοια προβλήματα. Οι συλλογιστικές ενέργειες του Μαθητή 1 κατατάσσονται στο επεκτάσιμο επίπεδο.

<p><b>Επεκτάσιμο</b></p>	<p>Παρατηρεί και διερευνά τις σχέσεις μεταξύ:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Κοινών ιδιοτήτων</li> <li>• Αριθμητικών δομών μοτίβων.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Γενικεύει: επικοινωνεί τον κανόνα (εικασία) χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα.</li> <li>• Εφαρμόζει τον κανόνα για να βρει επιπλέον παραδείγματα ή περιπτώσεις.</li> <li>• Γενικεύει ιδιότητες σχηματίζοντας μια δήλωση για τη σχέση μεταξύ κοινών ιδιοτήτων.</li> <li>• Συγκρίνει διαφορετικές συμβολικές εκφράσεις που χρησιμοποιούνται για να ορίσουν το ίδιο μοτίβο για να δείξει την ισοδυναμία.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Χρησιμοποιεί ένα στεγανό λογικό επιχείρημα που είναι μαθηματικά ορθό και δεν αφήνει τίποτα ανεξήγητο.</li> <li>• Επιβεβαιώνει ότι η πρόταση είναι αληθής ή ότι η γενίκευση ισχύει για όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιώντας λογικό επιχείρημα.</li> </ul>
--------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Ο Μαθητής 2 αρχίζει να αναπτύσσει μια μορφή συλλογισμού όσον αφορά στις ενέργειες γενίκευσης που επιστρατεύει. Χρησιμοποιεί αριθμητικά και χωρικά μοτίβα συλλογισμού. Κατανοεί τον κανόνα και μπορεί να τον επεκτείνει σε παρόμοιες περιπτώσεις.

Ερμηνεύει τον κανόνα του χωρικά συνδέοντας τελείες. Οι συλλογιστικές ενέργειες του Μαθητή 2 κατατάσσονται στο αναπτυσσόμενο επίπεδο.

<p><b>Αναπτυσσόμενο</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Παρατηρεί μια κοινή αριθμητική ή χωρική ιδιότητα.</li> <li>• Ανακαλεί και επαναλαμβάνει μοτίβα χρησιμοποιώντας αριθμητική ή χωρική δομή.</li> <li>• Επιλέγει και ταξινομεί σε κατηγορίες σύμφωνα με μια κοινή ιδιότητα.</li> <li>• Ταξινομεί περιπτώσεις για να δείξει τι είναι ή παραμένει ίδιο και τι είναι διαφορετικό ή αλλάζει.</li> <li>• Περιγράφει την περίπτωση ή το μοτίβο αναφέροντας τον τίτλο της κατηγορίας ή της σειράς.</li> </ul>	<p><b>Κοινοποιεί έναν κανόνα (εικασία) σχετικά με:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Μια ιδιότητα, χρησιμοποιώντας λέξεις, διαγράμματα ή αριθμητικές προτάσεις.</li> <li>• Ένα μοτίβο, χρησιμοποιώντας λέξεις, διαγράμματα για να δείξει την αναδρομικότητα ή αριθμητικών προτάσεων για να επικοινωνήσει το μοτίβο ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.</li> <li>• Καταγράφει άλλες περιπτώσεις που ταιριάζουν στον κανόνα (εικασία) ή επεκτείνει το μοτίβο χρησιμοποιώντας τον κανόνα.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Προσπαθεί να επαληθεύσει δοκιμάζοντας περιπτώσεις ή εξηγώντας το νόημα μιας εικασίας χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα.</li> <li>• Ανιχνεύει και διορθώνει σφάλματα και ασυνέπειες χρησιμοποιώντας υλικά, διαγράμματα και άτυπες γραπτές μεθόδους.</li> <li>• Οι αρχικές δηλώσεις σε ένα λογικό επιχείρημα είναι σωστές και αποδεκτές από την τάξη.</li> </ul>
-----------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## 5. Τελικές παρατηρήσεις

Στο Μέρος I του εγχειριδίου για τη Μελέτη Μαθήματος, ο σκοπός ήταν να σας υποστηρίξουμε (ως εκπαιδευτικό) να αναπτύξετε γνώσεις σχετικά με το πώς οι προετοιμασίες και οι ενέργειές σας στην τάξη μπορούν να ενισχύσουν τον μαθηματικό συλλογισμό των

μαθητών σας. Στο Μέρος II, προσφέρονται επεξηγήσεις σχετικά με τη Μελέτη Μαθήματος, ώστε να μπορείτε να συνεργαστείτε με τους συναδέλφους σας για την ενίσχυση του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών σας στην τάξη.



## Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος

# 02



## 1. Εισαγωγή

Στο δεύτερο μέρος του εγχειριδίου, παρουσιάζεται η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος. Αρχικά γίνεται μια εισαγωγή για την μέθοδο της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος. Ακολουθεί η περιγραφή των διαφόρων σταδίων της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος, η οποία περιλαμβάνει πρακτικές

συμβουλές και παραδείγματα. Στο κείμενο αυτό γίνονται **αναφορές σε έντυπα** τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συγκεκριμένα στάδια της διαδικασίας Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος. Τα έντυπα αυτά παρουσιάζονται στο τέλος αυτού του εγχειριδίου.

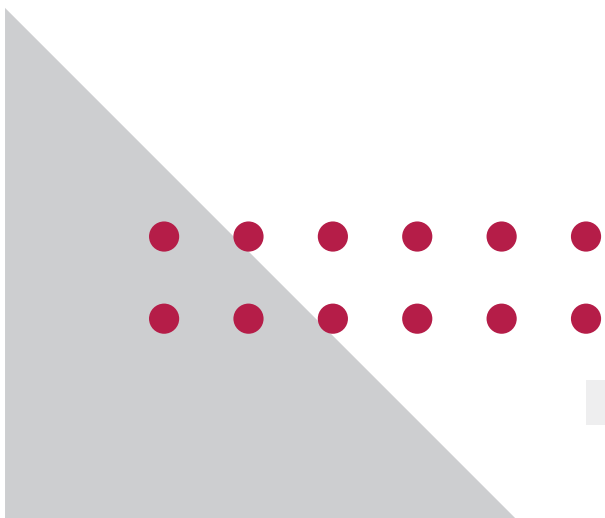


### 1.1 Τι είναι η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος;

Η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος (EMM) είναι μια συγκεκριμένη μορφή συνεργατικής έρευνας δράσης στο συγκεκριμένο της σχολικής τάξης, η οποία επικεντρώνεται στην ανάπτυξη της μάθησης, της διδασκαλίας και των αναλυτικών προγραμμάτων<sup>38</sup>. Η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος είναι μια μέθοδος κατά την οποία οι εκπαιδευτικοί εργάζονται σε ομάδες, ως «εκπαιδευτικοί-ερευνητές», σε σχέση με την δική τους πρακτική στην σχολική τάξη. Οι εκπαιδευτικοί θέτουν τις πρακτικές διδασκαλίας τους υπό αναθεώρηση, αναζητούν και εξετάζουν εναλλακτικές ή καινοτομίες, μελετούν την μάθηση των μαθητών τους και έτσι προσαρμόζουν και ενισχύουν νέες προσεγγίσεις. Οι εκπαιδευτικοί σχηματίζουν δεμένες κοινότητες μάθησης και διεξάγουν συλλογικές έρευνες. Η συμμετοχή σε συλλογικές έρευνες με σκοπό την βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης είναι μια σημαντική ενέργεια που μπορεί να κάνει ένας εκπαιδευτικός για να βελτιώσει τα μαθησιακά αποτελέσματα των μαθητών<sup>39</sup>.

Η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος έχει τα παρακάτω κύρια χαρακτηριστικά.

- Εστιάζει στις **εκπαιδευτικές ανάγκες των μαθητών**. Αυτές οι ανάγκες είναι συχνά το σημείο εκκίνησης. Οι ενέργειες, οι προσπάθειες και η μάθηση των μαθητών παρατηρούνται κατά την υλοποίηση του ερευνητικού μαθήματος.
- Σε μια ομάδα Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος, οι εκπαιδευτικοί αναλαμβάνουν τον ρόλο των **ερευνητών** του αναλυτικού προγράμματος και διδακτικών πρακτικών. Τα μέλη της ομάδας Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος αναλύουν το αναλυτικό πρόγραμμα και τα αποτελέσματα των μαθητών, ερευνούν εναλλακτικές προσεγγίσεις και διατυπώνουν ένα ερευνητικό ερώτημα. Το ερευνητικό ερώτημα σχετίζεται με τους τρόπους με τους οποίους το αναλυτικό πρόγραμμα και/ή οι διδακτικές πρακτικές θα μπορούσαν να βελτιωθούν και να προωθήσουν την μάθηση των μαθητών και την επαγγελματική μάθηση των εκπαιδευτικών. Το ερευνητικό ερώτημα καθοδηγεί τις δραστηριότητες στις διάφορες φάσεις του κύκλου της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος.
- Η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος είναι μια **διαδικασία** που περιλαμβάνει διάφορες δραστηριότητες και η συνεργασία μεταξύ εκπαιδευτικών διαμορφώνει τη μαθησιακή διαδικασία. Η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος δεν αφορά το σχεδιασμό του ιδανικού μαθήματος. Αφορά τη βελτίωση της διδακτικής πρακτικής μέσω της υιοθέτησης ενημερωμένων αλλαγών της παρακολούθησης του τρόπου που αυτές επηρεάζουν την μάθηση, και πρωτίστως μέσω της εφαρμογής μόνιμων αλλαγών και του διαμοιρασμού γνώσης ανάμεσα στους/στις εκπαιδευτικούς.
- Κατά την Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος, οι εκπαιδευτικοί παίρνουν μια σειρά **αυτόνομων** αποφάσεων μέσω της διαδικασίας σχεδιασμού της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος (επιλογή ερευνητικής εστίασης, επιλογή «μαθητών-περίπτωσης» (“case students”), απόφαση για το είδος των δεδομένων που θα συλλεχθούν, κλπ.). Αυτό διασφαλίζει ότι οι εκπαιδευτικοί είναι φορείς των δικών τους ενεργειών και μάθησης.



<sup>38</sup>Lewis (2009)

<sup>39</sup>Robinson et al (2009)

## 1.2 Γιατί να διεξάγετε μια Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος;

Η Μελέτη Μαθήματος αναπτύχθηκε στην Ιαπωνία τις δεκαετίες του 1870 και 1880. Μετά την δημοσίευση του βιβλίου «Το χάσμα στην διδασκαλία» [“The Teaching Gap”] το 1999<sup>40</sup>, η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε στη Δύση. Η δημοσίευση απέδωσε την εξαιρετική επίδοση των Ιαπώνων μαθητών (σε σύγκριση με Αμερικανούς και Γερμανούς μαθητές) στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες στην πρακτική της Μελέτης Μαθήματος. Από τότε, η πρακτική της διεξαγωγής Μελέτης Μαθήματος για τη βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης έχει εξαπλωθεί παγκοσμίως. Πολλή εμπειρική έρευνα σχετικά με την Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος έχει διεξαχθεί τόσο στην Ασία όσο και στην Αμερική και την Ευρώπη. Κάποιες σχετικές μελέτες ανασκόπησης, οι οποίες συγκεντρώνουν γνώσεις από προηγούμενες έρευνες<sup>41</sup>, δείχνουν θετικά αποτελέσματα τόσο για την μάθηση των εκπαιδευτικών όσο και για την μάθηση των μαθητών. Για παράδειγμα, η έρευνα έχει δείξει ότι η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος συμβάλλει στην ανάπτυξη εκπαιδευτικών όσον αφορά τις γνώσεις τους για το γνωστικό αντικείμενο, δεξιότητες, στυλ διδασκαλίας και πεποιθήσεις<sup>42</sup>. Επιπρόσθετα, η έρευνα δείχνει ότι η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος κάνει τους εκπαιδευτικούς πιο ευαίσθητους και περισσότερο εστιασμένους στις εκπαιδευτικές ανάγκες των μαθητών, γεγονός που οδηγεί σε μεγαλύτερα μαθησιακά οφέλη για τους μαθητές<sup>43</sup>. Έχει επίσης διαπιστωθεί επανειλημμένα ότι η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος συμβάλλει στη θετική συνεργασία μεταξύ των εκπαιδευτικών, προωθεί τη μάθηση των εκπαιδευτικών και την ανάπτυξη μιας επαγγελματικής κοινότητας μάθησης<sup>44</sup>.

Επειδή οι εκπαιδευτικοί τείνουν να εξασκούν το επάγγελμά τους ως μοναχικοί επαγγελματίες μέσα στις τάξεις τους, σπάνια έχουν την ευκαιρία να δουν την «κρυφή» πρακτική γνώση άλλων εκπαιδευτικών να εκδηλώνεται κατά την διδακτική πρακτική. Όταν η διδακτική πρακτική των εκπαιδευτικών παρατηρείται από άλλους επαγγελματίες, είναι πιθανό να πραγματοποιείται στο πλαίσιο αξιολόγησης της διδασκαλίας, παρά στο πλαίσιο επαγγελματικής μάθησης. Στο πλαίσιο της αξιολόγησης, οι εκπαιδευτικοί τείνουν να κάνουν ασφαλείς επιλογές, παρά να παίρνουν ρίσκα. Ωστόσο, η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος δημιουργεί **ασφαλείς χώρους**, όπου οι εκπαιδευτικοί μπορούν να παίρνουν ρίσκα μαζί και να εργάζονται χωρίς άγχος σε πεδία του αναλυτικού προγράμματος για τα οποία αισθάνονται λιγότερη σιγουριά. Το **Πρωτόκολλο μάθησης της ομάδας Μελέτης Μαθήματος** (Lesson Study Group Learning protocol sheet) (δες σελίδα 65) συμβάλλει στην κοινή μάθηση των μελών της ομάδας Research Lesson Study. Αρχίζουν να επιλύουν διδακτικά προβλήματα μαζί χρησιμοποιώντας «διερευνητική ομιλία» (exploratory talk) και «μάθηση προσανατολισμένη στο νόημα» (meaning-oriented learning). Η διερευνητική ομιλία είναι ένας συγκεκριμένος τύπος συλλογικής συζήτησης που επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να **εκφράζουν τις σκέψεις τους συλλογικά**, έτσι ώστε οι άλλοι να μπορούν να ακούσουν, να εξερευνήσουν και να βασιστούν σε μερικώς σχηματισμένες ιδέες. Με την συμμετοχή τους στην Μελέτη Μαθήματος, οι εκπαιδευτικοί μαθαίνουν να αναπτύξουν «μάθηση προσανατολισμένη στο νόημα» (“meaning-oriented” learning). Αυτό το είδος μάθησης ωθεί τους εκπαιδευτικούς όχι μόνο να μάθουν «τι λειτουργεί», αλλά «γιατί και πώς λειτουργούν τα πράγματα». Όταν οι εκπαιδευτικοί υιοθετούν αυτόν τον τρόπο μάθησης, αρχίζουν να συγκρίνουν τη δουλειά διαφόρων μαθητών, να σκέφτονται πώς σχετίζονται τα μαθήματα μεταξύ τους, να παρακολουθούν την πρόοδο των μαθητών τους, να πειραματίζονται με νέους τρόπους διδασκαλίας, να προσπαθούν να κατανοήσουν πώς και γιατί οι μαθητές μαθαίνουν, και να αναστοχάζονται τη δική τους διδακτική πρακτική. Αυτός είναι ένας τρόπος μάθησης υψηλής ποιότητας για τους εκπαιδευτικούς.

Χαρακτηριστικά της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος που μπορεί να εξηγούν τη σχέση της με αυτή την μορφή μάθησης των εκπαιδευτικών είναι περιλαμβάνουν: την ισχυρή συνεργατική εστίαση στην κατανόηση της μάθησης των μαθητών, στην αναζήτηση εξηγήσεων για τις παρανοήσεις των μαθητών, ο υψηλός βαθμός ελέγχου (ownership) που οι εκπαιδευτικοί αισθάνονται ότι έχουν στη δική τους μάθηση, και η ταυτόχρονη εστίαση στη γνώση του αντικειμένου, τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθητών. Η «μάθηση προσανατολισμένη στο νόημα» είναι μια ισχυρή μορφή μάθησης για τους εκπαιδευτικούς που τους επιτρέπει να βελτιώσουν σημαντικά τη μάθηση ανάμεσα στους μαθητών τους, συγκριτικά με άλλες μορφές επαγγελματικής μάθησης που μελετήθηκαν στο παρελθόν<sup>45</sup>.

Η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος βοηθά τους εκπαιδευτικούς:

- Να παρατηρούν στενά την μάθηση των μαθητών.
- Να διερευνούν τη διαφορά μεταξύ του τι αναμένουν να συμβεί όταν μαθαίνουν οι μαθητές και τι πραγματικά συμβαίνει.
- Να κατανοούν πώς να σχεδιάσουν μαθήματα που να ανταποκρίνονται περισσότερο στις ανάγκες των μαθητών.
- Να παίρνουν ρίσκα στα πλαίσια μιας υποστηρικτικής κοινότητας μάθησης εκπαιδευτικών που παρέχει ένα ασφαλή χώρο επειδή οι εκπαιδευτικοί της ομάδας εκτιμούν τα υπόλοιπα μέλη της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος και νιώθουν και οι ίδιοι εκτίμηση προς το πρόσωπό τους.
- Να ερευνούν, να προβληματίζονται, να αναλύουν και να μαθαίνουν από κοινού πώς να βοηθούν τους μαθητές τους να μάθουν και να επιτύχουν.
- Να αλλάζουν την επακόλουθη διδασκαλία και το αναλυτικό πρόγραμμα για την καλύτερη υποστήριξη της μάθησης.
- Να μοιράζονται τις εμπειρίες τους εμπλεκόμενες ειδικούς επαγγελματίες και λιγότερο έμπειρους συναδέλφους, προκειμένου να μεγιστοποιήσουν και να κινητοποιήσουν τη νέα γνώση.

## 1.3 Γιατί γίνεται επιλογή συγκεκριμένου «μαθητών περίπτωσης»;

Ένα σημαντικό στοιχείο της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος αφορά την ταυτοποίηση τριών περίπου μαθητών, οι οποίοι μπορεί να είναι εκπρόσωποι διαφορετικών ομάδων μαθητών στην τάξη. Εάν ο στόχος του μαθήματος της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος είναι να αναπτύξει μια νέα προσέγγιση (π.χ. να εισαγάγει συλλογισμό με αλγεβρικά μοτίβα στους μαθητές Β Γυμνασίου (Grade 8)), τότε οι μαθητές μπορεί να αντιπροσωπεύουν (i) μαθητές που οι εκπαιδευτικοί αναμένουν ότι εύκολα θα επιτύχουν το στόχο του μαθήματος, (ii) μαθητές που οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι μπορεί να χρειαστούν πρόσθετη υποστήριξη και περαιτέρω διδασκαλία για να επιτύχουν το στόχο του μαθήματος, και (iii) μαθητές που βρίσκονται μεταξύ των ομάδων (i) και (ii). Εάν, όμως, η Research Lesson Study εστιάζει σε μια συγκεκριμένη ομάδα μαθητών, για παράδειγμα σε μαθητές με συγκεκριμένες εκπαιδευτικές ανάγκες, τότε οι «μαθητές περίπτωσης» θα επιλεγούν από αυτήν την ομάδα. Η ομάδα Research Lesson Study θα σχεδιάσει το ερευνητικό μάθημα έχοντας κατά νου αυτούς τους συγκεκριμένους μαθητές. Κάθε φορά που φτάνουν σε ένα σημείο του σχεδίου μαθήματος όπου οι μαθητές αναμένεται να ολοκληρώσουν μια εργασία πριν προχωρήσουν στο επόμενο στάδιο του μαθήματος, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να συμφωνήσουν και να καταγράψουν στο σχέδιο μαθήματός τους τι περιμένουν από κάθε μαθητή να πει, να γράψει, να ζωγραφίσει ή σιδηήσει άλλο. Αυτό για τους εκπαιδευτικούς καταδεικνύει ότι ο «μαθητής περίπτωσης» είναι έτοιμος να προχωρήσει στην επόμενη φάση του μαθήματος<sup>47</sup>.

<sup>40</sup>Stigler & Hiebert (1999)

<sup>41</sup>Cheung & Wong (2014); Seleznyov (2019); Willems & Van den Bossche (2019); Xu & Pedder (2015),

<sup>42</sup>E.g. Lawrence & Chong (2010).

<sup>43</sup>The study by Ylonen & Norwich (2013), for example, demonstrates this.

