ΟΔΗΓΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΓΕΝΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

0. Εισαγωγή

Ο Οδηγός στοχεύει στην υποστήριξη του εκπαιδευτικού για να κατανοήσει τον προσανατολισμό του νέου ΠΣ και να αναγνωρίσει τις αλλαγές που αφορούν στο περιεχόμενο, το μαθησιακό περιβάλλον και τις διδακτικές προσεγγίσεις που αυτό εισάγει. Δεν επιδιώκει να προσφέρει στον εκπαιδευτικό 'συνταγές' για το πώς να δράσει στην τάξη του, καθώς θεωρεί πως απευθύνεται σε έναν εκπαιδευτικό με επαρκή επιστημονική κατάρτιση και επαγγελματική ετοιμότητα να σχεδιάζει τη διδασκαλία του και να λαμβάνει αποφάσεις για την υλοποίησή της με βάση τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα.

Στο πλαίσιο του νέου Προγράμματος Σπουδών (ΠΣ), ο εκπαιδευτικός αναμένεται να είναι σε θέση να υποστηρίζει αποτελεσματικά όλους τους μαθητές να προσεγγίσουν τις γνώσεις, τη σκέψη και τις αξίες της μαθηματικής επιστήμης που το Πρόγραμμα Σπουδών προτάσσει. Σε αυτήν την κατεύθυνση, ο Οδηγός φιλοδοξεί να προσφέρει κεντρικές αλλά συγκεκριμένες κατευθύνσεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών με σεβασμό στους βαθμούς ελευθερίας που επιβάλλουν η αναγνώριση της πολυπλοκότητάς της, η επιστημονική συγκρότηση του εκπαιδευτικού και η μοναδικότητα του ρόλου του ως ειδικού που διδάσκει και διδάσκεται στην αρένα της τάξης καθημερινά. Ειδικότερα, επιδιώκει να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να:

- αναγνωρίζει τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για κάθε διδακτική ενότητα και να τα συνδέει με αυτά που οι μαθητές αναμένεται να έχουν επιτύχει στις προηγούμενες τάξεις ή θα επιτύχουν στις επόμενες
- καθορίζει με τη βοήθεια του ΠΣ τους στόχους του και τα μέσα επίτευξής τους ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες των μαθητών
- επιλέγει ή να αναπτύσσει εκπαιδευτικό υλικό, έχοντας επίγνωση των διδακτικών του επιλογών και των αποτελεσμάτων που αυτές μπορεί να έχουν στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών
- σχεδιάζει τη διδασκαλία του αξιοποιώντας έργα και διδακτικά εργαλεία με τρόπους που αναδεικνύουν τα βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας
- πειραματίζεται με νέες διδακτικές προσεγγίσεις που επιτρέπουν την πολύτροπη πραγματοποίηση των διδακτικών του στόχων αναγνωρίζοντας τα γνωστικά, τα κοινωνικο-πολιτισμικά (μικρο-επίπεδο) αλλά και τα πολιτικά (μακρο-επίπεδο) χαρακτηριστικά της μαθηματικής εκπαίδευσης
- σχεδιάζει εργαλεία αξιολόγησης της επίτευξης των στόχων του για την ανατροφοδότηση και διαμόρφωση της μάθησης και της διδασκαλίας

Ο Οδηγός περιλαμβάνει ένα *Γενικό μέρος* στο οποίο παρουσιάζονται οι βασικές αρχές μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών, αναλύεται η έννοια της δραστηριότητας, περιγράφονται παραδείγματα πόρων και εργαλείων για τη μάθηση και διδασκαλία, καθώς και παραδείγματα εργαλείων αξιολόγησης που ανταποκρίνονται στις βασικές αρχές αξιολόγησης που θέτει το ΠΣ. Επίσης, περιλαμβάνει ένα *Ειδικό μέρος* στο οποίο, για κάθε θεματικό πεδίο, παρουσιάζονται βασικά στοιχεία της σημασίας του πεδίου και της ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης/σκέψης και των δυσκολιών των μαθητών που αφορούν το πεδίο. Επιπλέον, προσφέρονται ενδεικτικά έργα και ενδεικτικές οδηγίες διδακτικής διαχείρισης (ανάπτυξης μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη) που συνδέονται με συγκεκριμένα σημεία της εξελικτικής πορείας ανάπτυξης ενός ΠΜΑ και ενίοτε με της τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας (ΤΜΔ). Τέλος, προτείνονται πηγές που μπορεί να αξιοποιηθούν.