<sup>44</sup>Stigler & Hiebert (2016); Vermunt et al. (2019)

<sup>45</sup>Mercer & Dawes (2008.); Barnes (2008)

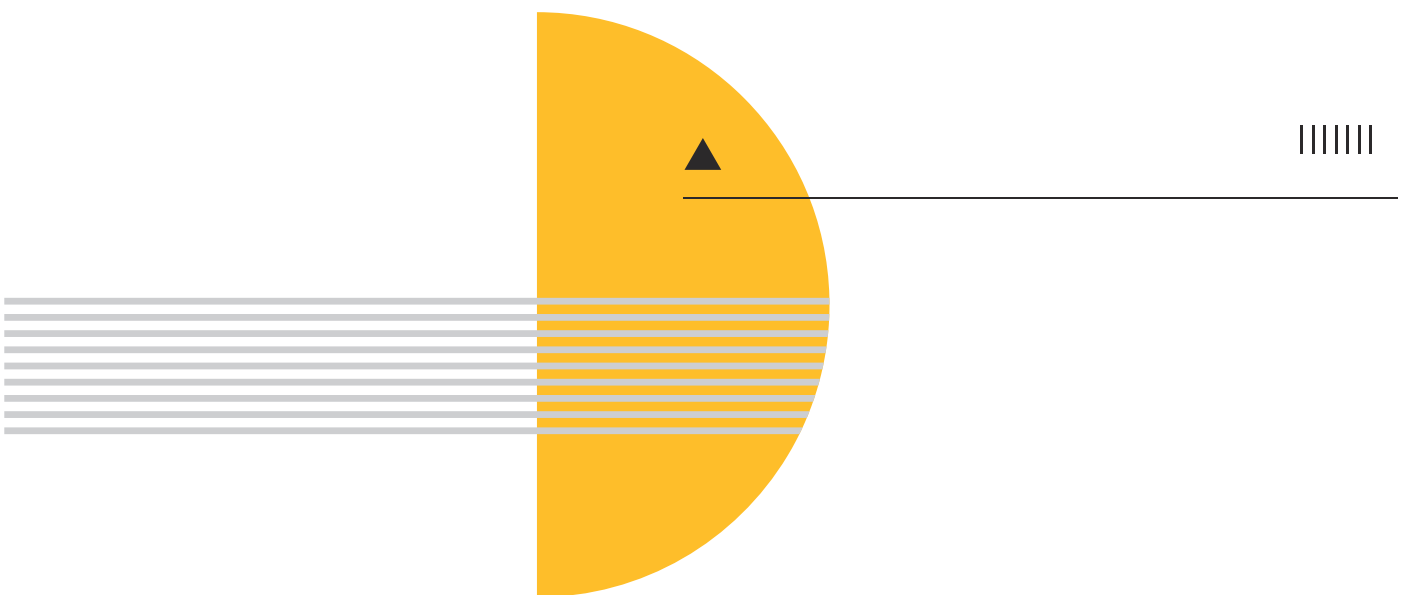
<sup>46</sup>Vermunt, et al. (2019); Dudley, et al. (2019)

<sup>47</sup>Dudley, (2019b)

#### 1.4 Πώς να οργανώσετε μια Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος;

Η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος αποτελείται από **τρεις διαδοχικούς κύκλους** συλλογικής έρευνας στην σχολική τάξη, με κάθε κύκλο να αποτελείται από ένα ερευνητικό μάθημα (βλ. Γράφημα 1). Κατά τη διάρκεια ενός κύκλου Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος, οι εκπαιδευτικοί της ομάδας (συνήθως τρεις ή ακόμα και ένα ζευγάρι):

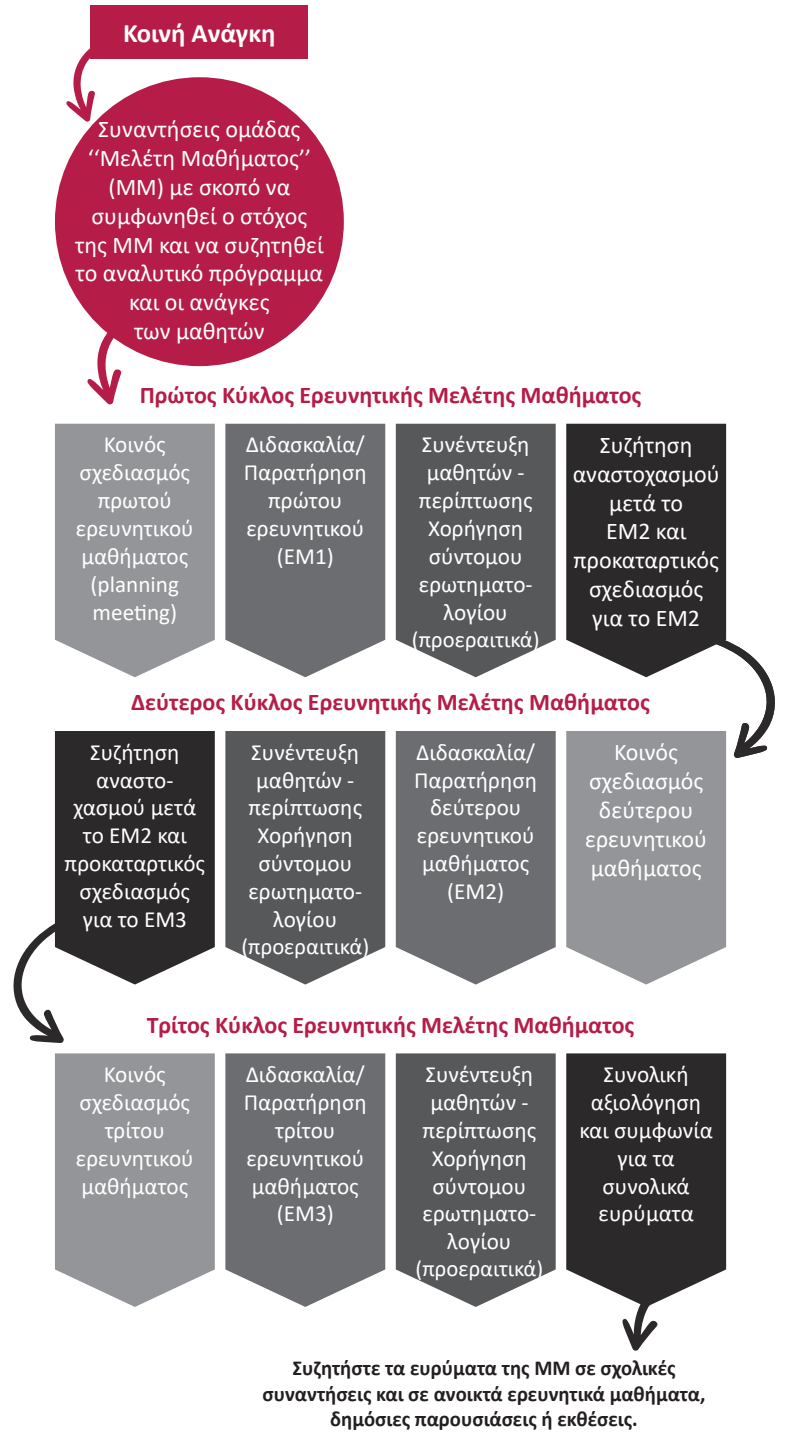
- Χρησιμοποιούν δεδομένα που έχουν συλλέξει από την καθημερινή και περιοδική αξιολόγηση μαθητών για να έρθουν σε μια απόφαση για το πού θα εστιάσουν σε σχέση με την μάθηση και την πρόοδο των μαθητών.
- Μελετούν από κοινού το υλικό του αναλυτικού προγράμματος που χρησιμοποιούν και ασκούν κριτική σε αυτό. Ερευνούν πέρα από το υλικό αυτό έτσι ώστε να συγκεκριμενοποιήσουν τον στόχο του μαθήματος και να εντοπίσουν προσεγγίσεις για την αντιμετώπιση αυτής της ανάγκης (συνχά με τη συμβολή ειδικών) από την οποία δημιουργείται ένα ερευνητικό ερώτημα.
- Προσδιορίζουν περίπου τρεις «μαθητές περίπτωσης». Ο καθένας θα μπορούσε να χαρακτηρίσει μια υπο-ομάδα μαθητών της τάξη σε σχέση με την εστίαση που επιλέχθηκε.
- Σχεδιάζουν από κοινού συνήθως τρία «ερευνητικά μαθήματα» μέσα από τα οποία αναπτύσσουν μια εκπαιδευτική πρακτική και μελετούν προσεκτικά τα αποτελέσματα αυτής της νέας προσέγγισης, λαμβάνοντας παράλληλα υπόψη τους τρεις μαθητές. Το δεύτερο και το τρίτο ερευνητικό μάθημα προγραμματίζονται λεπτομερώς μόνο μετά από την συζήτηση και την ανάλυση του προηγούμενου ερευνητικού μαθήματος – συχνά στην ίδια συνάντηση.
- Διδάσκουν και παρακολουθούν από κοινού το ερευνητικό μάθημα εστιάζοντας στη μάθηση και την πρόοδο των «μαθητών περίπτωσης». Επίσης, προσαρμόζουν και βελτιώνουν τη διδασκαλία μέσα από πολλά μαθήματα μετά από την ανάλυσή τους του κάθε μαθήματος.
- Παίρνουν συνέντευξη από τους «μαθητές περίπτωσης» έτσι ώστε να κατανοήσουν καλύτερα τις αντιλήψεις τους για το ερευνητικό μάθημα.
- Χορηγούν ένα σύντομο ερωτηματολόγιο σε όλους τους μαθητές (προαιρετικό)
- Διεξάγουν μια συζήτηση μετά από κάθε ερευνητικό μάθημα, αναλύοντας πώς οι μαθητές περίπτωσης ανταποκρίθηκαν στο μάθημα, τι πρόοδο σημείωσαν, ποια στοιχεία μάθησης ή δυσκολίες με τη μάθηση παρουσίασαν, και τι θα μπορούσε να διαφανεί για τον τρόπο με τον οποίο η διδακτική προσέγγιση μπορεί να αναπτυχθεί περαιτέρω την επόμενη φορά.
- Μετά το τελευταίο ερευνητικό μάθημα, οι εκπαιδευτικοί συζητούν για τις γνώσεις που απέκτησαν σε όλη τη διαδικασία της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος και για το κατά πόσο η διδασκαλία ή το αναλυτικό πρόγραμμα θα μπορούσαν να αλλάξουν ως αποτέλεσμα.
- Μοιράζονται τα αποτελέσματα με ένα ευρύτερο κοινό άλλων εκπαιδευτικών με κάποιο επίσημο τρόπο, δηλαδή με μια παρουσίαση, με επίδειξη ή με καθοδήγηση.



Το Γράφημα 1 παρουσιάζει τη διαδικασία Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος. Το πρώτο στάδιο στον κύκλο είναι η αρχική φάση κατά την οποία η ομάδα Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος καθορίζει το επίκεντρο της έρευνας, όπως επίσης και τον ερευνητικό στόχο και τα ερευνητικά ερωτήματα. Κάθε μία από την οριζόντια σειρά κουτιών είναι ένας κύκλος «μαθημάτων έρευνας» της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος. Η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος δεν σταματά μετά από ένα μόνο ερευνητικό μάθημα.

Αυτό που συχνά συμβαίνει στο πρώτο ερευνητικό μάθημα είναι ότι οι εκπαιδευτικοί βλέπουν τα κενά μάθησης μεταξύ των μαθητών και το αντικείμενο της μάθησης πολύ πιο καθαρά. Αυτό οφείλεται στις προσδοκίες των δασκάλων για τους μαθητές περίπτωσης και στον έλεγχο που διεξάγουν για το κατά πόσο οι προσδοκίες ικανοποιήθηκαν. Αυτό δίνει τη δυνατότητα στην ομάδα Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος να σχεδιάσει ένα δεύτερο μάθημα για να κάνει καλύτερη αντιστοίχιση μεταξύ διδακτικής προσέγγισης και μαθησιακών αναγκών. Στο ερευνητικό μάθημα 3, έχετε την ευκαιρία να αντιμετωπίζετε τυχόν ζητήματα που απομένουν, όπως επίσης και να τροποποιήσετε τις επιτυχημένες πτυχές του ερευνητικού μαθήματος 2 για να τις δοκιμάσετε περαιτέρω. Σε αυτό το στάδιο, η συντριπτική πλειονότητα των ομάδων Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος έχουν αναπτύξει κάτι που θα ενσωματωθεί στη μελλοντική τους διδασκαλία, οπότε μπορεί και να μοιραστεί με άλλους εκπαιδευτικούς.

Το ερευνητικό μάθημα 2 και 3 **δεν είναι προσαρμοσμένες επαναλήψεις** του ερευνητικού μαθήματος 1. Είναι διαφορετικά μαθήματα σε μια ευρύτερη σειρά. Γενικά, σε μια Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος θα χρησιμοποιήσετε την ίδια τάξη για να αναπτύξετε μια πτυχή της μάθησης (όπως μια έννοια, μια δεξιότητα ή ένα σημείο κατανόησης). Επομένως, το δεύτερο και το τρίτο ερευνητικό μάθημα στοχεύουν στην περαιτέρω ανάπτυξη της συγκεκριμένης πτυχής μάθησης. Για παράδειγμα, μπορεί να έχετε εισαγάγει μια δεξιότητα/έννοια στο ερευνητικό μάθημα 1 και να την αναπτύξετε ή/και να την εμβαθύνετε στα ερευνητικά μαθήματα 2 και 3. Είναι καλύτερο να το κάνετε αυτό σε μια περίοδο τριών εβδομάδων περίπου.



**Γράφημα 1**

Η διαδικασία Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος<sup>48</sup>

<sup>48</sup>Based on Dudley, 2019a

## 1.5 Προϋποθέσεις έναρξης Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος

Πριν ξεκινήσετε την Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος, συνιστάται να ελέγξετε εάν πληρούνται ορισμένες προϋποθέσεις σε σχολικό επίπεδο. Αν και πολλές από αυτές τις συνθήκες είναι υποστηρικτικές, η πιθανότητα επιτυχίας είναι μεγαλύτερη.

- Υποστήριξη από την διεύθυνση του σχολείου**  
 Οι πιθανότητες επιτυχίας αυξάνονται όταν η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος ενσωματώνεται στο σχολικό σύστημα. Η διεύθυνση του σχολείου μπορεί να διευκολύνει την Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος δημιουργώντας χρόνο και χώρο για μια ομάδα Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος για να επανεξετάσει προσεκτικά το υλικό και τις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται αυτήν τη στιγμή, να εξετάσει τις εργασίες των μαθητών και να εντοπίσει ή να αναπτύξει από κοινού νέες προσεγγίσεις. Επίσης, είναι κίνητρο για μια ομάδα Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος όταν η διεύθυνση του σχολείου τονίζει τη σημασία της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος για ολόκληρο το σχολείο, ενθαρρύνει τους εκπαιδευτικούς να πειραματιστούν, παρακολουθεί την πρόοδο που σημειώνεται και επίσης δίνει χρόνο και χώρο στα μέλη της ομάδας Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος να μοιραστούν τα ευρήματά τους με τους συναδέλφους τους.
- Διαθέσιμος χρόνος για Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος**  
 Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να επενδύσουν χρόνο στην Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος. Μια Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος εστιάζει στη μαθησιακή διαδικασία και αντλεί τα μαθησιακά της οφέλη από την προσαρμογή αυτής της διαδικασίας, η οποία απαιτεί χρόνο. Είναι επίσης σημαντικό να δοθεί επαρκής χρόνος στους εκπαιδευτικούς για να συζητήσουν και να παρατηρήσουν ο ένας τον άλλον στην τάξη. Συνήθως το πρόγραμμα διδασκαλίας των εκπαιδευτικών ετοιμάζεται από τον διευθυντή του σχολείου.
- Θετική στάση και ασφάλεια**  
 Οι εκπαιδευτικοί που συμμετέχουν σε μια Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος αναμένεται να έχουν θετική στάση: να είναι θετικοί στο να βελτιώσουν την διδακτική τους πρακτική και είναι πρόθυμοι να ανοίξουν τις πόρτες της τάξης τους σε συναδέλφους. Μια ομάδα Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος στην οποία ένα άτομο παρουσιάζεται ως ο «ειδικός» συνήθως δεν λειτουργεί. Ένα ασφαλές (μαθησιακό) κλίμα είναι απαραίτητο. Είναι σημαντικό όλοι να σέβονται ο ένας τον άλλον και να εκτιμώνται όλες οι συνεισφορές. Είναι βασικό οι εκπαιδευτικοί να μπορούν να μοιράζονται ιδέες, ανησυχίες, προκλήσεις και ερωτήματα χωρίς να φοβούνται την κριτική. Θα πρέπει να εξασκούν φιλική κριτική μεταξύ τους (“critical friends”). Αυτός ο τρόπος ομιλίας και συζήτησης οδηγεί σε πιο παραγωγικές συζητήσεις. Τέτοια πρωτόκολλα είναι σημαντικά «βασικοί κανόνες για συζήτηση»<sup>49</sup>.
- Ρεαλιστικός καθορισμός στόχων στην Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος**  
 Μια Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος ξεκινά πάντα από μια συγκεκριμένη ανάγκη που βιώνουν οι εκπαιδευτικοί, η οποία οδηγεί σε έναν ερευνητικό στόχο. Αυτό μπορεί να υποδηλώνει ένα πρόβλημα στην τάξη (π.χ., «Οι μαθητές μου δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν μοτίβα στα μαθηματικά.») ή την ανάγκη για καινοτομία στην εκπαίδευση (π.χ. «Αναμένουμε νέο αναλυτικό πρόγραμμα στα μαθηματικά. Πώς μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε στις εκπαιδευτικές μας πρακτικές;»). Είναι σημαντικό να συζητηθεί η ανάγκη αυτή με τους συναδέλφους και την διεύθυνση του σχολείου έτσι ώστε να διασφαλιστεί η συνάφεια και η δυνατότητα υλοποίησης. Στη συνέχεια η ανάγκη αυτή οδηγεί στον στόχο του περιεχομένου της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος (π.χ. συλλογισμός και απόδειξη, βλέπε Μέρος I). Κατά τη διάρκεια μιας Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος, ο στόχος του περιεχομένου εξασφαλίζει σαφή κατεύθυνση και κοινούς στόχους εντός μιας ομάδας Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος. Εναπόκειται στην ομάδα Research Lesson Study να συγκεντρώσει πληροφορίες σχετικά με το επιλεγμένο θέμα. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω της βιβλιογραφίας και διαδικτυακών βίντεο, αλλά μπορούν επίσης οι εκπαιδευτικοί να επιλέξουν να λάβουν επιπλέον ενημέρωση από έναν ειδικό («knowledgeable other») (π.χ. παρακολούθηση διάλεξης, παρακολούθηση εργαστηρίου ή πρόσκληση ειδικού ή έμπειρου εκπαιδευτικού στο σχολείο τους).
- Καθοδήγηση**  
 Όταν η ομάδα εκπαιδευτικών διεξάγει για πρώτη φορά Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος Research είναι καλό να λάβει μια συγκεκριμένη μορφή καθοδήγησης. Στο πρόγραμμα LESSAM, σας παρέχουμε την καθοδήγηση που απαιτείται για να είναι επιτυχής η μελέτη του μαθήματος.

<sup>49</sup>Edwards and Mercer (1987)

## 2. Ξεκινώντας την Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος

### 2.1 Κοινή ανάγκη για Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος

Η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος ξεκινά πάντα από μια κοινή ανάγκη που βιώνουν οι εκπαιδευτικοί. Σε αυτό το πρόγραμμα, θα επικεντρωθούμε στον μαθηματικό συλλογισμό. Για να το ορίσετε αυτό, θα πρέπει να σκεφτείτε **τι** θέλετε να αλλάξετε και **για ποιον**. Το ερώτημα «τι» αφορά την ευρεία περιοχή του μαθησιακού περιεχομένου, των διδακτικών μέτρων, των μαθησιακών ή εκπαιδευτικών πρακτικών, της αξιολόγησης, της χρήσης εκπαιδευτικής τεχνολογίας ή συγκεκριμένων μορφών υποστήριξης. Επιπλέον, είναι σημαντικό να καταλήξετε ποιον αφορά αυτή η ανάγκη. Αφορά ολόκληρη την τάξη ή μια συγκεκριμένη ομάδα μαθητών; Για παράδειγμα, μαθητές προχωρημένης ικανότητας ή μαθητές που δεν ασχολούνται ή δεν μαθαίνουν ή δεν

επιτυγχάνουν τόσο καλά όσο θα περιμένατε. Σκεφτείτε επίσης γιατί θέλετε να αλλάξετε κάτι. Αποσαφηνίζοντας το «τι», «για ποιον» και «γιατί», η ανάγκη διεξαγωγής μιας μελέτης μαθήματος θα γίνει πιο ξεκάθαρη. Όσο πιο συγκεκριμένη είναι η περιγραφή μιας κοινής ανάγκης, τόσο πιο εύκολο είναι να την μετατρέψετε σε ερευνητικό στόχο και ερευνητικό ερώτημα.

Είναι πολύ σημαντικό να ανταλλάσσουμε ιδέες με άλλα μέλη της σχολικής ομάδας για «ανάγκες» στις τάξεις τους που έζησαν στο παρελθόν. Με αυτόν τον τρόπο, αποκτάτε μια καλύτερη ιδέα για το τι είναι εφικτό να αντιμετωπίσετε μαζί στο πλαίσιο της τάξης σας.



#### Εργασία για τους εκπαιδευτικούς:

Σε ποιο βαθμό είναι σημαντικός ο μαθηματικός συλλογισμός για τους μαθητές; Εξηγήστε και συζητήστε με τους συναδέλφους σας. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το κεφάλαιο 1 ως οδηγό έμπνευσης.

Προσπαθήστε να προσδιορίσετε γιατί θέλετε να τελειοποιήσετε τον μαθηματικό συλλογισμό στις τάξεις σας. Οι παρακάτω ερωτήσεις μπορεί να είναι χρήσιμες για τη συζήτηση:

- Τι θέλετε να αλλάξετε ή να διερευνήσετε σχετικά με τον μαθηματικό συλλογισμό;
- Για ποιον θέλετε να το αλλάξετε αυτό;
- Γιατί είναι αυτό σημαντικό ή ενδιαφέρον;

### 2.2 Δημιουργία Ομάδας Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος

Όταν ξεκινάτε με την Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος, συνιστάται να ξεκινήσετε με μια μικρή ομάδα δύο έως τριών δασκάλων<sup>50</sup>. Μια ομάδα Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος μπορεί να αποτελείται από δασκάλους που εργάζονται σε παράλληλες τάξεις, αλλά είναι επίσης δυνατό να εργαστούν μεταξύ σχολικών ετών. Συνιστάται μια ομάδα Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος να αποτελείται από εκπαιδευτικούς από την ίδια ή σχετική θεματική περιοχή, προκειμένου να σχεδιάζουν μαθήματα από κοινού.

Το επόμενο βήμα είναι να σκεφτείτε πώς να συνεργαστείτε και τις σχετικές προσδοκίες. Διατυπώστε τις προσδοκίες σας για τη συνεργασία σας ως ομάδα. Οι παρακάτω ερωτήσεις μπορούν να βοηθήσουν: Τι περιμένετε από τη συνεργασία; Πότε είναι επιτυχία για εσάς η συνεργασία; Ποια εμπόδια μπορεί να συναντήσετε στη συνεργασία σας και πώς θα τα αντιμετωπίσετε; Πώς θα αντιδράσετε σε περίπτωση που εκφράζονται διαφορετικές απόψεις; Μπορεί να είναι χρήσιμο να συντάξετε ένα **Πρωτόκολλο μάθησης της ομάδας Μελέτης Μαθήματος (Lesson Study Group Learning protocol sheet)** (βλ. επίσης παράδειγμα παρακάτω).

<sup>50</sup>When two teachers collaborate, the overall management of the lesson study can be easier but with three teachers, the quality and quantity of learning will increase. This is because when three people are involved, teachers can 'interthink' through exploratory talk. There are more opportunities within the discussion for reflection and development of

ideas – because it is not always your turn to speak next – someone can grasp a glimmer of an idea which has flashed past the back of their mind while the other two talk and develop it before introducing it to the others – which it is much harder to do with only two interlocutors.

<sup>51</sup>Bodvin et al. (2020)



### Υποδειγματικό πρωτόκολλο ομάδας Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος<sup>52</sup>

Αυτό το πρωτόκολλο αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια εθνικού πιλοτικού προγράμματος για να βοηθήσει στη δημιουργία κοινών προσδοκιών μεταξύ των μελών της ομάδας Research Lesson Study. Η υιοθέτηση ενός τέτοιου πρωτοκόλλου **βοηθά την ομάδα να διαμορφώσει μια καλή σχέση εργασίας που βοηθά τα μέλη να μοιράζονται ιδέες, ανησυχίες, προκλήσεις και ερωτήματα χωρίς να φοβούνται την κριτική**. Αποτελεί ένα σημαντικό σύνολο «βασικών κανόνων για την ομιλία» που βοηθούν τη χρήση της «διερευνητικής ομιλίας» από την ομάδα, η οποία με τη σειρά της βοηθά τη «μάθηση προσανατολισμένη στο νόημα» (Vermunt et al. 2019) και την ανακάλυψη και την ανταλλαγή νέων πρακτικών-γνώσης.

#### Σε όλα τα στάδια της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος θα ενεργούμε σύμφωνα με τα ακόλουθα:

- Είμαστε ίσοι ως εκπαιδευόμενοι ανεξαρτήτως ηλικίας, εμπειρίας, εξειδίκευσης ή αρχαιότητας στο σχολείο (ή πέραν αυτού).
- Όλες οι συνεισφορές στον διάλογο αντιμετωπίζονται με άνευ όρων θετική εκτίμηση. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν θα υπόκεινται σε ανάλυση, αμφιβολία ή αμφισβήτηση. Σημαίνει όμως ότι κανείς δεν θα νιώθει άβολα που θα τολμήσει να κάνει μια εισήγηση. Συχνά είναι οι εισηγήσεις που σας κάνουν να νιώθετε άβολα ή εύάλωτοι που έχουν τη μεγαλύτερη αξία και οδηγούν στην καλύτερη μάθηση.
- Θα υποστηρίξουμε όποιον διδάσκει το(τα) μάθημα(α) της έρευνας και θα κάνουμε πιστές παρατηρήσεις, καταγράφοντας όσο το δυνατόν περισσότερα όσα λένε και κάνουν οι μαθητές.

- Θα χρησιμοποιήσουμε κοινά εργαλεία για την Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος - σχεδιαστές, προτροπές για συνεντεύξεις μαθητών και προσεγγίσεις για την ανταλλαγή αποτελεσμάτων μεταξύ τους.
- Θα χρησιμοποιήσουμε τις εργασίες των μαθητών, τα σχόλια των συνεντεύξεων και τις παρατηρήσεις μας για να ενημερώσουμε την συζήτηση αναστοχασμού μετά το μάθημα.
- Θα χρησιμοποιήσουμε το «Υποβοηθητικό Φύλλο Εργασίας για τη συζήτηση αναστοχασμού» («Post Research Lesson Discussion sheet»), ξεκινώντας από τη συζήτηση για το τι έκανε ο κάθε μαθητής σε σύγκριση με αυτό που περιμέναμε και θα αφήσουμε τη συζήτηση να προχωρήσει από εκεί.
- Θα ακούμε ο ένας τον άλλον και τους εαυτούς μας όταν μιλάμε και θα χιτίζουμε πάνω στη συζήτηση, κάνοντας προτάσεις, διατυπώνοντας υποθέσεις, δίνοντας λεπτομέρειες, προσδιορίζουμε και είμαστε πάντα υπόλογοι για τους στόχους του μαθήματός μας, τους μαθητές περίπτωσης και την παρατήρησή μας και άλλα δεδομένα μαθημάτων έρευνας.
- Θα μοιραστούμε ό,τι μαθαίνουμε – τις νέες μας πρακτικές γνώσεις - με τους συναδέλφους μας όσο ακριβέστερα και ζωντανά μπορούμε και με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να επωφεληθούν και να το δοκιμάσουν οι ίδιοι.
- Θα μοιραστούμε τους στόχους και τα αποτελέσματα της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος μας με τους μαθητές μας όπως αρμόζει, ανάλογα με την ηλικία και τα στάδια ανάπτυξής τους. Οι απόψεις, οι ιδέες και οι προοπτικές τους θα αντιμετωπιστούν με το ίδιο θετικό σεβασμό.

Υπογραφή και ημερομηνία από μέλη της ομάδας Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος.

## 2.3 Πρακτική οργάνωση

Η Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος απαιτεί χρόνο και χώρο για να είναι επιτυχής. Είναι καλό να εξετάσετε εκ των προτέρων την **πρακτική οργάνωση** της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος. Συμφωνήστε πότε και σε ποια αίθουσα θα γίνονται οι συναντήσεις της ομάδας, ποιος θα ηγηθεί της συζήτησης και ποιος θα κρατήσει τις απαραίτητες σημειώσεις (αυτοί οι ρόλοι μπορούν να εναλλάσσονται ανά συνάντηση), πόση διάρκεια θα έχουν οι συναντήσεις κ.λπ. Οι συμφωνίες μπορεί να διαφέρουν από συνάντηση σε συνάντηση, αλλά **γνωρίζοντας το αυτό εκ των προτέρων μπορεί να αποτρέψει σημαντικές παρεξηγήσεις**. Χρειάζεται να αφιερώσετε χρόνο

(τουλάχιστον μία ώρα) για να προγραμματίσετε το πρώτο ερευνητικό μάθημα. Επίσης, βεβαιωθείτε ότι υπάρχει χρόνος για συζήτηση αμέσως μετά το μάθημα ή σε σύντομο χρονικό διάστημα μετά το ερευνητικό μάθημα, αρκετός ώστε να ξεκινήσετε τον προγραμματισμό του επόμενου ερευνητικού μαθήματος. Χρησιμοποιήστε το **Πίνακα Επισκόπησης Μελέτης Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος («Research Lesson Study Overview Table Sheet»)**.

#### Παράδειγμα προγραμματισμού ημέρας:

	Εκπαιδευτικός Α	Εκπαιδευτικός Β	Εκπαιδευτικός Γ*
<b>Δευτέρα: 2<sup>η</sup> περίοδος</b>	Διδασκαλία Ερευνητικού Μαθήματος 1	Παρατήρηση Ερευνητικού Μαθήματος 1	Παρατήρηση Ερευνητικού Μαθήματος 1
<b>Δευτέρα: διάλειμμα</b>		Συνέντευξη μαθητών περίπτωσης	
<b>Δευτέρα: 4<sup>η</sup> περίοδος</b>	Παρατήρηση Ερευνητικού Μαθήματος 1	Διδασκαλία Ερευνητικού Μαθήματος 1	Παρατήρηση Ερευνητικού Μαθήματος 1
<b>Δευτέρα: διάλειμμα</b>			Συνέντευξη μαθητών περίπτωσης
<b>Δευτέρα: 5<sup>η</sup> περίοδος</b>	Συζήτηση Αναστοχασμού (μετά την ολοκλήρωση ερευνητικού μαθήματος)	Συζήτηση Αναστοχασμού (μετά την ολοκλήρωση ερευνητικού μαθήματος)	Συζήτηση Αναστοχασμού (μετά την ολοκλήρωση ερευνητικού μαθήματος)

\* Αν η ομάδα Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος αποτελείται από τρεις εκπαιδευτικούς. Αν η ομάδα Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος αποτελείται από δύο εκπαιδευτικούς, ο εκπαιδευτικός Α παίρνει συνέντευξη από τους μαθητές περίπτωσης κατά την διάρκεια του πρώτου διαλείμματος της Δευτέρας σε αυτό το παράδειγμα.

<sup>52</sup>Dudley (2019a)

<sup>53</sup>Vermunt et al. 2019



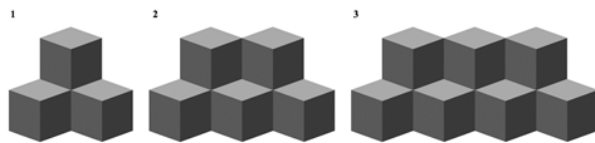
### 3. Καθορισμός ερευνητικού στόχου και εντοπισμός μαθητών περίπτωσης

#### 3.1 Διατύπωση ερευνητικού στόχου και αναγνώριση μαθητών περίπτωσης

Ο καθορισμός ενός ερευνητικού στόχου και η επιλογή μαθητών περιπτώσεων συμβαδίζουν. **Επιλέξτε τρεις μαθητές** που θα μπορούσαν (α) να εκπροσωπούν διαφορετικές ομάδες μαθητών στην τάξη – για παράδειγμα μαθητές που σημειώνουν καλή πρόοδο, μέτρια πρόοδο ή πρόοδο κάτω του μέσου όρου στο πεδίο εστίασης της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος ή σε μια διαθεματική δεξιότητα όπως ακαδημαϊκή γραφή, ή (β) μαθητές που δεν μαθαίνουν ή δεν ανταποκρίνονται με τον τρόπο που αναμένετε στον τομέα της διδασκίας ύλης. Σκεφτείτε τις ανάγκες αυτών των μαθητών σε σχέση με τη διδακτική σας πρακτική και αποφασίστε ποιος θα είναι ο γενικός στόχος και το επίκεντρο των ερευνητικών μαθημάτων. Καταγράψτε το στον **Πίνακα Επισκόπησης Μελέτης Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος («Research Lesson Study Overview Table Sheet»)**.



Παράδειγμα ερευνητικού στόχου για μαθηματικό συλλογισμό: Θέλουμε οι μαθητές να μπορούν να γενικεύουν ένα γεωμετρικό μοτίβο σε μια συμβολική έκφραση, χρησιμοποιώντας μεταβλητές. Για παράδειγμα<sup>53</sup>:



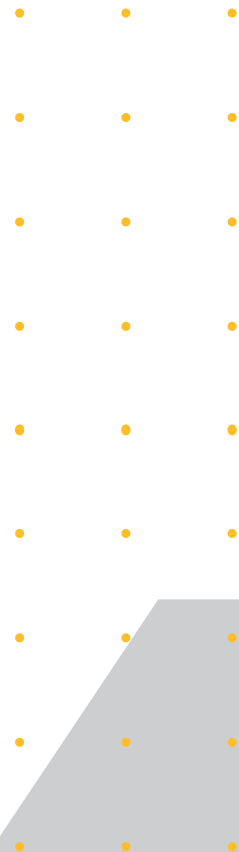
- Πόσους κύβους χρειάζεστε για το τέταρτο, πέμπτο, έκτο μοτίβο;
- Βρείτε τον αριθμό των κύβων για το μοτίβο 18, 64 και 911.
- Εξηγήστε πώς μπορείτε να βρείτε τον αριθμό των κύβων για ένα αυθαίρετο μοτίβο στην ακολουθία.

Μας ενδιαφέρουν συγκεκριμένα οι μαθητές που δυσκολεύονται να δημιουργήσουν/σχεδιάσουν αριθμητικές εκφράσεις (και θα μπορούσαν να υποστηριχθούν με μια αναπαράσταση σε πίνακα). Ή μαθητές που γενικά επικεντρώνονται στο να κάνουν διαδικασίες χωρίς νόημα και είναι δύσκολο να παρακινηθούν να σκεφτούν με μαθηματικό τρόπο.

#### 3.2. Διατυπώνοντας ένα ερευνητικό ερώτημα

Ένα ερευνητικό ερώτημα ξεκινά από τις **ανάγκες των μαθητών περίπτωσης** ή από το τι βιώνει η ομάδα Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος κατά τη διδασκαλία των μαθητών περίπτωσης. Για να έχετε μια καλύτερη εικόνα αυτών των αναγκών, μπορείτε να αποκτήσετε περισσότερες πληροφορίες από άλλες πηγές. Εδώ παραθέτουμε κάποιες εισηγήσεις:

- Αναλύστε τα σχολικά αποτελέσματα των μαθητών περίπτωσης για τα μαθηματικά. Υπάρχουν ορισμένοι τομείς στους οποίους ένας μαθητής βαθμολογείται χαμηλότερα; Αυτό αφορά ή σχετίζεται με γνώσεις, δεξιότητες ή συμπεριφορές;
- Μιλήστε με τους εκπαιδευτικούς του προηγούμενου έτους: πώς βίωσαν τους μαθητές στην τάξη;
- Προγραμματίστε συνομιλίες με τους μαθητές περίπτωσης και ρωτήστε τι πάει καλά και τι δεν πάει καλά στα μαθηματικά. Μάθετε τι πιστεύουν οι μαθητές για τα μαθήματα και τι θα ήθελαν να αλλάξουν.



<sup>53</sup>Pattern Sequence task (based on Weigand, Schüler-Meyer & Pinkernell, 2021).



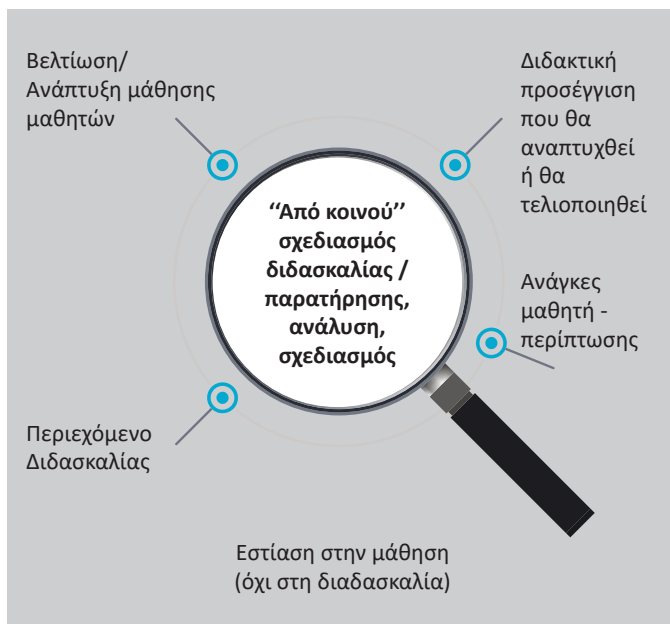
## Εργασία για τους εκπαιδευτικούς

Προσπαθήστε να προσδιορίσετε τις ανάγκες των μαθητών περίπτωσης όσον αφορά τον μαθηματικό συλλογισμό.  
Π.χ. Ποιες είναι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν τους ζητείται να αιτιολογήσουν τα αλγεβρικά μοτίβα;

Ξεκινήστε με ένα έργο και αναλύστε το είδος του συλλογισμού που αναμένετε από τους μαθητές (περίπτωσης) σας. Προσπαθήστε να παρατηρήσετε προσεκτικά πώς οι μαθητές (περίπτωσης) σας συλλογίζονται σε αυτό το έργο. Συγκρίνετε αυτό με τον προγραμματισμό σας.

Είναι πιθανό να προκύψουν πολλές ανάγκες των μαθητών ταυτόχρονα. Σε αυτήν την περίπτωση, τα μέλη της ομάδας Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος θα πρέπει να περιορίσουν τις πιθανές ανάγκες σε μια συγκεκριμένη ανάγκη στην οποία θέλουν να επικεντρωθούν στην Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος. Συμφωνήστε για το επίπεδο στο οποίο λειτουργεί κάθε μαθητής στον τομέα εστίασης του ερευνητικού μαθήματος – για παράδειγμα αν αποδίδει κάτω από το προσδοκώμενο επίπεδο, αν επιτυγχάνει το προσδοκώμενο επίπεδο ή αν υπερβαίνει του προσδοκώμενου επιπέδου σε συγκεκριμένο θέμα της ύλης διδασκαλίας.

Το Γράφημα 2 δείχνει πώς οι εκπαιδευτικοί μπορούν να συγκεντρώσουν τις γνώσεις που έχει κάποιος σχετικά με το αναλυτικό πρόγραμμα, το υλικό και τη διδασκαλία, την ανάλυση της μάθησης και των αναγκών των μαθητών, καθώς και κάθε μορφή προσέγγισης που προτείνουν οι πηγές μπορεί να είναι γόνιμη για τη βελτίωση πτυχών αυτών. Αυτή είναι η βάση του ερευνητικού σας στόχου και του ερευνητικού σας ερωτήματος. Σκεφτείτε ποιους μαθησιακούς στόχους έχετε για κάθε ερευνητικό μάθημα και σημειώστε τους στο **Πίνακα Επισκόπησης Μελέτης Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος («Research Lesson Study Overview Table Sheet»)**.



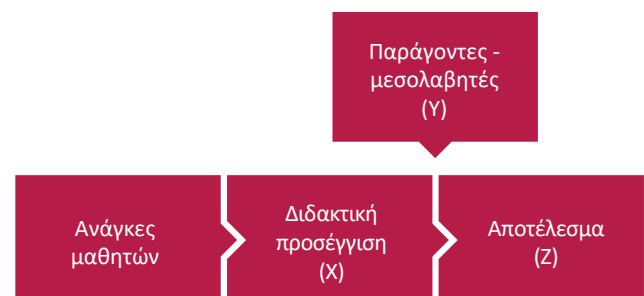
### Γράφημα 2

Συνδυάζοντας την ανάλυσή σας για το αναλυτικό πρόγραμμα και τη μάθηση και τις ανάγκες των μαθητών σας για να διαμορφώσετε τον ερευνητικό σας στόχο.

Ερευνητικά ερωτήματα που είναι **διερευνητικά** χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία ορισμένων υποθέσεων π.χ. όταν πιστεύετε ότι οι μαθητές θα επωφεληθούν από τη συνεργασία μεταξύ τους: «Οι μαθητές υψηλής ικανότητας μαθαίνουν περισσότερα όταν εργάζονται σε ομοιογενείς ομάδες;». Επίσης, τα διερευνητικά ερευνητικά ερωτήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παρατήρηση χωρίς ισχυρές υποθέσεις ή προκαθορισμένες ιδέες όπως, «Γιατί η ομοιογενής ομαδοποίηση μαθητών έχει αντίκτυπο στα κίνητρα των μαθητών με χαμηλές επιδόσεις;»

Τα **επεξηγηματικά** ερευνητικά ερωτήματα προσπαθούν να εξηγήσουν γιατί συγκεκριμένα φαινόμενα λειτουργούν με τον τρόπο που αναμένεται. Αυτό μπορεί να βασίζεται σε ιδέες που προκύπτουν την θεωρία (theory driven insights), αλλά και σε εμπειρογνώμοσύνη που έχει δημιουργηθεί μετά από χρόνια διδακτικής εμπειρίας. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί να είναι ενδιαφέρον να **μειωθεί περαιτέρω η εστίαση ενός ερωτήματος**, για να γίνει εφικτή. Ένας τρόπος για να το κάνετε αυτό είναι χρησιμοποιώντας το σχήμα XYZ (βλ. Γράφημα 3 παρακάτω).

Το Z αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα που θέλετε να επιτύχετε με τους μαθητές περίπτωσης, το X τη διδακτική πρακτική που θέλετε να χρησιμοποιήσετε για να επιτύχετε το αποτέλεσμα και το Y τους παράγοντες-μεσολαβητές που πιθανόν να επηρεάσουν την σχέση αυτή, όπως η προηγούμενη γνώση, η επάρκεια σε σχέση με τον αλγεβρικό συμβολισμό, προτίμηση στον διαδικαστικό συλλογισμό. Αυτοί είναι παράγοντες που κάνουν την διδακτική πρακτική X να λειτουργεί σε μια κατάσταση αλλά όχι σε μια άλλη. Εάν είναι δυνατόν, προσπαθήστε να διακρίνετε τους παράγοντες Y που εσείς ως ομάδα μπορείτε να ελέγξετε ή να λάβετε υπόψη. Είναι σημαντικό όταν σχεδιάζετε την εκπαιδευτική πρακτική X με στόχο τα επιθυμητά αποτελέσματα Z, να λαμβάνετε υπόψη τους παράγοντες Y που μπορεί να επηρεάσουν αυτή τη σχέση. Όταν σκέφτεστε την πιθανή επιρροή των παραγόντων Y, φροντίστε να ελέγξετε ότι αυτή η επιρροή δεν εμποδίζει εντελώς την επίτευξη του Z (το αποτέλεσμα). Επομένως, είναι σημαντικό όταν γράφετε ένα ερευνητικό ερώτημα να έχετε κατά νου ρεαλιστικούς στόχους στο δεδομένο πλαίσιο της τάξης και για τους μαθητές περίπτωσης.



### Γράφημα 3

Σχήμα XYZ για την διατύπωση ενός ερευνητικού ερωτήματος<sup>54</sup>

<sup>54</sup>Bodvin et al., 2020

Ελέγξτε ότι όλοι οι όροι ή οι έννοιες που χρησιμοποιούνται στο σχήμα XYZ είναι σαφείς. Για κάθε όρο ή έννοια, σκεφτείτε πώς αυτό μπορεί να εκφραστεί σε παρατηρήσιμη συμπεριφορά μαθητή ή/και πώς μπορείτε να ρωτήσετε έναν μαθητή γι' αυτό. Αυτή η άσκηση σκέψης βοηθά στη διατύπωση του επεξηγηματικού ερευνητικού ερωτήματος με επαρκώς συγκεκριμένο τρόπο. Επιπλέον, οι έννοιες που χρησιμοποιούνται θα φανούν χρήσιμες κατά την προετοιμασία της παρατήρησης και της συνέντευξης (βλ. επίσης κεφάλαια 5 και 6). Αυτό μπορεί να οδηγήσει στην αναδιατύπωση ενός ή περισσότερων όρων στο ερευνητικό ερώτημα. Για παράδειγμα, η «συνεχιζόμενη δέσμευση μετά την ολοκλήρωση των ασκήσεων» είναι πιο συγκεκριμένη (ως διατύπωση του αποτελέσματος Z) από την ευρύτερη έννοια «κίνητρο».