Ο Οδηγός του εκπαιδευτικού δεν αντικαθιστά το ΠΣ αλλά επικεντρώνεται σε ζητήματα που αφορούν στο σχεδιασμό και την αξιολόγηση της διδασκαλίας. Αυτό σημαίνει ότι χρειάζεται να χρησιμοποιείται συμπληρωματικά με το ΠΣ.

1. Μαθηματικό Περιεχόμενο και Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών

Η πρώτη αναγκαία συνθήκη για να μπορεί ο εκπαιδευτικός να μετασχηματίζει την επιστημονική μαθηματική γνώση σε μαθηματική γνώση κατάλληλη για τους μαθητές είναι η γνώση του μαθηματικού περιεχομένου του Προγράμματος Σπουδών. Η γνώση αυτή θα του επιτρέψει να επιλέξει τις κατάλληλες γνωστικές μαθηματικές πρακτικές (π.χ. δημιουργία συνδέσεων, οπτικοποίηση, κλπ), μαθηματικά έργα και πλούσιες μαθηματικές δραστηριότητες (Henningsen & Stein, 1997; Stein & Kim, 2009). Η γνώση του μαθηματικού περιεχομένου του προγράμματος σπουδών μπορεί να προσεγγιστεί με τον κλασικό τρόπο των θεματικών περιοχών και ενοτήτων (π.χ. Τετράπλευρα στη Γεωμετρία) ή εναλλακτικά μπορεί να δομηθεί γύρω από κεντρικές ιδέες ή αρχές που ονομάζονται **Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών.** Ως μεγάλη ιδέα θεωρείται μια κεντρική έννοια στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών η οποία συνδέει διαφορετικές μαθηματικές έννοιες ή οπτικές σε ένα συνεκτικό σύνολο (NCTM, 2000, σ. 17).

Στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών ως Μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών αναγνωρίζονται η **Μαθηματική δομή,** η **Απόδειξη,** η **Γενίκευση,** η **Μεταβολή,** η **Ισοδυναμία,** οι **Μετασχηματισμοί** και η **Προσέγγιση-σύγκλιση**.

Η Μαθηματική δομή αφορά τον προσδιορισμό γενικών ιδιοτήτων ενός συνόλου στοιχείων οι οποίες εμφανίζονται ως σχέσεις μεταξύ συγκεκριμένων στοιχείων του συνόλου. Τα στοιχεία αυτά μπορεί να είναι μαθηματικά αντικείμενα όπως αριθμοί, τρίγωνα, εξισώσεις, σύνολα με σχέσεις μεταξύ τους, ή και σχέσεις σχέσεων. Για παράδειγμα, η αναγνώριση του κανόνα μιας κανονικότητας μέσα από τη δομική μονάδα δημιουργίας της, όπως είναι η ακολουθία των περιττών αριθμών. Η αναγραφή των συγκεκριμένων στοιχείων $1, 3, 5, \dots$ της ακολουθίας εγείρει το ερώτημα της αναγνώρισης της γενικής σχέσης που διέπει τα στοιχεία του συνόλου. Αντίστοιχα στη Γεωμετρία, ο προσδιορισμός των γενικών ιδιοτήτων των κανονικών πολυγώνων αναπτύσσεται από τη μελέτη συγκεκριμένων αντικειμένων όπως είναι το ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο.