Οπότε, όταν σκεφτόμαστε το γενικό ερώτημα: «Πώς μπορούμε να προκαλέσουμε το ενδιαφέρον των μαθητών κατά τη διάρκεια των μαθημάτων σε σχέση με τον μαθηματικό συλλογισμό;», αυτό μπορεί να καθοριστεί ως «Να εξετάσουμε την επίδραση της διδακτικής πρακτικής X (στρατηγική ερωτο-απάντηση) στο αποτέλεσμα Z (συνεχής δέσμευση μετά την ολοκλήρωση των ασκήσεων για την αξιολόγηση της συνάφειας ενός μαθηματικού μοντέλου σε μια ρεαλιστική κατάσταση) με τους μαθητές περίπτωσης και να ελέγξετε εάν κάποιοι άλλοι παράγοντες Y (π.χ. χρησιμότητα του γνωστικού αντικείμενου στην καθημερινή ζωή) παίζουν ρόλο σε αυτό. Γενικά, όσο πιο συγκεκριμένο είναι το ερευνητικό ερώτημα, τόσο πιο ακριβείς θα είναι οι παρατηρήσεις, οι συνεντεύξεις, τα σύντομα ερωτηματολόγια (προαιρετικά) και η αξιολόγηση».



#### Παραδείγματα ερευνητικών ερωτημάτων που αφορούν τον μαθηματικό συλλογισμό

- Πώς μπορώ να διδάξω άλγεβρα με σκοπό την κατανόηση (π.χ., συνδυαστικές παραστάσεις); (διερευνητικό ερευνητικό ερώτημα)
- Πώς μπορεί η εστίαση στον μαθηματικό συλλογισμό να αποτελέσει πιο δυνατό κίνητρο για τους μαθητές; (διερευνητικό ερευνητικό ερώτημα)
- Πώς μπορώ να αντιμετωπίσω τις διαφορετικές μαθησιακές ανάγκες των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του μαθηματικού συλλογισμού με αποτελεσματικό τρόπο; (επεξηγηματικό ερευνητικό ερώτημα)
- Σε ποιο βαθμό είναι, π.χ. τα έργα που προωθούν τη διαφοροποιημένη εργασία, οι «σκαλωσιές» (scaffolding), οι αρχές της ισότιμης διδασκαλίας, για την αντιμετώπιση των διαφορετικών μαθησιακών αναγκών των μαθητών κατά τη διάρκεια διδασκαλίας μαθηματικού συλλογισμού; (επεξηγηματικό ερευνητικό ερώτημα)
- Οι γνωστικά απαιτητικές εργασίες διευκολύνουν τον μαθηματικό συλλογισμό; (επεξηγηματικό ερευνητικό ερώτημα)

Γράψτε τα δικά σας ερευνητικά ερωτήματα στο **Πίνακα Επισκόπησης Μελέτης Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος** (“Research Lesson Study Overview Table Sheet”).

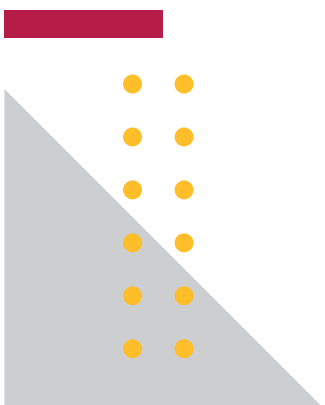
## 4. Σχεδιασμός του πρώτου ερευνητικού μαθήματος

### 4.1 Τι είναι ένα «ερευνητικό μάθημα»;

Ένας σημαντικός στόχος μιας EMM είναι να διερευνήσει κατά πόσο μια εκπαιδευτική πρακτική μπορεί να οδηγήσει καλύτερα σε ένα επιθυμητό αποτέλεσμα για τους μαθητές περίπτωσης. Ο στόχος του ερευνητικού μαθήματος είναι συνήθως να αλλάξει ή να βελτιώσει μια υπάρχουσα εκπαιδευτική πρακτική, αλλά μπορεί επίσης να στοχεύει, σε μια διερευνητική φάση, στην προσεκτική χαρτογράφηση του τρόπου με τον οποίο μια υπάρχουσα εκπαιδευτική πρακτική παράγει το επιθυμητό αποτέλεσμα και πώς αυτό το βιώνουν οι μαθητές περίπτωσης. Ως εκ τούτου, ο στόχος δεν είναι να σχεδιάσουμε το «τέλειο» μάθημα ή να ενσωματώσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο περιεχόμενο μαθήματος ή εκπαιδευτικές πρακτικές σε ένα ερευνητικό μάθημα, αλλά να σχεδιάσουμε ένα μάθημα με τέτοιο τρόπο ώστε τα προκαθορισμένα αποτελέσματα να επιτυγχάνονται με τους μαθητές περίπτωσης.

Αποφασίστε εάν το ερευνητικό μάθημα διδάσκεται από έναν ή περισσότερους εκπαιδευτικούς της ομάδας Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος. Εάν περισσότεροι από ένας εκπαιδευτικοί διδάσκουν το ερευνητικό μάθημα, να θυμάστε ότι πρέπει να επιλέξετε τρεις μαθητές ανά τάξη. Πολλές επιλογές είναι πιθανές:

- **Επιλογή 1:** Κάθε εκπαιδευτικός διδάσκει το ίδιο ερευνητικό μάθημα. Σε κάθε ερευνητικό μάθημα, τουλάχιστον ένα άλλο μέλος της ομάδας είναι παρόν για να παρατηρήσει και να πάρει συνέντευξη από τους μαθητές περίπτωσης.
- **Επιλογή 2:** Μόνο ένας εκπαιδευτικός διδάσκει το ερευνητικό μάθημα. Τα άλλα μέλη της ομάδας παρακολουθούν το ερευνητικό μάθημα.
- **Επιλογή 3:** Κάθε Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος είναι αφιερωμένη σε διαφορετικό εκπαιδευτικό/τμήμα. Με άλλα λόγια, η πρώτη Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος αφορά ένα τμήμα, η δεύτερη Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος αφορά ένα άλλο τμήμα και η τρίτη Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος αφορά ένα τρίτο τμήμα.



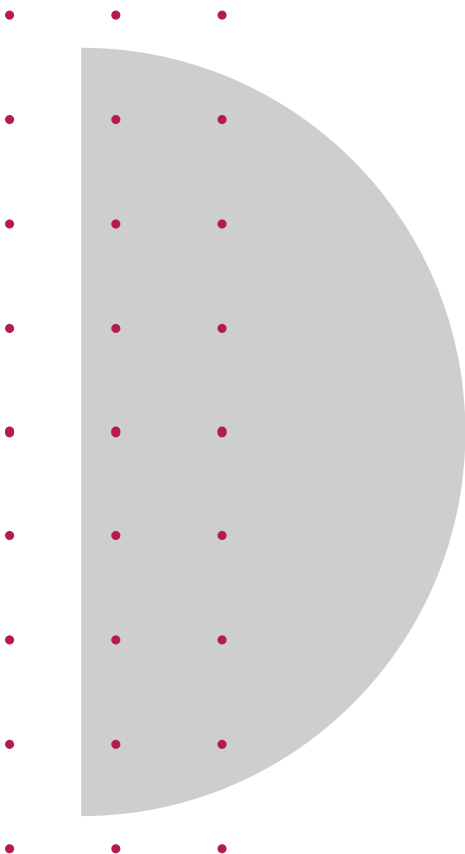
#### 4.2 Πρακτική προετοιμασία που είναι σχετική με το περιεχόμενο του ερευνητικού μαθήματος

Κατά τον σχεδιασμό μαθήματος, ελέγξτε και τροποποιήστε προσεκτικά τις διδακτικές σας εργασίες. Γράψτε πλήρως τι ακριβώς θα θέλετε να μπορεί να κάνει κάθε μαθητής με τις νέες του γνώσεις μέχρι το τέλος του ερευνητικού μαθήματος. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το **Φύλλο Σχεδιασμού και Παρατήρησης Ερευνητικού Μαθήματος (Research Lesson Planning and Observation Sheet)**. Σχεδιάστε κάθε στάδιο του μαθήματος με ιδιαίτερη προσοχή στη σειρά όπου χρησιμοποιείτε τη συγκεκριμένη προσέγγιση που δοκιμάζετε ή βελτιώνετε. Συμφωνήστε και σημειώστε στον προγραμματισμό του ερευνητικού σας μαθήματος ακριβώς τι αναμένετε τον κάθε μαθητή περίπτωσης να γράψει, να πει, να ζωγραφίσει κ.λπ., σημείο που να υποδηλώνει ότι είναι έτοιμος να προχωρήσει στο επόμενο στάδιο του μαθήματος. Προσδιορίστε όσο πιο προσεκτικά μπορείτε: ποιες πηγές θα χρησιμοποιηθούν και πώς, τι θα γράψετε στον πίνακα, πού και πότε και υποδείξτε τον χρόνο για κάθε στάδιο του μαθήματος.

Όταν προετοιμάζετε το μάθημά σας, λάβετε υπόψη τις διαφορές μεταξύ των μαθητών-περίπτωσης (π.χ. μαθητές που, για παράδειγμα, έχουν καλή πρόοδο, μέση ή κάτω από τον μέσο όρο σε σχέση με το επιθυμητό αποτέλεσμα). Είναι πολύ σημαντικό η ομάδα Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος να γράφει ξεκάθαρα **τι περιμένουν** από τους μαθητές-περίπτωσης στο επόμενο μάθημα και **πώς θα συλλέξουν στοιχεία** για αυτό.



Στο Μέρος Ι αυτού του εγχειριδίου, παρέχεται ένας οδηγός έμπνευσης για τη διδασκαλία και την μάθηση του μαθηματικού συλλογισμού. Οι διάφορες ενότητες του Μέρους Ι (συμπεριλαμβανομένων των παραδειγμάτων που παρέχονται) είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για τον προγραμματισμό του ερευνητικού σας μαθήματος.



#### 4.3 Προετοιμασία παρατήρησης μαθητών-περίπτωσης

Μετά τον προγραμματισμό του ερευνητικού μαθήματος και τη συζήτηση για το τι να περιμένουμε από κάθε μαθητή περίπτωσης, είναι σημαντικό να προετοιμάσουμε πώς θα παρατηρηθούν οι μαθητές. Αυτές οι παρατηρήσεις ελέγχουν τι πραγματικά συμβαίνει στην τάξη. Η παρατήρηση των μαθητών περίπτωσης με στόχο την αποκάλυψη του τρόπου που εργάζονται στην τάξη είναι μια από τις πιο σημαντικές και αποκαλυπτικές πτυχές της EMM.

Το να υπάρχουν ορισμένοι κανόνες διασφαλίζει ότι δεν θα συλλέξετε όλοι δεδομένα για δύο από τους τρεις μαθητές και θα χάσετε τον τρίτο. Παρατηρήστε τον εφεδρικό μαθητή-περίπτωσης σε περίπτωση που κάποιος απουσιάζει την ημέρα του ερευνητικού μαθήματος.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι οργάνωσης μιας παρατήρησης, που κυμαίνονται από μια **ανοιχτή παρατήρηση** (π.χ. ακρόαση, παρακολούθηση και λήψη σημειώσεων) έως μια **κλειστή παρατήρηση** (π.χ. χρησιμοποιώντας μια λίστα ελέγχου) ή συνδυασμό ανοιχτής και κλειστής παρατήρησης.

Όταν επιλέγετε μια ανοιχτή παρατήρηση, παρακολουθείστε τη συμπεριφορά των μαθητών και ακούστε τη συζήτηση μεταξύ τους, σημειώστε τι έγραψαν ή είπαν ή ζωγράρισαν σε σύγκριση με αυτό που αναμενόταν από την ομάδα. Βγάλτε μια φωτογραφία με τα γραπτά των μαθητών. Το να ακούτε τι λένε ο ένας στον άλλο μπορεί να δείξει τι και πώς σκέφτονται και αντιλαμβάνονται.

Μια παγίδα είναι να κάνετε ανοιχτές παρατηρήσεις με μια ασαφή σύνδεση με το ερευνητικό ερώτημα. Μια (εν μέρει) κλειστή παρατήρηση μπορεί να είναι χρήσιμη. Σκεφτείτε ποιι δείκτες συμπεριφοράς μπορούν να είναι χρήσιμοι να παρατηρηθούν σχετικά με το ερευνητικό ερώτημα. Σκεφτείτε για παράδειγμα τη σχετική συμπεριφορά που πρέπει να παρατηρήσετε στους μαθητές περίπτωσης, π.χ. εάν το ερευνητικό ερώτημα αφορά τη «συνεχή συμμετοχή» κατά την ολοκλήρωση των μαθηματικών ασκήσεων», τότε σκεφτείτε πώς μπορεί να παρατηρηθεί αυτό ή τι είδους στοιχεία χρειάζονται για να προσδιορίσετε εάν οι μαθητές-περίπτωσης συνεργάζονται πραγματικά/ αποτελεσματικά όταν ολοκληρώνουν τις ασκήσεις. Ποια παρατηρήσιμη συμπεριφορά αναμένετε και σε τι διαφέρει αυτή η συμπεριφορά από τη συμπεριφορά ενός μαθητή που δεν συμμετέχει; Η διεξαγωγή παρατηρήσεων στην τάξη σας δίνει τη δυνατότητα να ελέγξετε τι πραγματικά συμβαίνει. Χρησιμοποιήστε το **Φύλλο Σχεδιασμού και Παρατήρησης Ερευνητικού Μαθήματος (Research Lesson Planning and Observation Sheet)** για να σημειώσετε ποια συμπεριφορά μαθητή είναι σχετική να παρατηρήσετε.

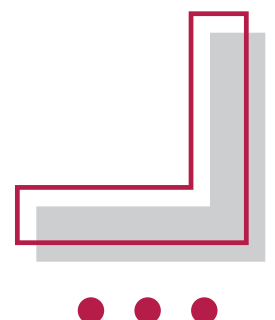


Μπορείτε να βρείτε ένα παράδειγμα δεικτών συμπεριφοράς παρακάτω (Πίνακας 1 και 2) που μπορεί να είναι χρήσιμοι κατά την παρατήρηση μαθητών-περίπτωσης<sup>55</sup>. Προφανώς, πολλοί άλλοι δείκτες συμπεριφοράς είναι πιθανοί. Προσπαθήστε πάντα να κάνετε μια καλά μελετημένη επιλογή για να καταλήξετε σε έναν περιορισμένο και εφικτό αριθμό δεικτών συμπεριφοράς που πρέπει να παρατηρήσετε. Όσο πιο συγκεκριμένα διατυπωθούν αυτοί οι δείκτες, τόσο πιο χρήσιμη θα είναι η παρατήρηση. Αποφύγετε τους δείκτες που αλληλεπικαλύπτονται, στοχεύστε σε δείκτες που αποκλείουν ο ένας τον άλλον.

<sup>55</sup>Based upon de Vries et al. (2016) en Kooiker (2011)

Πίνακας 1  
Δείκτες συμπεριφοράς σχετικά με μαθηματικό συλλογισμό

<p><b>Γενίκευση από συγκεκριμένες περιπτώσεις (επαγωγικός συλλογισμός)</b></p>	<p>Ο μαθητής γενικεύει ένα μοτίβο με βάση λίγα αρχικά παραδείγματα. Ο μαθητής βρίσκει τον επόμενο όρο.</p>
<p><b>Αξιολόγηση μαθηματικού ισχυρισμού</b></p>	<p>Ο μαθητής ελέγχει αν ισχύει ο ισχυρισμός σε διαφορετικά παραδείγματα. Ο μαθητής βρίσκει ένα αντιπαράδειγμα που διαψεύδει τον ισχυρισμό. Ο μαθητής παρέχει ένα γενικό παράδειγμα ή ένα έγκυρο επιχειρήμα για να υποστηρίξει τον ισχυρισμό.</p>
<p><b>Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω παραγωγικού συλλογισμού</b></p>	<p>Ο μαθητής χρησιμοποιεί (ή αναφέρεται σε) ένα θεώρημα ή κανόνα σε μια συγκεκριμένη περίπτωση.</p>
<p><b>Αναλογικός συλλογισμός (μεταφορά δομικών πληροφοριών από το ένα σύστημα στο άλλο)</b></p>	<p>Ο μαθητής αναγνωρίζει παρόμοιες καταστάσεις (σε σχέση με ένα συγκεκριμένο/κατάλληλο κριτήριο). Ο μαθητής αναφέρεται σε ιδιότητες παρόμοιων καταστάσεων.</p>
<p><b>Συλλογισμός με εικόνες</b></p>	<p>Ο μαθητής αποσυνθέτει γεωμετρικά σχήματα στη διαδικασία της αιτιολόγησης. Ο μαθητής βρίσκει κοινά στοιχεία σε διαφορετικά σχήματα (κοινή βάση, κοινό ύψος) στη διαδικασία της αιτιολόγησης.</p>
<p><b>Αξιολόγηση της καταλληλότητας ενός μαθηματικού μοντέλου σε μια ρεαλιστική κατάσταση</b></p>	<p>Ο μαθητής αξιολογεί το μοντέλο (αν αναπαριστά την κατάσταση). Για παράδειγμα, μέσω της παρατήρησης γραφημάτων και της χρήσης ψηφιακών εργαλείων, ο μαθητής συμπεραίνει ότι ένα γραμμικό μοντέλο δεν ταιριάζει με την ανάπτυξη ενός πληθυσμού βακτηρίων στον πραγματικό κόσμο (εκθετική ανάπτυξη).</p>
<p><b>Δημιουργία συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων (οπτικών, συμβολικών, λεκτικών, πλαισίου)</b></p>	<p>Ο μαθητής χρησιμοποιεί όρους από μια διαφορετική αναπαράσταση (π.χ. μιλώντας για μια συμβολική αναπαράσταση χρησιμοποιεί τον όρο «σημείο»). Ο μαθητής απαντά σε ερωτήσεις που διατυπώνονται στο πλαίσιο μιας αναπαράστασης χρησιμοποιώντας όρους ή πληροφορίες από μια άλλη αναπαράσταση. Ο μαθητής χρησιμοποιεί αναπαραστάσεις που δεν δίνονται στο έργο (π.χ. πίνακα για την αναπαράσταση γραφημάτων).</p>
<p><b>Ανάπτυξη προβλέψεων σε στοχαστικές καταστάσεις</b></p>	<p>Ο μαθητής δίνει ένα επιχειρήμα σχετικά με την λανθασμένη/παραπλανητική χρήση ενός γραφήματος. Ο μαθητής διακρίνει τη θεωρητική πιθανότητα από την πειραματική πιθανότητα και από τη συχνότητα σε μια συγκεκριμένη περίπτωση.</p>



Πίνακας 2  
Δείκτες γνωστικών απαιτήσεων

<p><b>Κριτική σκέψη</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ο μαθητής γενικεύει με βάση παραδείγματα</li> <li>• Ο μαθητής γενικεύει βάσει μοτίβων που έχει εντοπίσει</li> <li>• Ο μαθητής επιχειρηματολογεί αναρωτιέται/ θέτει ερωτήματα γιατί ... μια συγκεκριμένη αναπαράσταση ταιριάζει, γιατί υπάρχει σφάλμα, γιατί ένα μοντέλο ταιριάζει σε μια κατάσταση, ...</li> <li>• Ο μαθητής εντοπίζει ανάλογες καταστάσεις</li> <li>• Ο μαθητής επινοεί τις δικά του έργα ή προβλήματα, με βάση κάποια δεδομένα κριτήρια</li> <li>• Ο μαθητής χρησιμοποιεί ευρετικές μεθόδους για την επίλυση ενός προβλήματος</li> <li>• Ο μαθητής επινοεί μια στρατηγική επίλυσης προβλημάτων</li> <li>• Ο μαθητής αιτιολογεί τις επιλογές του (π.χ. για μια στρατηγική λύσης, ένα θεώρημα)</li> </ul>
<p><b>Χρήση αναπαραστάσεων για νοηματοδότηση</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Χρήση αναπαραστάσεων για νοηματοδότηση</li> <li>• Ο μαθητής χρησιμοποιεί δύο ή περισσότερες αναπαραστάσεις για να διερευνήσει ένα πρόβλημα</li> <li>• Ο μαθητής μεταφράζει μια γραφική παράσταση ή έναν πίνακα σε συμβολική αναπαράσταση (εξίσωση, όρος)</li> <li>• Ο μαθητής επιλέγει μια κατάλληλη αναπαράσταση</li> <li>• Ο μαθητής βλέπει πώς οι αλλαγές σε μια αναπαράσταση επηρεάζουν μια άλλη αναπαράσταση (π.χ. πώς η αλλαγή της κλίσης επηρεάζει το γράφημα και τη συμβολική έκφραση μιας συνάρτησης)</li> <li>• Ο μαθητής χειρίζεται μια αναπαράσταση με συστηματικό τρόπο για να διερευνήσει ένα πρόβλημα των μαθηματικών (π.χ. παράμετροι μιας τετραγωνικής συνάρτησης)</li> </ul>
<p><b>Εννοιολογικά έργα που ενσωματώνουν διαδικασίες</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ο μαθητής χρησιμοποιεί πολλαπλές αναπαραστάσεις (γραφήματα, πίνακες, τύπους) για να καταλήξει σε ένα αποτέλεσμα</li> <li>• Ο μαθητής μπλέκεται με τις έννοιες που διέπουν μια διαδικασία</li> <li>• Ο μαθητής επινοεί μια διαδικασία με άτυπα μέσα (π.χ. χειραπτικά μέσα (manipulatives), μοντέλα)</li> <li>• Ο μαθητής αξιολογεί τη δυνατότητα εφαρμογής μιας διαδικασίας για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα</li> <li>• Ο μαθητής βρίσκει μια διαδικασία για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα</li> <li>• Ο μαθητής ερμηνεύει το νόημα μιας διαδικασίας</li> <li>• Ο μαθητής προσαρμόζει και εφαρμόζει μια διαδικασία σε ένα νέο, άγνωστο πρόβλημα</li> </ul>
<p><b>Χρήση μαθηματικών για την κατανόηση του πραγματικού κόσμου</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ο μαθητής αξιολογεί την καταλληλότητα ενός μαθηματικού μοντέλου</li> <li>• Ο μαθητής επινοεί ένα μαθηματικό μοντέλο για μια πραγματική κατάσταση</li> <li>• Ο μαθητής αναπτύσσει μια μαθηματική έννοια («begrip») στον πραγματικό κόσμο</li> <li>• Ο μαθητής χρησιμοποιεί μια οικεία διαδικασία για να λύσει ένα πρόβλημα στον πραγματικό κόσμο</li> <li>• Ο μαθητής αναγνωρίζει ότι η ίδια πραγματική κατάσταση μπορεί να αναπαρασταθεί με διαφορετικά μοντέλα</li> <li>• Ο μαθητής επικυρώνει ένα μοντέλο στον πραγματικό κόσμο</li> </ul>

Για περισσότερους δείκτες σχετικά με τον μαθηματικό συλλογισμό, δείτε επίσης το Μέρος Ι, ενότητα 4.6 (Αξιολόγηση Μαθηματικού Συλλογισμού). Στην ενότητα 4.4 υπάρχει ένα άλλο παράδειγμα σχετικά με την Κοινοποίηση των λύσεων των μαθητών.

#### 4.4 Προετοιμασία της συνέντευξης με τους μαθητές-περίπτωση

Κατά την προετοιμασία του ερευνητικού μαθήματος, σκεφτείτε πώς θα οργανώσετε τη (σύντομη) συνέντευξη μετά το ερευνητικό μάθημα. Επίσης, σκεφτείτε ενδιαφέρουσες ερωτήσεις για τη συνέντευξη. Καθώς αποκτάτε μεγαλύτερη εμπειρία στην Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος, θα θέλετε να προσαρμόσετε τις ερωτήσεις, ώστε να ταιριάζουν στο ερευνητικό μάθημα, στους μαθητές και στο επίκεντρο της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος που διεξάγετε. Χρησιμοποιήστε το «Έντυπο Συνέντευξης» με την ολοκλήρωση του μαθήματος (“Post Research Lesson Interview Sheet”) για να σημειώσετε σχετικές ερωτήσεις.

Προτείνουμε να επιλέξετε μεταξύ μιας συνέντευξης με κάθε μαθητή περίπτωσης ξεχωριστά ή μιας συνέντευξης με όλους τους μαθητές περίπτωσης μαζί, η οποία ονομάζεται «ομάδα εστίασης». Οι ατομικές συνεντεύξεις θα σας βοηθήσουν να πάρετε σε βάθος απαντήσεις από τους μαθητές, γεγονός που αυξάνει τις δυνατότητες να έχετε καλύτερη εικόνα. Ένα μειονέκτημα είναι ότι οι ατομικές συνεντεύξεις είναι πιο χρονοβόρες για να οργανωθούν. Η «ομάδα εστίασης είναι ένας ενδιαφέρον τρόπος ανταλλαγής απόψεων και συζήτησης συμφωνιών/διαφωνιών μεταξύ των μαθητών. Αυτή η δυναμική δεν θα αποτυπωθεί σε μια συνέντευξη πρόσωπο με πρόσωπο. Επίσης, οι ομάδες εστίασης είναι λιγότερο χρονοβόρες από τις ατομικές συνεντεύξεις. Ένα μειονέκτημα μιας ομάδας εστίασης είναι ότι ο χρόνος ομιλίας ορισμένων μαθητών μπορεί να είναι σημαντικά υψηλότερος από τον χρόνο ομιλίας άλλων μαθητών, καθιστώντας τη συνεισφορά τους δυσανάλογη. Αποφασίστε σε αυτό το στάδιο εάν θέλετε να κάνετε ατομικές συνεντεύξεις με κάθε μαθητή περίπτωσης ή μία ομάδα εστίασης.

Πράγματα που πρέπει να αποφύγετε κατά τη συνέντευξη είναι να θέσετε πάρα πολλές ερωτήσεις ταυτόχρονα χωρίς να δίνετε χρόνο στο ενδιαμέσο για απάντηση. Ένα άλλο πρόβλημα μπορεί να είναι η υποβολή ερωτήσεων που ήδη προτείνουν μια απάντηση και θα μπορούσαν να δώσουν κοινωνικά επιθυμητές απαντήσεις.

##### **Συνιστούμε να χρησιμοποιείτε απλές ανοιχτές ερωτήσεις που αφήνουν το περιθώριο στον μαθητή να απαντήσει ελεύθερα.**

Μια καλή συνέντευξη δίνει στον μαθητή περισσότερες ευκαιρίες να μιλήσει από το άτομο που παίρνει την συνέντευξη. Επίσης, το άτομο που παίρνει την συνέντευξη θα πρέπει να κάνει επιπλέον, επακόλουθες ερωτήσεις όταν η απάντηση δεν είναι σαφής ή μάλλον επιφανειακή. Για παράδειγμα, όταν ένας μαθητής απαντά σε μια ερώτηση με «ναι», «όχι» ή «μερικές φορές», μπορείτε να ζητήσετε από τον μαθητή να εξηγήσει αυτή την απάντηση με περισσότερες λεπτομέρειες. Σκεφτείτε εκ των προτέρων ποιες επιπλέον ερωτήσεις μπορείτε να κάνετε και επίσης διατυπώστε αυτές τις ερωτήσεις με ανοικτό τρόπο.



Πιο κάτω, μπορείτε να βρείτε παραδείγματα ερωτήσεων / προτροπών σχετικά με τον μαθηματικό συλλογισμό για την συνέντευξη μαθητών περίπτωσης μετά το ερευνητικό μάθημα:

- Τι σου άρεσε περισσότερο στα μαθήματα μαθηματικού συλλογισμού; Εξήγησε με ένα παράδειγμα.
- Τι ήταν πιο δύσκολο για σένα; Δώσε ένα παράδειγμα.
- Μπορούσες να λύσεις τα προβλήματά που σας δόθηκαν; Πώς; Δώσε ένα παράδειγμα.
- Τι έμαθες; (Τι μπορείς να κάνεις τώρα που δεν μπορούσες να κάνεις πριν; Τι μπορείς να κάνεις καλύτερα; Με ποιον τρόπο είναι καλύτερα/ο;)
- Με ποιους τρόπους πιστεύεις ότι συνέβαλαν τα μαθήματα μαθηματικού συλλογισμού στην τάξη στη δική σου μάθηση των μαθηματικών;

- Πώς σε βοήθησε η οργάνωση της δουλειάς στην τάξη (π.χ. η εργασία σε ομάδες); Μπορούσες να συζητήσεις με τον/την μαθητή/τρια που καθόταν δίπλα σου;
- Τι υλικό δόθηκε; Ήταν χρήσιμο ή θα χρειαζόσουν επιπλέον υλικό;
- Με ποιους τρόπους πιστεύεις τα μαθήματα μαθηματικού συλλογισμού ήταν διαφορετικά (ή όχι) από άλλα μαθήματα; Εξήγησε με ένα παράδειγμα.
- Με ποιους τρόπους ήταν τα μαθήματα μαθηματικού συλλογισμού χρήσιμα (ή όχι) για σένα;
- Αν επρόκειτο να διδαχτεί το ίδιο μάθημα σε άλλη ομάδα μαθητών που φοιτούν στην ίδια τάξη με σένα, τι θα άλλαζες και γιατί;
- Τι είδους υποστήριξη έλαβες στην τάξη; Από τους συμμαθητές σου; Από τον/την καθηγητή/τρια σου; Πόσο καλά σε βοήθησε να συνεχίσεις; Χρειάστηκες κάτι άλλο; Ήταν ο/η καθηγητής/τρια σου διαθέσιμος/η για ανατροφοδότηση;

Προτείνουμε η συνέντευξη με μαθητές περίπτωσης να επικεντρωθεί στις **μαθησιακές τους εμπειρίες**. Ο σκοπός θα ήταν να γίνει καλύτερη κατανόηση των μαθησιακών εμπειριών των μαθητών στις «τάξεις συλλογισμού». Ασχολούμαστε εδώ με το αναλυτικό πρόγραμμα στο επίπεδο του μαθητή. Διερευνούμε πώς μαθαίνουν οι μαθητές σε τέτοια περιβάλλοντα μάθησης, ιδίως όσον αφορά: (1) τη χρήση πηγών (υλικών, ψηφιακών, κοινωνικών/ανθρώπινων), (2) την υποστήριξη που (θεωρούν ότι) χρειάζονται για τη μάθησή τους, (3) δεξιότητες και ικανότητες που αναπτύσσουν και (4) οι μορφές εργασίας (που θεωρούν ότι) λειτουργούν καλύτερα για αυτούς (π.χ. συνεργασία).

Μπορείτε επίσης να δώσετε στους μαθητές πολλαπλές κάρτες με αξιολογικές δηλώσεις (π.χ. “Οι μαθηματικές εργασίες ήταν εύκολες”, “Οι συλλογιστικές εργασίες ήταν συναρπαστικές”, “Δεν πίστευα ότι μπορούσα να κάνω τέτοια μαθηματικά.”). Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να κατατάξουν τις δηλώσεις ξεκινώντας από αυτές με τις οποίες συμφωνούν περισσότερο και καταλήγοντας σε αυτές με τις οποίες διαφωνούν περισσότερο. Στη συνέχεια, μπορείτε να μιλήσετε για την κατάταξη (π.χ. “Γιατί συμφωνείτε περισσότερο με τη δήλωση X;”). Ειδικά για λιγότερο ομιλητικούς μαθητές, αυτή η μέθοδος μπορεί να είναι χρήσιμη για να εκφραστούν στις συνεντεύξεις.

Επιπλέον ερωτήσεις όταν θέλετε να μάθετε περισσότερα:

Θα μπορούσες να μου δώσεις ένα παράδειγμα του τι εννοείς;

- Μπορείς να μου εξηγήσεις με περισσότερη λεπτομέρεια;
- Μπορείς να πεις κάτι περισσότερο για αυτό;
- Τι εννοείς;
- Πώς συνέβηκε αυτό;
- Πότε έγινε αυτό;
- Και μετά;

Αν δεν είστε σίγουροι ότι καταλάβατε σωστά μια απάντηση, μπορείτε να πείτε τα παρακάτω:

- Αν καταλαβαίνω σωστά, τότε...
- Το συνοψίζω σωστά όταν λέω ότι...

#### 4.5 Προετοιμασία σύντομου ερωτηματολογίου ή κάρτας εξόδου για όλους τους μαθητές (προαιρετικό)

Ο σκοπός μιας Ερευνητικής Μελέτης Διδασκαλίας Μαθήματος είναι να κατανοήσει καλύτερα ή/και να βελτιώσει τη διδασκαλία των μαθητών. Δεδομένου ότι υπάρχει σαφής εστίαση σε τρεις μαθητές-περίπτωσης στην τάξη, μπορεί να είναι ενδιαφέρον να διερευνηθεί ο αντίκτυπος του ερευνητικού μαθήματος σε άλλους μαθητές χρησιμοποιώντας ένα σύντομο ερωτηματολόγιο ή κάρτα εξόδου μετά από ένα ή περισσότερα ερευνητικά μαθήματα. Αυτό το σύντομο ερωτηματολόγιο ή η κάρτα εξόδου σε επίπεδο τάξης, μπορεί να δώσει **πληροφορίες για τις γενικές αντιλήψεις όλων των μαθητών** σχετικά με τις διδακτικές δραστηριότητες που εφαρμόστηκαν κατά τη διάρκεια του ερευνητικού μαθήματος. Θα μπορούσε επίσης να είναι μια ενδιαφέρουσα προσθήκη στα δεδομένα της συνέντευξης που συγκεντρώθηκαν για τους μαθητές-περίπτωσης. Είναι επομένως χρήσιμο να σκεφτείτε πιθανές ερωτήσεις για όλους τους μαθητές όταν καταρτίζετε το σχέδιο μαθήματος.

#### Πίνακας 2

Εικονογράφηση: ερωτηματολόγιο για όλους τους μαθητές - εμπειρίες από το ερευνητικό μάθημα

ΤΑΞΗ 1 Αριθμός μαθητών: 20	Διαφωνώ απόλυτα	Διαφωνώ	Συμφωνώ	Συμφωνώ απόλυτα
Βρήκα ενδιαφέρουσες τις εργασίες / ασκήσεις μαθηματικών	2 (οι μαθητές σημειώνουν αυτή την απάντηση)	5 (εκ των οποίων 1 μαθητής-περίπτωσης)	12 (εκ των οποίων 2 μαθητές-περίπτωσης)	1
Συνεργάστηκα καλά κατά τη διάρκεια αυτών των μαθηματικών εργασιών	1	3	14 (εκ των οποίων 2 μαθητές-περίπτωσης)	2 (εκ των οποίων 1 μαθητής-περίπτωσης)
Είχα κίνητρο όταν έλυνα τις εργασίες μαθηματικών	0	4	12 (εκ των οποίων 3 μαθητές-περίπτωσης)	4
Έχω την αίσθηση ότι έμαθα από την επίλυση αυτών των μαθηματικών εργασιών / ασκήσεων	5 (εκ των οποίων 1 μαθητής-περίπτωσης)	7 (εκ των οποίων 2 μαθητές-περίπτωσης)	7	1
Αντιμετώπισα δυσκολίες κατά την επίλυση των μαθηματικών έργων	2 (εκ των οποίων 1 μαθητής-περίπτωσης)	3 (εκ των οποίων 2 μαθητές-περίπτωσης)	11	4

Είκοσι μαθητές, εκ των οποίων 3 μαθητές-περίπτωσης συμμετείχαν στην έρευνα στην τάξη. Σε αυτήν την κατάσταση, οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν από κοινού ένα σύνολο μαθηματικών εργασιών (σε δυάδα) με τον δικό τους τρόπο, ενώ ο/η εκπαιδευτικός ήταν διαθέσιμος/η για τυχόν ερωτήσεις. Με βάση την αναπαράσταση της κατανομής των βαθμολογιών των μαθητών στον πίνακα, η ομάδα της Μελέτης Μαθήματος κατέληξε σε μερικά ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Είναι σαφές ότι η πλειοψηφία των μαθητών θεώρησε ενδιαφέρον το ερευνητικό μάθημα. Αν και λίγοι μαθητές δήλωσαν ότι δεν συνεργάστηκαν καλά κατά τη διάρκεια του μαθήματος, οι περισσότεροι μαθητές συνεργάστηκαν καλά και ήταν επίσης σε θέση να παρακολουθήσουν καλά το μάθημα. Οι μαθητές-περίπτωσης το έδειξαν επίσης αυτό. Η αίσθηση ότι μαθαίνεις κάτι ήταν λίγο λιγότερο θετική. Δώδεκα μαθητές, συμπεριλαμβανομένων των μαθητών-περίπτωσης, είπαν ότι δεν ένοιωσαν ότι είχαν μάθει κάτι. Όσον αφορά την πρόκληση, υπάρχει

Παρακάτω δίνουμε ένα παράδειγμα ερωτηματολογίου με βαθμολογία<sup>56</sup>. Σκεφτείτε ερωτήσεις που σχετίζονται με το ερευνητικό σας ερώτημα και ταιριάζουν με το σχέδιο μαθήματος. Ένα πλεονέκτημα του σύντομου ερωτηματολογίου είναι ότι χρειάζονται μόνο λίγα λεπτά για τη συμπλήρωσή του και ο εκπαιδευτικός θα έχει μια αξιοπρεπή εικόνα του πώς αντιλήφθηκαν όλοι οι μαθητές το ερευνητικό μάθημα. Ένα μειονέκτημα είναι ότι οι μαθητές μπορεί να ερμηνεύουν τις ερωτήσεις με διαφορετικούς τρόπους.

Ως εκ τούτου, είναι σημαντικό να γίνεται «έλεγχος εννοιών» ο βαθμός στον οποίο οι έννοιες που χρησιμοποιούνται στο ερωτηματολόγιο έχουν κατανοηθεί από τους μαθητές. Χρησιμοποιήστε το **Φύλλο Σύντομου Ερωτηματολογίου για Όλους τους Μαθητές (Short Questionnaire For All Students Sheet)**. Μπορείτε να βρείτε ένα ολοκληρωμένο παράδειγμα παρακάτω.

μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ των μαθητών-περίπτωσης και των άλλων μαθητών. Οι περισσότεροι μαθητές είπαν ότι αντιμετώπισαν δυσκολίες κατά τη διάρκεια του μαθήματος, ενώ αυτό μάλλον δεν ίσχυε για τους μαθητές-περίπτωσης.

Εναλλακτικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε «κάρτες εξόδου» για να ρωτήσετε τους μαθητές για τις εμπειρίες τους μετά από κάθε μάθημα. Ένα πλεονέκτημα της χρήσης της κάρτας εξόδου είναι ότι οι εκπαιδευτικοί θα λάβουν πιο περίπλοκη ανατροφοδότηση σχετικά με το ερευνητικό τους μάθημα. Ένα μειονέκτημα είναι ότι θα χρειαστεί περισσότερος χρόνος (ελάχ. 10-15 λεπτά) για να συμπληρώσουν οι μαθητές αυτό το ερωτηματολόγιο. Χρησιμοποιήστε το **Φύλλο Κάρτας Εξόδου για Όλους τους Μαθητές (Exit Card For All Students Sheet)**. Οι προτεινόμενες ερωτήσεις μπορούν να τροποποιηθούν ώστε να ταιριάζουν με τον στόχο και την ερώτηση της έρευνας.

<sup>56</sup>Bodvin, et al., 2020



## 5. Διδασκαλία του πρώτου ερευνητικού μαθήματος

### 5.1 Οδηγίες για τον εκπαιδευτικό

Εξηγήστε στους μαθητές σας ότι προσπαθείτε να βελτιώσετε τον τρόπο με τον οποίο τους βοηθάτε να μάθουν και γι' αυτό υπάρχουν άλλοι εκπαιδευτικοί που παρατηρούν, παίρνουν σημειώσεις και μιλούν με μερικούς μαθητές μετά το μάθημα. Εξηγήστε τους ότι θα μοιραστείτε μαζί τους αυτά που ανακαλύψτετε και ότι θα πάρετε τις απόψεις τους.

Ο εκπαιδευτικός εφαρμόζει το προετοιμασμένο σχέδιο μαθήματος. Οι αποκλίσεις από αυτό είναι κατά προτίμηση ελάχιστες. Διαφορετικά, καθίσταται πιο δύσκολο να προσδιοριστεί η ποιότητα του ερευνητικού μαθήματος. Στο τέλος του ερευνητικού μαθήματος, ο εκπαιδευτικός ρωτά όλους τους μαθητές πώς βίωσαν το ερευνητικό μάθημα (για παράδειγμα με ένα σύντομο ερωτηματολόγιο) και τους μαθητές περίπτωσης να παραμείνουν για μια σύντομη συνέντευξη με τον/τους παρατηρητές. Μπορείτε να πείτε στους μαθητές περίπτωσης ότι έχουν επιλεγεί τυχαία για συνέντευξη. Στο τέλος κάθε ερευνητικού μαθήματος, ο εκπαιδευτικός ευχαριστεί όλους τους μαθητές για τη συνεργασία τους.

### 5.2 Οδηγίες για τους παρατηρητές

Επειδή το ερευνητικό μάθημα σχεδιάζεται από κοινού, ανήκει από κοινού στην ομάδα Μελέτης Μαθήματος. Αυτό σημαίνει ότι η εστίαση για τους παρατηρητές είναι λιγότερο στον εκπαιδευτικό και περισσότερο στους μαθητές – ειδικά στους μαθητές-περίπτωσης. Θα πρέπει να εναλλάσσονται στο ερευνητικό μάθημα περνώντας λίγο χρόνο σαν να έχουν «ζουμάρι» σε έναν μαθητή-περίπτωσης και μετά να διευρύνουν για να επιτρέψουν σε μια μεγαλύτερη ομάδα ή ολόκληρη την τάξη να μπει στο πλαίσιο άλλες φορές.

Παρακάτω δίνουμε μερικές κατευθυντήριες γραμμές για τους παρατηρητές:

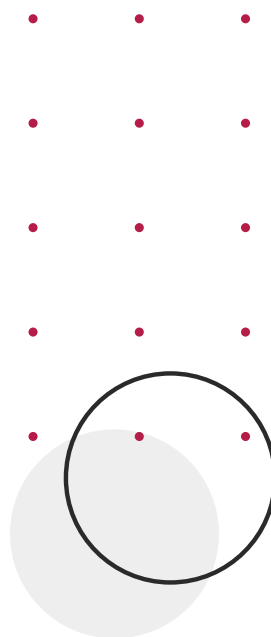
- Κατεβείτε στο μαθητικό επίπεδο και ανάμεσα στους μαθητές, ώστε να βιώσετε το μάθημα από τη δική τους οπτική γωνία.
- Εάν υπάρχουν περισσότεροι από έναν παρατηρητές στην τάξη, μπορούν και πάλι να παρατηρήσουν τους ίδιους μαθητές-περίπτωσης: πιθανώς οι παρατηρητές να σημειώνουν διαφορετικά πράγματα (επειδή οι τάξεις κινούνται τόσο γρήγορα και είναι απρόβλεπτες) και ακόμη και όταν σημειώνουν το ίδιο πράγμα, συχνά ερμηνεύεται ή εξηγείται πολύ διαφορετικά.
- Εάν ο παρατηρητής δεν γνωρίζει τους μαθητές-περίπτωσης, μπορούν να του δοθούν κάρτες με ονόματα, σχεδιάγραμμα-χάρτης της τάξης ή φωτογραφία των μαθητών- περίπτωσης.
- Βεβαιωθείτε ότι ο παρατηρητής δεν παρεμβαίνει στο οπτικό πεδίο των μαθητών προς στον πίνακα ή τον εκπαιδευτικό.
- Να σέβεστε πάντα την ιδιωτικότητα και την ψυχολογική ευημερία των μαθητών. Εάν ένας μαθητής εκφράσει (προφορικά ή με τη γλώσσα του σώματος) ότι αισθάνεται άβολα όταν τον παρατηρούν, μιλήστε στον μαθητή και σταματήστε την παρατήρηση εάν χρειάζεται.

**Οι παρατηρητές θα πρέπει να προσπαθήσουν να καταγράψουν τις απαντήσεις των μαθητών-περίπτωσης σε διαφορετικά σημεία του μαθήματος - και πώς ταιριάζουν ή διαφέρουν από αυτό που αναμενόταν σε αυτό το στάδιο.**

Ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος παρατήρησης; Χρησιμοποιήστε μια ανοιχτή παρατήρηση ή καθοδηγηθείτε από τους δείκτες συμπεριφοράς που αναφέρονται στο **Φύλλο Σχεδιασμού και Παρατήρησης Μαθημάτων Έρευνας (Research Lesson Planning and Observation Sheet)**. Γράψτε αυτό που βλέπετε όσο πιο καθαρά γίνεται. Ή πιο συγκεκριμένα: περιγράψτε όσο το δυνατόν πιο ξεκάθαρα τις δραστηριότητες και τη συγκεκριμένη συμπεριφορά έκφρασης συναισθημάτων του/των μαθητή/ών περίπτωσης που παρατηρείτε. Σημειώστε επίσης τυχόν κρίσιμα περιστατικά. Εάν υπάρχει ένα κοινό μοτίβο (π.χ. όλοι οι μαθητές-περίπτωσης παρανοούν κάτι με τον ίδιο τρόπο) σημειώστε το στη στήλη «παρατηρούμενη απάντηση». Επίσης, σημειώστε σε ποια φάση του μαθήματος κάνετε κάθε σχολιασμό, αν μπορείτε.