Η Απόδειξη αφορά τη συλλογιστική διαδικασία, η οποία ξεκινά από ένα σύνολο υποθέσεων και μέσα από μια σειρά διαδοχικών επιχειρημάτων/συλλογισμών καταλήγει σε ένα συμπέρασμα. Η απόδειξη στο Δημοτικό Σχολείο έχει περισσότερο εμπειρικό και διαισθητικό χαρακτήρα, ενώ στο Γυμνάσιο και πολύ περισσότερο στο Λύκειο οι μαθητές καλούνται να εμβαθύνουν στη χρήση εικασιών και στην επαλήθευση μέσω της τυπικής απόδειξης μιας μαθηματικής πρότασης.

Μία επιθυμητή πορεία προς την απόδειξη περιλαμβάνει διαδικασίες διερεύνησης, την διατύπωση εικασιών, τη διαισθητική ή άτυπη αιτιολόγηση, την ανάπτυξη συλλογισμών και τέλος την τυπική απόδειξη (Hanna & de Villiers, 2012). Έτσι, στο Δημοτικό Σχολείο, οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν το άθροισμα των γωνιών επαρκούς εύρους ειδών τριγώνων με διάφορους άτυπους (π.χ. κόβοντας και τοποθετώντας τις γωνίες την μια δίπλα στην άλλη) και τυπικούς (π.χ., μετρώντας τις γωνίες συμβατικά με μοιρογνωμόνιο ή σε ψηφιακό περιβάλλον) τρόπους και να οδηγηθούν στην 'εμπειρική και διαισθητική' διαπίστωση ότι είναι 180^o.

Κατά την αποδεικτική διαδικασία ο εκπαιδευτικός ενδείκνυται να χρησιμοποιεί ένα γενικό παράδειγμα (generic example), πολλαπλές αναπαραστάσεις (οπτικοποίηση, πίνακες τιμών, κλπ) και ενδεχομένως χειραπτικά ή ψηφιακά εργαλεία για να υποβοηθήσει τους μαθητές στην εύρεση της απόδειξης (Mariotti, 2000). Έτσι, για την απόδειξη της σχέσης

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}, \alpha \neq 0,$$

προτείνεται να προηγηθεί ένα παράδειγμα της μορφής $x^2 - 5x + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ και ενδεχομένως η διερεύνηση της αντίστοιχης γραφικής αναπαράστασης με λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Αντίστοιχα, στο πλαίσιο του αξιωματικού ορισμού των Πιθανοτήτων, είναι επιθυμητό οι μαθητές να δουν αρχικά τους κανόνες λογισμού των Πιθανοτήτων μέσα από παραδείγματα, στη συνέχεια να εικάσουν τους αντίστοιχους γενικούς κανόνες και τέλος να τους αποδείξουν, ξεκινώντας από τα αξιώματα.

Η Γενίκευση αφορά τη μετάβαση από την θεώρηση των δομικών χαρακτηριστικών ενός αντικειμένου στην θεώρηση ενός συνόλου που περιέχει το αντικείμενο αυτό, επεκτείνοντας τα χαρακτηριστικά του σε όλα τα αντικείμενα του συνόλου. Η γενίκευση επιτρέπει στους μαθητές την επέκταση εννοιών ή διεργασιών τις οποίες ήδη έχουν κατανοήσει ή την διατύπωση εικασιών που ενίοτε αποτελούν προ-στάδιο της αποδεικτικής διαδικασίας. Για παράδειγμα, η διατύπωση της αντιμεταθετικής διότητας των φυσικών αριθμών αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα γενίκευσης στο Δημοτικό Σχολείο. Αργότερα στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η βασική ιδιότητα των τετραγωνικών ριζών $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$, μπορεί εύκολα να γενικευθεί στη σχέση $\sqrt{\alpha_1\cdots\alpha_\nu}=\sqrt{\alpha_1}\cdots\sqrt{\alpha_\nu}$, για κατάλληλες υπόριζες ποσότητες. Επιπλέον, η γενίκευση επίσης αξιοποιείται από τους μαθητές σε ερωτήματα με πιο έντονη μαθηματική πρόκληση, όπως η συμπλήρωση των παρακάτω ισοτήτων

$$\begin{array}{ccc} 1^3+2^3 & = & (1+2)^2 \\ 1^3+2^3+3^3 & = & (1+2+\cdots)^2 \\ \cdots & = & \cdots \end{array}$$