Αναζητήστε στοιχεία προόδου για κάθε μαθητή σε σχέση με αυτό που σχεδιάστηκε και τον βαθμό που έχουν επιτευχθεί. Ποια είναι τα βασικά σημεία για το επόμενο μάθημα για τους μαθητές-περίπτωσης, τις μαθησιακές ομάδες στις οποίες ανήκουν (π.χ. μαθητές με καλή, μέση ή κάτω από το μέσο όρο πρόοδο) ή την τάξη; Τι θα θέλατε να τους ρωτήσετε στη συνέντευξη μετά το μάθημα; Σημειώστε το στις «αρχικές σκέψεις, ιδέες, προβληματισμούς» στο κάτω μέρος της σελίδας.

Εάν το ερευνητικό ερώτημα είναι διερευνητικό χωρίς ισχυρές υποθέσεις ή προκαθορισμένες ιδέες, μπορεί να είναι δύσκολο να γράψετε μια αναμενόμενη απάντηση ή συμπεριφορά. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορείτε να αφήσετε αυτά τα κελιά ανοιχτά στην αρχή. Κατά τη διάρκεια της παρατήρησης, προσπαθήστε να εντοπίσετε κρίσιμα συμβάντα που σχετίζονται με τη σκέψη και τον συλλογισμό των μαθητών. Σκεφτείτε με κριτικό τρόπο τα χαρακτηριστικά της εργασίας που σχετίζονται με τον μαθηματικό συλλογισμό, τον πραγματικό συλλογισμό των μαθητών και τις ενέργειες του εκπαιδευτικού που υποστηρίζουν τον συλλογισμό των μαθητών. Μετά από ένα ή δύο ερευνητικά μαθήματα, η αναμενόμενη απάντηση μπορεί να είναι πιο ξεκάθαρη και μπορεί να ολοκληρωθεί σε όλη τη διάρκεια της Μελέτης Μαθήματος.



## 6. Διεξαγωγή συνεντεύξεων μαθητών-περίπτωσης και χορήγηση του σύντομου ερωτηματολογίου/κάρτας εξόδου

### 6.1 Διεξαγωγή συνεντεύξεων μαθητών-περίπτωσης

Η ομάδα Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος διεξάγει την συνέντευξη από τους μαθητές-περίπτωσης μετά το ερευνητικό μάθημα με σκοπό να καταλάβει τις απόψεις των μαθητών σχετικά με το τι λειτούργησε για αυτούς και γιατί, τι νομίζουν ότι έμαθαν και πώς πιστεύουν ότι το μάθημα θα μπορούσε να αλλάξει αν διδασκόταν ξανά. Η συνέντευξη πρέπει να είναι σύντομη (όχι περισσότερο από 5 λεπτά) και μπορεί να γίνει με όλους τους μαθητές σε ομάδα ή ατομικά. Προσπαθήστε να πραγματοποιήσετε τη συνέντευξη με την πρώτη ευκαιρία μετά το μάθημα – ιδανικά στο τέλος του μαθήματος. Προσπαθήστε να καταγράψετε κάποια από τα λόγια των μαθητών στις σημειώσεις σας. Είναι επίσης δυνατό να διεξαχθεί η συνέντευξη μαθητή με άλλους μαθητές, αλλά οι οποίοι ανήκουν στις ίδιες τρεις ομάδες μαθητών (π.χ. μαθητές με καλή, μέση ή κάτω του μέσου όρου πρόοδο). Αυτό μπορεί να βοηθήσει στην τριγωνοποίηση (triangulation) των ευρημάτων – αλλά μπορεί επίσης να περιπλέξει το σύνολο δεδομένων. Προτείνουμε να εστιάσετε στους τρεις μαθητές-περίπτωσης. Χρησιμοποιήστε το «**Έντυπο Συνέντευξης με την ολοκλήρωση του μαθήματος (Post Research Lesson Interview Sheet)**» για να πάρετε σημειώσεις κατά τη διάρκεια της συνέντευξης.



Για την ομαλή διεξαγωγή της συνέντευξης των μαθητών-περίπτωσης, διατυπώνουμε κάποιες χρήσιμες οδηγίες.

Προετοιμάστε τη συνέντευξη επαρκώς:

- Ενημερώστε τους μαθητές-περίπτωσης ότι η συνέντευξη θα πραγματοποιηθεί λίγο ή αμέσως μετά το μάθημα.
- Βρείτε μια ήσυχη τοποθεσία για τη συνέντευξη.
- Προσπαθήστε να εκτιμήσετε εκ των προτέρων την ομιλία των μαθητών-περίπτωσης και λάβετε αυτό υπόψη κατά την προετοιμασία των ερωτήσεων.
- Τολμήστε να επιτρέψετε σιωπές. Με αυτόν τον τρόπο δίνετε χρόνο στον μαθητή να σκεφτεί.
- Αντιδράστε στις απαντήσεις με τέτοιο τρόπο ώστε ο μαθητής να έχει την αίσθηση ότι κάθε απάντηση είναι καλή και εκτιμάται. Αυτό εμποδίζει τον μαθητή να δώσει «λάθος» απαντήσεις. Μια απάντηση όπως «εντάξει», «ναι» ή «είναι καλό να το γνωρίζω αυτό» είναι πιο ουδέτερη από για παράδειγμα «καλή» ή «χαίρομαι που το ακούω». Εν κατακλείδι, ευχαριστήστε τον μαθητή / την μαθήτριά για τη συμβολή του/της.
- Αποφύγετε να διαβάσετε έτοιμες ερωτήσεις από το χαρτί.
- Για λιγότερο έμπειρες ομάδες: μείνετε όσο το δυνατόν περισσότερο στις προετοιμασμένες ερωτήσεις. Με αυτόν τον τρόπο, είναι λιγότερο πιθανόν να πέσετε στην παγίδα του να κάνετε κλειστές ή καθοδηγητικές ερωτήσεις και η εστίαση παραμένει στο πώς βίωσε ο μαθητής το μάθημα.
- Παρόλο που η συνέντευξη εστιάζεται στο πώς βίωσε ο μαθητής το μάθημα, μπορείτε επίσης να κάνετε μια ερώτηση που να αναφέρεται σε μια εντυπωσιακή ή ασαφή παρατήρηση. Φροντίστε να αποφύγετε τον εκφοβισμό του μαθητή. Επομένως, μην μπείτε σε πολλές λεπτομέρειες. Ένας μαθητής μπορεί να μην είναι σε θέση να δικαιολογήσει όλες τις ενέργειές του κατά τη διάρκεια ενός μαθήματος.
- Εάν κάτι δεν πήγε όπως επιθυμούσατε κατά τη διάρκεια του ερευνητικού μαθήματος, χρησιμοποιήστε αυτήν την ευκαιρία για να σκεφτείτε μαζί με τον μαθητή πώς να κάνετε τα πράγματα με διαφορετικό τρόπο στο μέλλον.

### 6.2 Χορήγηση σύντομου ερωτηματολογίου ή κάρτας εξόδου για όλους τους μαθητές (προαιρετικό)

Κατά την διάρκεια της συνέντευξης, κρατήστε τα παρακάτω κατά νου:

- Ως εισαγωγή στη συνέντευξη, αναφέρετε ότι θα θέλατε να μάθετε τι πιστεύει ο μαθητής για το μάθημα. Επομένως, θα κάνετε κάποιες ερωτήσεις σχετικά με το μάθημα. Με αυτόν τον τρόπο, μετατοπίζετε την εστίαση από τον μαθητή στο μάθημα και κατά συνέπεια, ο μαθητής μπορεί να αισθάνεται λιγότερο απειλούμενος. Απευθυνθείτε επίσης ρητά στον μαθητή σχετικά με την πιθανή συμβολή στο σχεδιασμό του μαθήματος: «Θα θέλαμε να μάθουμε τι σκέφτεσαι για το μάθημα που κάναμε μόλις τώρα. Μέσα από τις εμπειρίες σας, θα θέλαμε να βελτιώσουμε το μάθημα, για εσένα και τους συμμαθητές σου, αλλά και για άλλους μαθητές. Θα ήθελες να μοιραστείς τις σκέψεις σου για το μάθημα μαζί μου; Έχω ετοιμάσει μερικές ερωτήσεις. Δεν υπάρχουν σωστές ή λάθος απαντήσεις.
- Πάντα να σέβεστε την ιδιωτική ζωή και την ψυχολογική ευεξία των μαθητών. Εάν ένας μαθητής εκφράσει (προφορικά ή με τη γλώσσα του σώματος) ότι νιώθει άβολα να απαντήσει στις ερωτήσεις της συνέντευξης, μιλήστε με τον μαθητή και σταματήστε τη συνέντευξη εάν χρειάζεται.
- Κατά προτίμηση, ηχογραφήστε την συνομιλία, ώστε να εστιάσετε στην ακρόαση και να μην χρειάζεται να γράψετε τις απαντήσεις. Ζητήστε άδεια και ξεκαθαρίστε ότι η ηχογράφηση δεν θα κοινοποιηθεί σε άλλους.

Μπορείτε να επιλέξετε να ρωτήσετε όλους τους μαθητές στο τέλος του ερευνητικού μαθήματος σχετικά με τις εμπειρίες τους μέσω ενός σύντομου ερωτηματολογίου ή κάρτας εξόδου (βλ. επίσης «προετοιμασία για το ερωτηματολόγιο / κάρτα εξόδου για όλους τους μαθητές», σελίδα 62). Αυτό το ερωτηματολόγιο είναι προαιρετικό και μπορεί να χορηγηθεί σε έντυπη ή ψηφιακή μορφή (π.χ. μέσω Google forms). Δώστε λίγα λεπτά στο τέλος του ερευνητικού σας μαθήματος για τη χορήγηση του ερωτηματολογίου. Ο εκπαιδευτικός εξηγεί ότι θα ήθελε να μάθει μέσω ενός ερωτηματολογίου τι σκέφτονται οι μαθητές για το μάθημα. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι αυτό το ερωτηματολόγιο θα συμπληρωθεί ανώνυμα. Εξασφαλίζοντας την ανωνυμία, οι μαθητές θα είναι λιγότερο διατεθειμένοι να δώσουν επιθυμητές απαντήσεις. Αυτό μπορεί να γίνει, για παράδειγμα, τοποθετώντας ένα κουτί στην πόρτα ή δημιουργώντας ένα «ηλεκτρονικό ταχυδρομείο» στο οποίο οι μαθητές μπορούν να καταθέσουν συμπληρωμένο το ερωτηματολόγιο. Εάν θέλετε να συγκρίνετε τις απαντήσεις των μαθητών-περίπτωσης με αυτές της υπόλοιπης τάξης, μπορείτε να βάλετε ένα σταυρό ή άλλο αναγνωριστικό σημάδι στα ερωτηματολόγια των μαθητών-περίπτωσης. Χωρίς να παραβιάζετε την ανωνυμία, μπορείτε να αναγνωρίσετε τα ερωτηματολόγια των μαθητών-περίπτωσης και να συγκρίνετε τις απαντήσεις τους με τις απαντήσεις των άλλων μαθητών της τάξης.

Επεξεργαστείτε τα συμπληρωμένα ερωτηματολόγια για την προετοιμασία του απολογισμού του ερευνητικού μαθήματος.

## 7. Η Συζήτηση Αναστοχασμού μετά από την ολοκλήρωση του μαθήματος

Συναντηθείτε το συντομότερο δυνατό μετά το ερευνητικό μάθημα. Ιδανικά θα κάνετε αυτή τη συζήτηση αμέσως μετά το ερευνητικό μάθημα (και σίγουρα όχι περισσότερο από 24 ώρες μετά). Πιθανό να σας φανούν χρήσιμες τα ακόλουθα χαρακτηριστικά μιας επιτυχημένης συζήτησης μετά το ερευνητικό μάθημα.

- α) Αντιμετωπίστε τη συζήτηση μετά το μάθημα ως μια κοινή ευκαιρία μάθησης
  - β) Κρατήστε θετική στάση απέναντι στις κριτικές απόψεις και εισηγήσεις των άλλων
  - γ) Μελετήστε πιστά τα δεδομένα από την παρατήρηση
  - δ) Να θέσετε ξεκάθαρους στόχους και ερωτήσεις από το σχέδιο μαθήματος/φύλλο παρατήρησης
  - ε) Να καθορίσετε έναν «συντονιστή» της συζήτησης (πιθανό να καθοδηγήσει θετικά την συζήτηση). Αυτός ο ρόλος μπορεί να συνδυαστεί με...
    - στ) Τον ρόλο του τελικού σχολιαστή, ο οποίος θα συνοψίσει τις πληροφορίες/τα συμπεράσματα που προέκυψαν την μάθηση που παράχθηκε από τη συζήτηση, έτσι ώστε να δοθεί σχετική συνέχεια από την ομάδα άλλους και από άλλους εκτός της ομάδας.
- Το πιο σημαντικό είναι να θυμάστε ότι η ροή της ανάλυσης πρέπει να ξεκινά με τις **παρατηρήσεις** σχετικά με τη μάθηση των μαθητών-περίπτωσης, πριν ασχοληθεί η ομάδα με τη διδασκαλία. Αυτό διατηρεί την εστίαση στη μάθηση των μαθητών και μειώνει την τάση οι συζητήσεις παρατήρησης μαθημάτων να γίνονται ανατροφοδότηση στη διδασκαλία (για την οποία οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αισθάνονται ότι είναι επικριτικό από τη φύση του και δεν ευνοεί την επαγγελματική μάθηση). **Προσπαθήστε να ακούσετε ο ένας τον άλλον και να «κτίσετε» πάνω στις ιδέες του άλλου κάνοντας εισηγήσεις, αμφισβητώντας ο ένας τις σκέψεις του άλλου, προβάλλοντας υποθέσεις, δίνοντας λεπτομέρειες κ.λπ.**

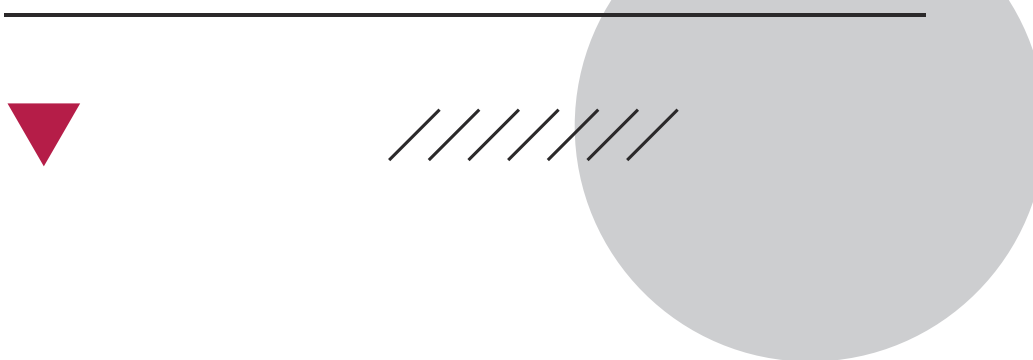
Χρησιμοποιήστε το **Υποβοηθητικό Φύλλο Εργασίας για τη συζήτηση αναστοχασμού (Post Research Lesson Discussion sheet)** σε αυτή τη φάση. Αυτή η λίστα παραθέτει όλες τις πτυχές που αντιμετωπίζονται καλύτερα κατά τη διάρκεια της ενημέρωσης:

- την εξέλιξη των μαθητών-περίπτωσης που παρατηρήθηκε (όπως φαίνεται από τις παρατηρήσεις και τις συνεντεύξεις).
- πιθανές διαφορές και ομοιότητες μεταξύ των μαθητών-περίπτωσης.
- εμπειρίες όλης της τάξης κατά τη διάρκεια του ερευνητικού μαθήματος (και σύγκριση με τις εμπειρίες των μαθητών-περίπτωσης με βάση το ερωτηματολόγιο).
- τα αναμενόμενα αποτελέσματα του ερευνητικού μαθήματος, η προσέγγιση του μαθήματος και πιθανές εκπλήξεις.
- πράγματα που η ομάδα θα ήθελε να κάνει διαφορετικά σε επόμενο ερευνητικό μάθημα.

Μετά το τελευταίο ερευνητικό μάθημα (σε έναν κύκλο Μελέτης Μαθήματος τριών ερευνητικών μαθημάτων), η ομάδα διατυπώνει μια απάντηση (συχνά μερική) στο ερευνητικό ερώτημα και συνοψίζει τι έχει μάθει η ομάδα. Όταν συζητάτε τι έμαθε η ομάδα, μην περιγράψετε απλώς τι συνέβη, αλλά προσπαθήστε να προχωρήσετε περαιτέρω, όσον αφορά την ερμηνεία του τι συνέβη και κυρίως το γιατί. Αυτές οι ιδέες μπορούν να είναι πολύτιμες αφετηρίες για έναν επόμενο κύκλο Μελέτης Μαθήματος. Στη συνέχεια, μπορείτε να βρείτε μια υποδειγματική συζήτηση Μελέτης Μαθήματος τριών εκπαιδευτικών.



Πιο κάτω μπορείτε να βρείτε ένα παράδειγμα μιας «συζήτησης αναστοχασμού» μετά από το ερευνητικό μάθημα μιας ομάδας Μελέτης Μαθήματος σε ένα σχολείο στο Κάμντεν (Camden) του Λονδίνου (Ηνωμένο Βασίλειο). Είναι μια συζήτηση για έναν από τους μαθητές-περίπτωσης, τον Άλεξ, μετά από ένα μάθημα για τον πολλαπλασιασμό.



1	Ράιαν	[Πήρα εγώ σημειώσεις για] τον Άλεξ. Τα πήγε πολύ καλά. Έκανε την «πρακτική δραστηριότητα». Πρώτα τον ρώτησα «Τι σου άρεσε περισσότερο στο μάθημα;». Είπε: «Κύλησε πολύ ομαλά, αν και ήθελα περισσότερη πρόκληση».
2	Γαβριέλλα (δασκάλα τμήματος)	Ναι, βέβαια.
3	Ράιαν	Ρώτησα «Κατάλαβες γιατί η Γαβριέλλα σου ζήτησε να κάνεις την πρακτική δραστηριότητα;» Δεν κατάλαβε γιατί.
4	Άσλεϊ	Είναι δύσκολο. Αυτό που προέκυψε επανειλημμένα μέσα από αυτή τη διαδικασία [της Μελέτης Μαθήματος] είναι ότι πολλά παιδιά, που συνήθως είναι χαμηλής-μεσαίας επίδοσης, θέλουν τόσο πολύ να είναι μεσαίας, μεσαίας-ψηλής επίδοσης, που είναι πρόθυμοι να αναφέρουν οτιδήποτε κατάλαβαν, ακόμα κι αν δεν κατάλαβαν πλήρως. Δεν τους ενδιαφέρει αν κατάλαβαν. Απλά θέλουν να φαίνεται ότι κατάλαβαν.
5	Γαβριέλλα	Ναι, είναι ενδιαφέρον αυτό.
6	Άσλεϊ	Αυτό το κάνει πραγματικά δύσκολο. Επειδή νιώθεις τη διαμάχη ανάμεσα στο 'πρέπει να κάνεις αυτό' και 'όχι εγώ θέλω να κάνω εκείνο'.
7	Ράιαν	Ο Άλεξ δούλεψε πολύ καλά με τη δραστηριότητα και προχώρησε στην «δραστηριότητα-πρόκληση».
8	Γαβριέλλα	Ναι.
9	Άσλεϊ	Το θυμάμαι αυτό.
10	Ράιαν	...που ήταν εξαιρετικό. Και νομίζω ένωσε καλά [με τον εαυτό του].
11	Άσλεϊ	Άρα αυτό είναι κατόρθωμα σωστά; (Σημ: αναφέρεται στο workbook)
12	Ράιαν	Και ήταν πολύ – συγκριτικά με το χθεσινό μάθημα - ήταν πάρα πολύ ενθουσιασμένος.
13	Άσλεϊ	Άρα ξεπέρασε τις προσδοκίες μας; (Σημ: αναφέρεται στο workbook)
14	Ράιαν	Ναι τις ξεπέρασε.
15	Άσλεϊ	Όπως και ο Τζέιμς. [Σημ: ένας άλλος μαθητής περίπτωση]
16	Γαβριέλλα	Ναι υποτιμήσαμε τις δυνατότητες και των δύο.
17	Άσλεϊ	Ναι.
18	Ράιαν	Κάτι που ήταν έκπληξη – θυμάστε που είπαμε ότι θα διπλασιάζει ξανά και ξανά στην αρχή γιατί του αρέσει να διπλασιάζει;
19	Άσλεϊ και Γαβριέλλα	Ναι.
20	Ράιαν	Συνειδητοποίησα ότι χρησιμοποιεί τη λέξη «διπλασιάζω» αντί για «πολλαπλασιάζω». Για παράδειγμα λέει «θα διπλασιάσω το δύο με το τρία για να έχω έξι».
21	Γαβριέλλα	Α, αυτό είναι πολύ ενδιαφέρον.
22	Ράιαν	Και του λέω «εννοείς θα πολλαπλασιάσεις το δύο με το τρία για να έχω έξι». Και είπε «ναι, ναι». Μετά όμως έκανε το ίδιο λάθος. Οπότε απλά έχε το υπόψη σου Γαβριέλλα.
23	Γαβριέλλα	Ναι είναι χρήσιμο να το γνωρίζω αυτό.
24	Ράιαν	Του λέω «ξέρεις τι είναι το διπλασιάζω»;

25	Άσλεϊ	Ποιος είπε, στην αρχή ή στο τέλος, όταν μιλούσαμε για αναλογίες «είναι όταν διπλασιάζουμε έναν αριθμό». Και του λέω «πάντα τον διπλασιάζουμε;» Και απάντησε «όχι απαραίτητα». Και είπα το διπλασιάζουμε εδώ γιατί... κάποιος άλλος το είπε στην αρχή.
26	Γαβριέλλα	Ναι.
27	Άσλεϊ	Και τους λέω «δηλαδή πάντα διπλασιάζουμε», γιατί κάποτε διαιρούμε. Οπότε και κάποιος άλλος [το ανέφερε].
28	Γαβριέλλα	Ίσως δώσαμε πολλά παραδείγματα διπλασιασμού.
29	Άσλεϊ	...που χρειάστηκε να διπλασιάσουν.
30	Ράιαν	Ναι πιθανόν.
31	Γαβριέλλα	Αυτό είναι καλό να το γνωρίζουμε.

Τα αποσπάσματα δείχνουν πώς οι δάσκαλοι (Ράιαν και Άσλεϊ) συνδύασαν πληροφορίες από τις παρατηρήσεις τους και συνειδητοποίησαν (π.χ. Γαβριέλλα, γραμμή 28) ότι η διδασκαλία συμπεριελάμβανε πάρα πολλά παραδείγματα διπλασιασμού, έτσι οι μαθητές μπέρδεψαν τη λέξη «πολλαπλασιάζω» με την λέξη «διπλασιασμός».

Ο σχεδιασμός του επόμενου ερευνητικού μαθήματος εμπίπτει εκτός της συζήτησης αναστοχασμού, αλλά μπορεί να γίνει μετά το ερευνητικό μάθημα. Ο διαχωρισμός μεταξύ της σύνοψης και του σχεδιασμού του επόμενου ερευνητικού μαθήματος θα πρέπει να διασφαλίζει ότι η ομάδα θα πρέπει πρώτα να κάνει τις απαραίτητες συζητήσεις για να αποκτήσει μια πλήρη εικόνα του αντίκτυπου του ερευνητικού μαθήματος στους μαθητές-περίπτωσης. Η ομάδα μπορεί στη συνέχεια να κάνει τις απαραίτητες προσαρμογές για το επόμενο ερευνητικό μάθημα.

Η συζήτηση αναστοχασμού του ερευνητικού μαθήματος θα δώσει αναμφίβολα ιδέες για πιθανές προσαρμογές του ερευνητικού μαθήματος. Ο στόχος αυτών των προσαρμογών είναι να πραγματοποιηθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα για τους μαθητές-

περίπτωσης (αλλά και άλλους μαθητές της τάξης) ακόμη καλύτερα σε σχέση με το ερευνητικό ερώτημα. Μια πιθανή κύρια ερώτηση είναι: «Σε ποιες περιοχές των μαθηματικών και/ή στιγμές του μαθήματος μπορεί η μάθηση των μαθητών περίπτωσης να βελτιωθεί περαιτέρω;»

Στις επόμενες φάσεις, το (τροποποιημένο) ερευνητικό μάθημα διδάσκεται και παρατηρείται και πάλι, γίνεται συνέντευξη από τους μαθητές περίπτωσης και στη συνέχεια συζητείται το μάθημα. Μια Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος (βλ. επίσης εικόνα σελ. 36) αποτελείται από τρία ερευνητικά μαθήματα για τα οποία γίνεται συζήτηση στο τέλος κάθε μαθήματος. Στο τέλος μιας Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος γίνεται μια συνολική αξιολόγηση.



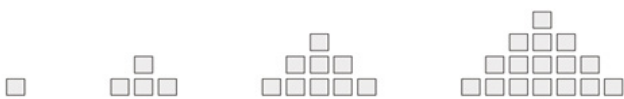


## Εργασία για τους εκπαιδευτικούς

Διαβάστε το παράδειγμα και συζητήστε τις παρακάτω ερωτήσεις με την ομάδα σας Μελέτης Μαθήματος. Προσπαθήστε να σκεφτείτε με τον ίδιο τρόπο την επιλογή των εργασιών σας για το ερευνητικό μάθημα, τις ενέργειες που προάγουν τον μαθηματικό συλλογισμό, και την συνεργασία εκπαιδευτικών.

### Παράδειγμα:

Ο Εκπαιδευτικός 1 (E1) έδωσε στους μαθητές του (Α' Γυμνασίου) τις πιο κάτω σχηματικές αναπαραστάσεις και τους ζήτησε να βρουν τον αριθμό των τετραγώνων που θα είχε το Μοτίβο 5, το Μοτίβο 10 και να εξηγήσουν το σκεπτικό τους χρησιμοποιώντας το σχήμα.



Οι εκπαιδευτικοί μοιράζονται εμπειρίες κατά τη χρήση/τροποποίηση του έργου. Στο φύλλο εργασίας, ο εκπαιδευτικός έδωσε κάποιες οδηγίες για να τους βοηθήσει να χρησιμοποιήσουν το τετράγωνο που απεικονίζει το μοτίβο  $n^2$ .

Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες, με τον E1 και την συνάδελφό του (E2) να επισκέπτονται τις ομάδες και να υποστηρίζουν τους μαθητές, αποφεύγοντας όμως να αποκαλύψουν τις απαντήσεις. Η E2 είναι καθηγήτρια μαθηματικών στο ίδιο σχολείο. Ήταν εκεί για να διεξάγει την παρατήρηση του μαθήματος του E1 και επίσης να υποστηρίξει τους μαθητές μαζί με τον E1.



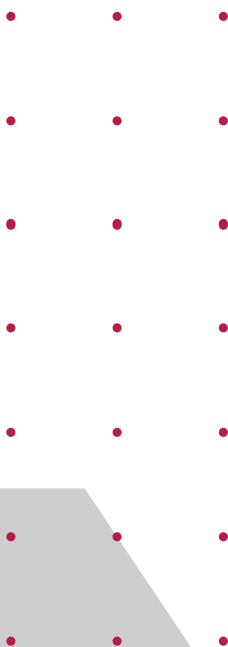
Μετά το μάθημα οι δύο εκπαιδευτικοί συζητήσαν τι έγινε στο μάθημα και έδειχναν και οι δύο ικανοποιημένοι με τη δουλειά των μαθητών αλλά όχι με τον τρόπο που οι μαθητές εξέφραζαν τις σκέψεις τους και τον συλλογισμό τους. Οι εκπαιδευτικοί συμφώνησαν ότι οι μαθητές δεν ήταν πρόθυμοι να εξηγήσουν διεξοδικά το σκεπτικό τους και το απέδωσαν στην έλλειψη συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης. Δύο μέρες αργότερα, η E2 δίδαξε το μάθημα στην τάξη της, με τον E1 να είναι παρόν για σκοπούς παρατήρησης μαθήματος και υποστήριξης. Η κύρια αλλαγή που έκανε η E2 ήταν η ευκαιρία για συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης μετά από κάθε φάση του έργου. Ζητήθηκε ρητά από τους μαθητές να επιδείξουν τις λύσεις και το σκεπτικό τους.

Ερωτήσεις:

- Τι πιστεύετε για τα έργα (tasks) που χρησιμοποίησαν ο E1 και η E2; Πώς προωθούν τον μαθηματικό συλλογισμό;
- Τι πιστεύεις ότι θα μπορούσες να αλλάξεις; Γιατί;
- Αν ήσασταν στο μάθημα του E1, πού θα θέλατε να εστιάσετε την παρατήρησή σας; Γιατί πιστεύετε ότι αυτό είναι σημαντικό;
- Έχετε εμπειρία στην παρακολούθηση του μαθήματος άλλων ή στην παρατήρηση του δικού σας μαθήματος από άλλους; Ποια πιστεύετε ότι είναι η αξία της παρατήρησης από συναδέλφους; Ποιες είναι οι δυσκολίες;
- Από τις πληροφορίες που παρέχονται, ποιες διδακτικές ενέργειες θα μπορούσατε να αναλάβετε α) για να διερευνήσετε τον μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών και β) για να διευκολύνετε τον μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών;

## 8. Η Συνολική Αξιολόγηση

Στο τέλος κάθε Μελέτης Ερευνητικού Μαθήματος, η ομάδα αναλογίζεται την όλη διαδικασία και τα δεδομένα που συλλέχθηκαν. Αυτός ο αναστοχασμός είναι απαραίτητος προκειμένου να γίνει το βήμα από την απλή ανταλλαγή εμπειριών σε μια πιο ολοκληρωμένη κατανόηση της πρακτικής: από το «τι» και «πώς» λειτουργεί κάτι με τους μαθητές-περίπτωσης στο «γιατί» κάτι λειτουργεί. Το αποτέλεσμα αυτής της ώρας αναστοχασμού μπορεί να βοηθήσει στον προσδιορισμό της εστίασης και της ατζέντας μιας επόμενης Μελέτης Ερευνητικού Μαθήματος (σε περίπτωση που προγραμματίζονται πολλαπλές Μελέτες Μαθήματος). Κατά τη διάρκεια αυτής της γενικής αξιολόγησης, η ομάδα στοχάζεται επίσης σχετικά με το τι έχει μάθει κατά τη διάρκεια της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος και τι σημαίνουν αυτές οι γνώσεις για την ευρύτερη πρακτική στην τάξη. Το **Έντυπο Συνολικής Αξιολόγησης (Overall Assessment Sheet)** περιέχει καθοδηγητικές ερωτήσεις για τη γενική αξιολόγηση. Αυτό το ερωτηματολόγιο ρωτά για τη συνεργασία, τα δυνατά σημεία και τις αδυναμίες στους διαφορετικούς κύκλους της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος, τα μαθησιακά οφέλη και τις συνέπειες της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος. Ένα ασφαλές (μαθησιακό) κλίμα είναι απαραίτητο για να υπάρξει αυτή η αξιολόγηση. Είναι σημαντικό όλοι να σέβονται ο ένας τον άλλον και να εκτιμώνται όλες οι συνεισφορές. Είναι βασικό οι εκπαιδευτικοί να είναι σε θέση να μοιράζονται ιδέες, ανησυχίες, προκλήσεις και ερωτήματα χωρίς να φοβούνται την κριτική. Θα πρέπει να ενεργούν ως «κριτικοί φίλοι» μεταξύ τους. Αυτός ο τρόπος ομιλίας και συζήτησης οδηγεί σε πιο παραγωγικές συζητήσεις.



## 9. Διάδοση της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος σε μαθητές και συναδέλφους

Μετά την ολοκλήρωση της τελευταίας Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος, μοιραστείτε με τους μαθητές σας όσα ανακαλύψατε με την Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος και πάρτε τις απόψεις τους.

Από την αρχή, προσπαθήστε να βρείτε μια ευκαιρία για την ομάδα σας να μοιραστεί άλλους συναδέλφους τι έχετε κάνει και μάθει με την ολοκλήρωση της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος, ειδικότερα σε σχέση με την διδακτική/παιδαγωγική προσέγγιση που αναπτύσσεται. Είναι σημαντικό η ομάδα να γνωρίζει εκ των προτέρων ότι θα μοιραστεί τα ευρήματά της με άλλους ώστε να το έχουν τα μέλη της υπόψη τους καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας. Αυτό βοηθά την ομάδα Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος να εκφράσει τις σκέψεις της και τα ευρήματά της με ξεκάθαρο τρόπο και έτσι να μπορούν να γίνουν εύχρηστα και αξιοποιήσιμα και από άλλους. Τα αποσπάσματα βίντεο από τα ερευνητικά μαθήματα και οι ψηφιακές φωτογραφίες που είναι ενσωματωμένες σε παρουσιάσεις PowerPoint είναι ένας δημοφιλής τρόπος διάδοσης της πρακτικής και των διαδικασιών του μαθήματος. (Θα πρέπει να διασφαλίσετε ότι έχετε εφαρμόσει μια σχολική πολιτική σχετικά με τη χρήση βίντεο και φωτογραφιών). Φροντίστε τα μέλη της ομάδας Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος να έχουν ευκαιρίες να συνεργαστούν με άλλους εκπαιδευτικούς, προκειμένου να βοηθήσουν στην καθοδήγηση της παιδαγωγικής προσέγγισης που έχουν εξελίξει, προσαρμόσει ή τελειοποιήσει. Να θυμάστε ότι η άρθρωση και η επεξήγηση της πρακτικής:

- α) βοηθά όσους μαθαίνουν από τους συναδέλφους τους να βελτιώσουν την πρακτική τους
- β) βελτιώνει την απόδοση του ατόμου που κάνει την εξήγηση ή την καθοδήγηση.

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι καθιστά ορατή τη «κρυφή» γνώση της πρακτικής που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί αλλά δεν εκφράζουν ποτέ. Με αυτό τον τρόπο οι εκπαιδευτικοί αποκτούν μεγαλύτερη επίγνωση της γνώσης τους και επομένως μπορούν να τη βελτιώσουν περαιτέρω. Θα πρέπει να εκτιμήσετε ότι έχετε μάθει και μοιραστεί. Δημιουργήστε έναν «τοίχο μάθησης» στην αίθουσα προσωπικού όπου μια ομάδα Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος μπορεί να εμφανίσει τη δουλειά της – φωτογραφίες, σημειώσεις, παρατηρήσεις, αποτελέσματα συζήτησης, συνεντεύξεις μαθητών και αρχικά συμπεράσματα. Κάτι τέτοιο μπορεί να δώσει αφορμές για συζητήσεις στην αίθουσα προσωπικού σχετικά με την επαγγελματική μάθηση.

Ορισμένες ομάδες Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος παρουσιάζουν τις τεχνικές που αναπτύσσουν σε άλλους εκπαιδευτικούς σε ένα ανοιχτό ερευνητικό μάθημα. Το μάθημα αυτό διδάσκεται σε προσκεκλημένους παρατηρητές. Μπορεί να ακολουθήσει μια παραγωγική συζήτηση που θα περιλαμβάνει μαθητές αλλά και ενήλικες. Όταν μια Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος αποκαλύπτει κάποιες πολύ σημαντικές γνώσεις πρακτικής, ένα σχολείο μπορεί να ανοίξει την εκδήλωση σε προσκεκλημένους επισκέπτες από άλλα σχολεία, πανεπιστήμια ή τοπικές αρχές. Μετά το σχολείο μπορεί να διδαχθεί ως «δημόσιο ερευνητικό μάθημα».

## Άδεια έντυπα



## Πρωτόκολλο Μάθησης της ομάδας Μελέτης Μαθήματος

Αυτό το πρωτόκολλο αναπτύχθηκε από

Σε όλα τα στάδια αυτής της Μελέτης Μαθήματος θα ενεργούμε σύμφωνα με τα ακόλουθα:

Υπογραφή και ημερομηνία από τα μέλη της ομάδας Μελέτης Μαθήματος.

## Πίνακας Επισκόπησης της Μελέτης Μαθήματος

Όνόματα των εκπαιδευτικών της ομάδας  
Μελέτης Μαθήματος

Έγκριση του πρωτοκόλλου Ερευνητικής  
Μελέτης Μαθήματος; Ν/Ο

Έτος

Αριθμός μαθητών τάξης

Σύνολο; Ομοιογενής τάξη/ Τάξη μεικτής ικανότητας

Συνήθειες εκπαιδευτικοί της τάξης;

Σε ποιες ανάγκες των μαθητών περίπτωσης που  
σχετίζονται με τη διδασκαλία θέλετε να εστιάσετε  
σε αυτή την Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος;

Μαθηματική εστίαση, γενικός στόχος και εστίαση  
των ερευνητικών μαθημάτων

Ποια κριτήρια χρησιμοποιήσατε για την επιλογή  
των τριών μαθητών περίπτωσης;

Ποιοι είναι οι μαθητές περίπτωσης (ανά τάξη);

Ποιες είναι οι ανάγκες των μαθητών περίπτωσης;

### Ερευνητικό ερώτημα;

ΧΥΖ-Ερευνητικό ερώτημα [προαιρετικό]:

Ήθελουμε να μάθουμε ποια επίδραση έχει η  
εκπαιδευτική πρακτική Χ στα μαθησιακά αποτελέσματα  
Ζ των μαθητών περίπτωσης και ποιοι άλλοι παράγοντες  
Υ, αν υπάρχουν, επηρεάζουν τα αποτελέσματα αυτά;

Εκπαιδευτική πρακτική (Χ):

Μαθησιακά αποτελέσματα στους μαθητές περίπτωσης -  
τι θέλουμε να πετύχουμε; (Ζ):

Παράγοντες που μπορεί να παίζουν ρόλο σε αυτό (Υ):

Ημερομηνία, ώρα και μαθησιακός στόχος για το  
ερευνητικό μάθημα 1

Ημερομηνία, ώρα και μαθησιακός στόχος για το  
ερευνητικό μάθημα 2

Ημερομηνία, ώρα και μαθησιακός στόχος για το  
ερευνητικό μάθημα 3

## Φύλλο σχεδιασμού και παρατήρησης ερευνητικού μαθήματος

1/3

Τάξη:

Θέμα:

Ημερομηνία &amp; Ώρα:

Ερευνητικό ερώτημα:

Προσπαθήστε να διαμορφώσετε όσο το δυνατόν περισσότερο εστιασμένο το ερευνητικό σας ερώτημα.

**Σύνοψη της υπόθεσής μας σχετικά με το πώς η διδασκαλία μας διευκολύνει  
τον μαθηματικό συλλογισμό:**

Ακολουθώντας διδακτική προσέγγιση (X)

οι μαθητές (περίπτωσης) θα

Παράγοντες που μπορεί να  
επιηρεάσουν θετικά/αρνητικά (Y)

Ανάγκες των μαθητών περίπτωσης  
προκειμένου να αναπτύξουν  
μαθηματικό συλλογισμό

Διδακτική προσέγγιση (X)

Αναμενόμενα μαθησιακά  
αποτελέσματα (Z)

Δείτε επίσης το κεφάλαιο 'Καθορισμός ερευνητικού στόχου και προσδιορισμός των μαθητών περίπτωσης'

Μαθησιακός στόχος (περιεχόμενο)

Μαθησιακός στόχος (μαθηματικός συλλογισμός)

Έργο:

## Φύλλο σχεδιασμού και παρατήρησης ερευνητικού μαθήματος

Στοχευμένες ερωτήσεις

- 
- 
- 

Ποια μαθησιακή συμπεριφορά θα επιλέξετε να παρατηρήσετε που δείχνει την επιθυμητή κατανόηση ή τον επιθυμητό μαθηματικό συλλογισμό;

Μέσα για τη συλλογή τεκμηρίων

- Σύντομο ερωτηματολόγιο
  Παρατηρήσεις
  Στοχευμένες ερωτήσεις
  Συνεντεύξεις ή κάρτες εξόδου
  Άλλο:

Ακολουθία μαθημάτων (δείτε επίσης την επόμενη σελίδα):

Φάση & χρόνος	Διδακτική προσέγγιση	Εκπαιδευτική δραστηριότητα μαθητών

**Μαθητές περίπτωσης:**

Γνώσεις, δεξιότητες και συμπεριφορές των μαθητών περίπτωσης (πριν τη διδασκαλία).  
Ποιες ανάγκες έχει αυτός ο μαθητής;

Μαθητής περίπτωσης 1	Μαθητής περίπτωσης 2	Μαθητής περίπτωσης 3
Δυνατά σημεία: <ul style="list-style-type: none"> <li>•</li> <li>•</li> <li>•</li> </ul> Μαθησιακές ανάγκες: <ul style="list-style-type: none"> <li>•</li> <li>•</li> </ul>	Δυνατά σημεία: <ul style="list-style-type: none"> <li>•</li> <li>•</li> <li>•</li> </ul> Μαθησιακές ανάγκες: <ul style="list-style-type: none"> <li>•</li> <li>•</li> </ul>	Δυνατά σημεία: <ul style="list-style-type: none"> <li>•</li> <li>•</li> <li>•</li> </ul> Μαθησιακές ανάγκες: <ul style="list-style-type: none"> <li>•</li> <li>•</li> </ul>

## Φύλλο σχεδιασμού και παρατήρησης ερευνητικού μαθήματος

3/3

Φάση 1 της Ακολουθίας Μαθημάτων	Εκπαιδευτική δραστηριότητα μαθητών:
A Μαθητής περίπτωσης:	Αναμενόμενη απάντηση/συμπεριφορά
B Μαθητής περίπτωσης:	Παρατηρούμενη απάντηση/προσδιορισμός κρίσιμων συμβάντων
Γ Μαθητής περίπτωσης:	
Φάση II της Ακολουθίας Μαθημάτων	Εκπαιδευτική δραστηριότητα μαθητών:
A Μαθητής περίπτωσης:	Αναμενόμενη απάντηση/συμπεριφορά
B Μαθητής περίπτωσης:	Παρατηρούμενη απάντηση/προσδιορισμός κρίσιμων συμβάντων
Γ Μαθητής περίπτωσης:	
Φάση ... της Ακολουθίας Μαθημάτων	Εκπαιδευτική δραστηριότητα μαθητών:
A Μαθητής περίπτωσης:	Αναμενόμενη απάντηση/συμπεριφορά
B Μαθητής περίπτωσης:	Παρατηρούμενη απάντηση/προσδιορισμός κρίσιμων συμβάντων
Γ Μαθητής περίπτωσης:	
Μαθησιακά αποτελέσματα μαθητών περίπτωσης (Μετά το τέλος του μαθήματος)	Επιτεύχθηκε το επιθυμητό μαθησιακό αποτέλεσμα; Ναι/Όχι Πώς το ξέρετε;
A Μαθητής περίπτωσης:	Τι μπόρεσαν να κάνουν; (Τι πρόοδο σημείωσαν και πώς το ξέρετε.)
B Μαθητής περίπτωσης:	
Γ Μαθητής περίπτωσης:	
Αρχικές σκέψεις, ιδέες, αναστοχασμοί	

## Φύλλο Σύντομου Ερωτηματολογίου για Όλους Τους Μαθητές

Διαβάστε προσεκτικά κάθε πρόταση και κυκλώστε αυτό που ταιριάζει.