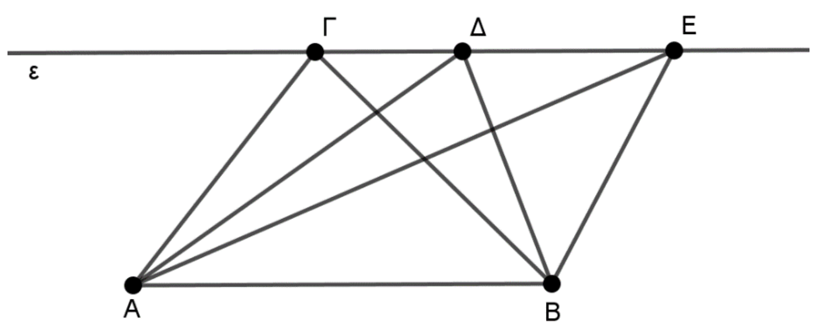
που οδηγεί στην εικασία $1^3+2^3+\cdots+\nu^3=(1+2+\cdots+\nu)^2$, για $\nu\in\mathbb{N}^*$,$\nu \in N^*$ η οποία συνήθως ακολουθείται από την αποδεικτική μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Η Μεταβολή συνδέεται με την αλλαγή ενός μεγέθους σε σχέση με ένα άλλο. Οι μεταβολές αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα φαινόμενα του περιβάλλοντος και της ζωής μας γενικότερα. Η διερεύνηση και η μοντελοποίηση αυτών των αλλαγών αποτελεί κεντρική δραστηριότητα στο πεδίο της Άλγεβρας και των Στοχαστικών Μαθηματικών. Η μεταβολή εμφανίζεται στο Πρόγραμμα Σπουδών από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού με την αναγνώριση και διερεύνηση σχέσεων μεταξύ συμμεταβαλόμενων μεγεθών και αναπτύσσεται στις τελευταίες τάξεις με τη μελέτη ειδικών περιπτώσεων συμμεταβολής όπως είναι τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο η έννοια της μεταβολής μορφοποιείται στην Άλγεβρα με γραμμικές ή μη-γραμμικές συναρτήσεις καθώς και με την έννοια του ρυθμού μεταβολής στα μαθηματικά των τελευταίων τάξεων. Προτείνεται, η αξιοποίηση της έννοιας της μεταβολής στην τάξη να συνδέεται με πραγματικές καταστάσεις και προβλήματα που να ενδιαφέρουν τους μαθητές, προερχόμενα από άλλες επιστήμες όπως είναι η Φυσική (π.χ. ταχύτητα) ή από το κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον των μαθητών όπως είναι η Οικονομία (π.χ. ρυθμός μεταβολής των κερδών μιας επιχείρησης) και το Περιβάλλον. Στα Στοχαστικά Μαθηματικά, η μεταβολή αποκτά μια πιο γενική μορφή καθώς δεν μπορεί κανείς να υπολογίσει πώς ακριβώς μεταβάλλεται ένα μέγεθος όταν μεταβάλλεται κάποιο άλλο. Μπορούμε όμως να ποσοτικοποιήσουμε χαρακτηριστικά της συμμεταβολής με τις έννοιες της συνδιακύμανσης και του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης. Με βάση τις τιμές αυτών των δεικτών διερευνάται η προσαρμογή ενός στατιστικού μοντέλου (π.χ. ευθεία παλινδρόμησης) στα δεδομένα ώστε να μπορούμε να διατυπώσουμε πώς αναμένουμε να ανταποκριθεί μια μεταβλητή στις μεταβολές μιας άλλης. Επιπλέον, στη Στατιστική, η ιδέα της **μεταβλητότητας**

συνδέεται με την ποικιλία και το εύρος των δεδομένων που αφορούν σε φαινόμενα, καταστάσεις και ποσότητες του καθημερινού κόσμου. Η ιδέα της μεταβλητότητας συνδέεται με εκείνη της αβεβαιότητας, που βρίσκεται στο επίκεντρο των Πιθανοτήτων, μέσω της διατύπωσης προβλέψεων με σκοπό τη λήψη αποφάσεων.