1 Διαφωνώ Απόλυτα	2 Διαφωνώ	3 Συμφωνώ	4 Συμφωνώ Απόλυτα
1. Βρήκα ενδιαφέροντα τα μαθηματικά έργα/ασκήσεις.	1	2	3 4
2. Συνεργάστηκα καλά κατά τη διάρκεια αυτών των μαθηματικών έργων.	1	2	3 4
3. Είχα κίνητρο κατά την επίλυση των μαθηματικών έργων.	1	2	3 4
4. Αισθάνομαι ότι έμαθα από την επίλυση αυτών των μαθηματικών έργων/ασκήσεων.	1	2	3 4
5. Ένωθα πρόκληση κατά την επίλυση αυτών των μαθηματικών έργων.	1	2	3 4
6. Άλλες παρατηρήσεις σχετικά με το συγκεκριμένο μάθημα.	1	2	3 4

### Σύντομο Ερωτηματολόγιο Για Όλους Τους Μαθητές - Φύλλο Βαθμολογίας

ΤΑΞΗ 1 Μαθητές:	Διαφωνώ Απόλυτα	Διαφωνώ	Συμφωνώ	Συμφωνώ Απόλυτα
1. Βρήκα ενδιαφέροντα τα μαθηματικά έργα/ασκήσεις.				
2. Συνεργάστηκα καλά κατά τη διάρκεια αυτών των μαθηματικών έργων.				
3. Είχα κίνητρο κατά την επίλυση των μαθηματικών έργων.				
4. Αισθάνομαι ότι έμαθα από την επίλυση αυτών των μαθηματικών έργων/ασκήσεων.				
5. Ένωθα πρόκληση κατά την επίλυση αυτών των μαθηματικών έργων.				
6. Άλλες παρατηρήσεις σχετικά με το συγκεκριμένο μάθημα.				

## Φύλλο Κάρτας Εξόδου Για Όλους Τους Μαθητές

Αφιερώστε λίγα λεπτά για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις.

Ημερομηνία:

Ομάδα:

Όνομα μαθητή:

1. Επιλέξτε τη φατσούλα που περιγράφει καλύτερα τη συνολική σας αίσθηση για τη δουλειά σας σήμερα



Εξηγήστε γιατί επιλέξατε αυτή τη φατσούλα:

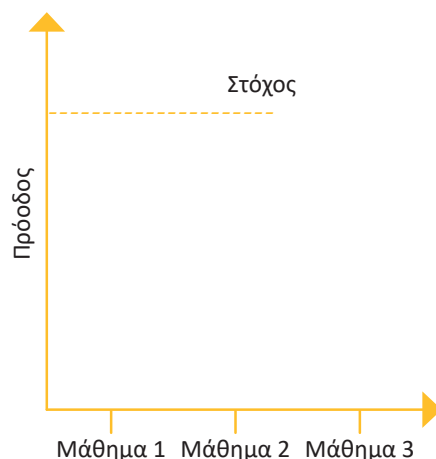
2. Περιγράψτε: (α) πάνω σε τι εργαστήκατε σήμερα και (β) τι πρόοδο σημειώσατε.

3. Περιγράψτε: (α) ποια δραστηριότητα σας άρεσε περισσότερο σήμερα και (β) για ποιο λόγο σας άρεσε.

4. Περιγράψτε: (α) το σημαντικότερο εμπόδιο/δυσκολία που αντιμετωπίσατε σήμερα και (β) πώς το αντιμετωπίσατε.

5. (Προαιρετικά) Στους παρακάτω άξονες, σκιαγραφήστε πώς έχετε προχωρήσει προς τον στόχο σας μέχρι τώρα.

Εξηγήστε με λίγες λέξεις.



## «Έντυπο Συνέντευξης» με την ολοκλήρωση του μαθήματος (Post Research Lesson Interview Sheet)

**Τάξη:**

**Ημερομηνία:**

**Ώρα:**

Μαθητής/ές περίπτωσης:

Ερωτήσεις	Σημειώσεις συνέντευξης
Τι σου άρεσε περισσότερο σε αυτό το μάθημα; Γιατί;	
Τι έμαθες; Τι μπορείς να κάνεις τώρα που δεν μπορούσες να κάνεις πριν;	
Ποια πτυχή της διδασκαλίας λειτούργησε καλύτερα για σένα; Γιατί;	
Τι θα μπορούσαμε να κάνουμε (διαφορετικά) την επόμενη φορά που θα διδάξουμε αυτό το μάθημα σε παρόμοια τάξη; Γιατί θα άλλαζες την πτυχή αυτή;	
Άλλες ερωτήσεις, κυρίως για το ερευνητικό μάθημα.	



## Υποβοηθητικό Φύλλο Εργασίας για τη συζήτηση αναστοχασμού (Post Research Lesson Discussion sheet)

Please take a few minutes to answer the questions below.

Τάξη:

Θέμα:

Ημερομηνία & Ώρα:

Κυκλώστε την σωστή επιλογή: ερευνητικό μάθημα 1 - ερευνητικό μάθημα 2 - ερευνητικό μάθημα 3

Επαναλάβετε το ερευνητικό σας ερώτημα:

Διαβάστε το φύλλο σχεδιασμού και παρατήρησης του ερευνητικού μαθήματος, το Έντυπο Συνέντευξης» (μετά την ολοκλήρωση του μαθήματος) και, εάν είναι δυνατόν τα αποτελέσματα του σύντομου ερωτηματολογίου/εισιτηρίου εξόδου, για να απαντήσετε στις ακόλουθες ερωτήσεις

**Αναστοχασμός της μαθησιακής διαδικασίας μάθησης μαθητών:**

1. Τι πρόοδο σημείωσε ο κάθε μαθητής; Αντιμετωπίστηκε η μαθησιακή του ανάγκη; Ήταν αρκετό αυτό;

Τάξη 1	
Μαθητής περίπτωσης Α:	
Μαθητής περίπτωσης Β:	
Μαθητής περίπτωσης Γ:	
Τάξη 2 (προαιρετικά)	
Μαθητής περίπτωσης Α:	
Μαθητής περίπτωσης Β:	
Μαθητής περίπτωσης Γ:	
Τάξη 3 (προαιρετικά)	
Μαθητής περίπτωσης Α:	
Μαθητής περίπτωσης Β:	
Μαθητής περίπτωσης Γ:	

## Υποβοηθητικό Φύλλο Εργασίας για τη συζήτηση αναστοχασμού (Post Research Lesson Discussion sheet)

2. Ποιες διαφορές ή ομοιότητες βρίσκουμε μεταξύ των μαθητών περίπτωσης;

3. Τι συμβαίνει με άλλους μαθητές από τις υπο-ομάδες μαθητών που αντιπροσωπεύουν;

4. Πώς οι διδακτικές σας προσεγγίσεις βοήθησαν ή εμπόδισαν την μάθηση των μαθητών; (ίσως λίγο και από τα δύο)

5. Κάποιοι μαθητές επωφελήθηκαν περισσότερο/λιγότερο από τις διδακτικές μας προσεγγίσεις; Γιατί / Γιατί όχι;

6. Τι εκπλήξεις υπήρχαν; (προαιρετικά)

7. Μάθαμε κάτι αξιοσημείωτο για τον τρόπο που μάθαιναν;

### Αναστοχασμός της διδακτική σας προσέγγισης:

Επανεξετάστε την υπόθεσή σας σχετικά με τη διδακτική σας προσέγγιση από τον σχεδιασμό του ερευνητικού μαθήματος της Έρευνας και το έντυπο παρατήρησης. Αναφερθείτε όσο το δυνατόν πιο πολύ στην ανάλυσή σας για τη μάθηση των μαθητών στην προηγούμενη σελίδα

1. Η υπόθεσή σας για τη διδακτική προσέγγιση (X) οδήγησε στα επιθυμητά αποτελέσματα (Z); Γιατί; Γιατί όχι;

2. Σκεφτείτε τους παράγοντες επιρροής (Y). Έχουν αποδειχθεί σχετικές; Πώς; Ποιοι άλλοι παράγοντες αποδείχτηκαν επίσης σχετικοί;

3. Ποιες πτυχές διδακτικής της διδακτικής σας προσέγγισης θα μπορούσαν να εφαρμοστούν για την επόμενη φορά για να βελτιωθεί η πρόοδος των μαθητών-περίπτωσης και όλων των μαθητών; Γιατί; Ποιες διδακτικές προσεγγίσεις θα μπορούσατε να έχετε επιλέξει για να καταλήξετε στα επιθυμητά αποτελέσματα (Z), ίσως με καλύτερο τρόπο;

4. Τι θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε την επόμενη φορά; Γιατί; Συμφωνήστε για τη διδακτική προσέγγιση που θα επιλέξετε.

## Υποβοηθητικό Φύλλο Εργασίας για τη συζήτηση αναστοχασμού (Post Research Lesson Discussion sheet)

### Αναστοχασμός σχετικά με τα μέσα συλλογής στοιχείων για τη μάθηση μαθητών:

Ερωτήσεις που πρέπει να απαντηθούν μετά το ερευνητικό μάθημα 1 και 2:

1. Έχουμε αρκετά στοιχεία για να απαντήσουμε στις ερωτήσεις μας; Γιατί / Γιατί όχι;

2. Χρειάζεται να αναθεωρήσουμε την αξιολόγηση κάποιου μαθητή; Γιατί;

3. Κάντε μια συμφωνία για το πώς να κάνετε την αξιολόγηση για τα επόμενα ερευνητικά σας μαθήματα:

### Αναστοχασμός για τη διαδικασία της Μελέτης Μαθήματος:

Ερωτήσεις που πρέπει να απαντηθούν μετά το ερευνητικό μάθημα 3:

1. Ποια είναι τα αποτελέσματα της εκπαιδευτικής πρακτικής που χρησιμοποιήθηκε και ποιοι παράγοντες (ενδεχομένως) έπαιξαν ρόλο;

2. Τι μάθαμε κατά την διάρκεια αυτής της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος σχετικά με την διδασκαλία των μαθητών-περίπτωσης; Τι λειτουργεί και τι όχι; Γιατί;

## Έντυπο Συνολικής Αξιολόγησης (Overall assessment sheet)

1. Γενική συνεργασία στην ομάδα: Τι μας άρεσε στη συνεργασία κατά τη διάρκεια αυτής της Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος; Θέλουμε να δούμε τα πράγματα διαφορετικά; Με ποιους τρόπους συνέβαλε ή όχι η συνεργασία μέσα στην ομάδα μας στη μάθησή μας;

2. Πρόοδος Ερευνητικής Μελέτης Μαθήματος στην ομάδα μας:

	Τι πήγε καλά; Γιατί;	Τι δεν πήγε καλά; Γιατί;	Τι θέλουμε να κάνουμε διαφορετικά; Γιατί;
Καθορισμός ερευνητικού στόχου και εντοπισμός των μαθητών-περίπτωσης			
Σχεδιασμός ερευνητικού μαθήματος			
Διδασκαλία / Παρατήρηση κατά τη διάρκεια των ερευνητικών μαθημάτων			
Συνεντεύξεις μαθητών-περίπτωσης			
Σύντομο ερωτηματολόγιο / εισιτήριο εξόδου (προαιρετικό)			
Συζήτηση αναστοχασμού μετά από την ολοκλήρωση του μαθήματος			

Αν ισχύει: Υπάρχουν προσωπικά γεγονότα ή παράγοντες που έπαιξαν ρόλο στην Ερευνητική Μελέτη Μαθήματος;

3. Ποια ήταν τα κύρια πράγματα που ανακαλύψατε σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές έμαθαν μαθηματικά;

Με ποιους τρόπους αυτό θα αλλάξει τη διδασκαλία σας στο μέλλον;

4. Ποια ήταν τα κύρια πράγματα που μάθατε για τους μαθητές που δεν σας ήταν τόσο ξεκάθαρα πριν;

## Έντυπο Συνολικής Αξιολόγησης (Overall assessment sheet)

Με ποιους τρόπους αυτό θα ενημερώσει την μελλοντική σας πρακτική;

5. Τι άλλο έχετε μάθει σχετικά με τη διδασκαλία ή την μάθηση που δεν αποτυπώθηκαν στην ερώτηση 3 ή 4;

Πώς αυτό θα αλλάξει την διδασκαλία σας στο μέλλον;

6. Υπάρχουν συνέπειες για το αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών, την αξιολόγηση ή την παιδαγωγική μέθοδο;

7. Ποια σημαντική γνώση θα μοιραστείτε με τους συναδέλφους σας στο σχολείο και στα πλαίσια του προγράμματος;

## Βιβλιογραφικές αναφορές

- Amador, J. M., & Carter, I. S. (2018). Audible conversational affordances and constraints of verbalizing professional noticing during prospective teacher lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21, 5-34. <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9347-x>
- Australian Academy of Science (AAS). (2018). reSolve: maths by inquiry, <https://www.resolve.edu.au/>.
- Barnes, D. (2008). Exploratory talk for learning. In N. Mercer & S. Hodgkinson (Eds.). *Exploring talk in school: Inspired by the work of Douglas Barnes*. (pp.1-16). SAGE Publications Ltd. <https://dx.doi.org/10.4135/9781446279526.n1>
- Battista, M. T. (2016). Mathematical reasoning and sense making. In *Reasoning and sense making in the mathematics classroom: Pre-K–Grade 2*. (pp. 1- 26). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.
- Bergqvist, T., & Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *Journal of Mathematical Behavior*, 31, 252–269.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412–446.
- Boaler, J. (2010). *The elephant in the classroom. Helping children learn & love maths*. Souvenir Press: London. UK Edition of What's Math Got To Do With It.
- Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets. Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Bodvin, K., et al. (2020). *Lesson Study: Samen de klaspraktijk voor leerlingen verbeteren [Lesson Study: improving educational practices for students]*. Leuven, Belgium: Acco Uitgeverij.
- Boston, M. D., & Smith, M. S. (2009). Transforming Secondary Mathematics Teaching: Increasing the Cognitive Demands of Instructional Tasks Used in Teachers' Classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 119-156. <https://doi.org/10.2307/40539329>
- Brodie, K. (2009). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms (Vol. 775)*. Springer Science & Business Media.
- Cheung, W., & Wong, W. (2014). Does Lesson Study work?: A systematic review on the effects of Lesson Study and Learning Study on teachers and students. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 3(2), 137-149. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-05-2013-0024>
- Clarke, D. M., Clarke, D. J., & Sullivan, P. (2012). Reasoning in the Australian curriculum: Understanding its meaning and using the relevant language. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 17(3), 28–32.
- Davidson, A., Herbert, S., & Bragg, L. A. (2019). Supporting elementary teachers' planning and assessing of mathematical reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(6), 1151-1171.
- De Bruijn, I, van der Eijk, E., Greefkens, S., Kok, D., Manintveld, J., Nannings, S., van Proosdij, Gerard, Roll, C., Schaberg, G., Schippers, M., Sinkeldam, R., Smeenk–van Broekhoven, G. (2018). *Modern Mathematics. 2B vwo (12ed.)*. Groningen, the Netherlands: Noordhoff Uitgevers.
- de Vries, S., Verhoef, N. & Goei, S.L. (2016). *Lesson Study: een praktische gids voor het onderwijs*. Garant Publisher.
- Dijkhuis, J.H., Admiraal, C.J., Verbeek, J.A., de Jong, G., Houwing, H.J., Kuis, J.D., ten Klooster, F., de Waal, S.K.A., van Braak, J., Lesting-Maas, J.H.M., Wieringa, M., van Maarseveen, M.L.M., Hiele, R.D., Romkes, J.E., Haneveld, M., Voets, S., Cornelisse, I. (2016). *Getal & Ruimte. 1 havo/vwo deel 1 (12ed.)*, Groningen, the Netherlands: Noordhoff Uitgevers.
- Dudley, P. (2019a). *Lesson Study: A handbook*. Cambridge University.
- Dudley, P. (2019b, August 5-8). [Paper presentation]. World Education Research Association Annual Conference, Tokyo, Japan.
- Dudley, P., Xu, H., Vermunt, J., & Lang, J. (2019). Empirical evidence of the impact of lesson study on students' achievement, teachers' professional learning and on institutional and system evolution. *European Journal of Education*, 54, 202-217. <https://doi.org/10.1111/ejed.12337>
- Educate. (2022). *Enhancing differentiated instruction and cognitive activation in mathematics lessons by supporting teacher learning (EDUCATE)*. <http://educate-platform.com/>
- Edwards, D., & Mercer, N. (1987). *Common knowledge. The development of understanding in the classroom*. London: Methuen.
- English, L. & Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. In L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education [3rd edition]* (pp. 313-335). Routledge.
- English, L. D. (Ed.). (2013). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Routledge.

- Friedlander, A., & Arcavi, A. (2012). Practicing algebraic skills: A conceptual approach. *Mathematics Teacher*, 105(8), 608-614. <http://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacher.105.8.0608>
- Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal of Research in Mathematics Education*, 35, 258-291.
- Goos, M., Vale, C., & Stillman, G. (2017). Teaching secondary school mathematics: Research and practice for the 21st century. Allen & Unwin.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Education, Information* (pp. 805-842). Age Pub Inc., Greenwich.
- Herbert, S. (2021). Overcoming challenges in assessing mathematical reasoning. *Australian Journal of Teacher Education* (Online), 46(8), 17-30.
- Herbert, S., Vale, C., White, P., & Bragg, L. A. (2022). Engagement with a formative assessment rubric: A case of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research*, 111, 101899.
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics education*, 41(2), 169-202. <https://doi.org/10.2307/20720130>
- Jeannotte, D., & Kieran, C. A. (2017). Conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 96, 1–16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Küchemann, D. E. (2010). Using patterns generically to see structure. *Pedagogies: An International Journal* 5(3), 233–250.
- Lawrence, C. A., & Chong, W. H. (2010). Teacher collaborative learning through the lesson study: identifying pathways for instructional success in a Singapore high school. *Asia Pacific Education Review*, 11(4), 565-572. <https://doi.org/10.1007/s12564-010-9103-3>
- Lewis, C. (2009). What is the nature of knowledge development in lesson study? *Educational Action Research*, 17(1), 95-110. <https://doi.org/10.1080/09650790802667477>
- Llinares, S. (2013). Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus-Journal of Education*, 1(3), 76-93.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: RoutledgeFalmer.
- Mata-Pereira, J., & da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169–186.
- McCrone, S.S. (2005). The development of mathematical discussions: an investigation in a fifth-grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, 7, 111-133.
- McDuffie, A. R., Foote, M. Q., Drake, C., Turner, E., Aguirre, J., Gau Bartell, T., & Bolson, C. (2014). Use of video analysis to support prospective K–8 teachers' noticing of equitable practices. *Mathematics Teacher Educator*, 2(2), 108–140.
- Mercer, N. & Dawes, L. (2008). The value of exploratory talk. In N. Mercer & S. Hodgkinson (Eds.). *Exploring talk in school: Inspired by the work of Douglas Barnes* (pp.55-90). SAGE Publications Ltd. <https://dx.doi.org/10.4135/9781446279526.n4>
- Mitchell, R. N., & Marin, K. A. (2015). Examining the use of a structured analysis framework to support prospective teacher noticing. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(6), 551-575.
- Moyer, P. S., & Milewicz, E. (2002). Learning to question: Categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(4), 293-315.
- Mueller, M., Yankelewitz, D., & Maher, C. (2014). Teachers promoting student mathematical reasoning. *Investigations in Mathematics Learning*, 7(2), 10–30.
- NCTM (n.d.). Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making. Questions and answers. [https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards\\_and\\_Positions/Focus\\_in\\_High\\_School\\_Mathematics/FHSM\\_FAQs.pdf](https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Focus_in_High_School_Mathematics/FHSM_FAQs.pdf)
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9–28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- NRICH Primary Team (2014, July). Reasoning: Identifying opportunities (Article). University of Cambridge, NRICH. <https://nrich.maths.org/10990>

- OECD (2022). PISA 2022 mathematics framework. <https://pisa2022-maths.oecd.org/>
- Prediger, S., Quasthoff, U., & Heller, V. (2018). Discourse competence as important part of academic language proficiency in mathematics classrooms: The case of explaining to learn and learning to explain. *Educational Studies in Mathematics*, 99(2), 161-179. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-018-9830-7>
- Robinson, V., Hohepa, M., & Lloyd, C. (2009). School leadership and student outcomes: Identifying what works and why best evidence synthesis. Auckland: New Zealand Ministry of Education
- Ruthven, K. (1989). An exploratory approach to advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. doi:10.1007/BF00315610
- Sahin, A., & Kulm, G. (2008). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding, and factual questions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(3), 221–241.
- Scherer, P. & Steinbring, H. (2006). Noticing children's learning processes - Teachers jointly reflect their own classroom interaction for improving mathematics teaching. *Journal for Mathematics Teacher Education*. 9(2), 157-185.
- Seleznyov, S. (2019). Lesson study beyond Japan: evaluating impact. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 8(1), 2-18. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-09-2018-0061>
- Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge University Press.
- Sherin, M. G., & van Es, E. A. (2009). Effects of video club participation on teachers' professional vision. *Journal of Teacher Education*, 60, 20–37.
- Sowder, L. & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher* 91(8), 670–675.
- Stacey, K., & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 72(3), 271–288. <http://www.jstor.org/stable/25619864>
- Stigler, J. and Hiebert, J. (1999). The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York, NY: The Free Press.
- Stigler, J.W., Hiebert, J. (2016). Lesson study, improvement, and the importing of cultural routines. *ZDM Mathematics Education*, 48, 581–587. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0787-7>
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258-288. <https://doi.org/10.1080/10986060903253954>
- Utrecht University. (2022). Primas Project. <https://primas-project.eu/modules/modules-english/>
- van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. In M. G. Sherin, V. Jacobs, & R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134–151). New York: Routledge.
- van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2010). The influence of video clubs on teachers' thinking and practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(2), 155–176.
- Vermunt, J., Vrieki, M., van Halem, N., Warwick, P. & Mercer, N. (2019). The impact of Lesson Study professional development on the quality of teacher learning. *Teaching and Teacher Education*, 81, 61-73. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2019.02.009>
- Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., Pinkernell, G. (2022). Algebra in der sekundarstufe [Algebra in secondary schools]. Heidelberg: Springer.
- Willems, I., & Van den Bossche, P. (2019). Lesson Study effectiveness for teachers' professional learning: a best evidence synthesis. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 8(4), 257-271. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-04-2019-0031>
- Xu, H. and Pedder, D. (2015). Lesson Study: An international review of the research. In P. Dudley (Red.), *Lesson Study: Professional learning for our time* (pp. 24-47). London, UK: Routledge.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Socio-mathematical norms, argumentations and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.
- Ylonen, A., & Norwich, B. (2013). Professional learning of teachers through a lesson study process in England: Contexts, mechanisms and outcomes. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 2(2), 137-154. <https://doi.org/10.1108/20468251311323388>





Με συγχρηματοδότηση από το  
πρόγραμμα «Erasmus+»  
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Το σχέδιο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η παρούσα δημοσίευση (ανακοίνωση) δεσμεύει μόνο τον συντάκτη της και η Επιτροπή δεν ευθύνεται για τυχόν χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.