Η ισοδυναμία αφορά την αμφίδρομη συσχέτιση δύο μαθηματικών αντικειμένων**.** Η ισοδυναμία διατρέχει όλους τους κύκλους σπουδών στην Αριθμητική/Άλγεβρα και τη Γεωμετρία. Στην Αριθμητική/Άλγεβρα έχουμε την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων και των ισοδύναμων αλγεβρικών παραστάσεων όπως είναι οι εξισώσεις και οι ανισώσεις. Στην Γεωμετρία η ισοδυναμία εμφανίζεται στα ισεμβαδικά σχήματα, όπως για παράδειγμα τα τρίγωνα που έχουν ίδια βάση και η τρίτη κορυφή κινείται σε μια παράλληλη προς τη βάση ευθεία (Σχήμα 1).

Οι Μετασχηματισμοί αφορούν τη διαδικασία με την οποία μαθηματικά αντικείμενα, όπως αριθμοί ή συναρτησιακές σχέσεις ή γεωμετρικά σχήματα, μπορούν να μετατραπούν σε μία διαφορετική μορφή μέσω μαθηματικής επεξεργασίας. Οι Μετασχηματισμοί συναντώνται στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία. Στην Άλγεβρα ένας κλασσικός μετασχηματισμός είναι η απλοποίηση μιας αριθμητικής (π.χ. 12=4.3=2.2.3) ή



Σχήμα 1. Η ευθεία ε είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, επομένως τα τρίγωνα ΓΑΒ, ΔΑΒ και ΕΑΒ είναι ισοδύναμα.

αλγεβρικής παράστασης, όπως για παράδειγμα $\frac{x^2-1}{x+1}+1=x$, για κάθε $x\neq-1$. Στη Γεωμετρία η ομοιότητα τριγώνων (ή και η στροφή) είναι ένας μετασχηματισμός που διαθέτει αμετάβλητα και μεταβλητά στοιχεία του μαθηματικού αντικειμένου (τριγώνου) που υπόκειται στον μετασχηματισμό. Ο μετασχηματισμός της ομοιότητας διατηρεί αναλλοίωτες τις γωνίες των τριγώνων ενώ μεταβάλλονται με βάση το λόγο ομοιότητας τα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά των τριγώνων.

Η προσέγγιση-σύγκλιση συνδέεται με άπειρες διαδικασίες και την έννοια του ορίου στην Ανάλυση αλλά και στη Γεωμετρία. Στην Ανάλυση, η έννοια του ορίου εισάγεται με την αξιοποίηση της Γεωμετρίας και συγκεκριμένα μέσω της προσέγγισης του κύκλου με κανονικό πολύγωνο καθώς αυξάνεται απεριόριστα ο αριθμός των πλευρών του. Η σύγκλιση επεκτείνεται στο όριο συναρτήσεων στα Μαθηματικά προσανατολισμού της Γ τάξης του Λυκείου μέσω της αριθμητικής (πίνακας τιμών των x και f(x)), γραφικής και συμβολικής (ορισμός της παραγώγου σε σημείο) αναπαράστασης (Goos, Stillman & Vale, 2007).

2. Μαθηματικές και Κοινωνικο-πολιτισμικές διεργασίες/πρακτικές

Βασική επιδίωξη του νέου ΠΣ των Μαθηματικών είναι η υποστήριξη της εμπλοκής όλων των μαθητών σε κρίσιμες διεργασίες κατανόησης και ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης και πρακτικής αντιστοίχως. Στο νέο ΠΣ οι διεργασίες αυτές αποκαλούνται '**μαθηματικές πρακτικές**' ακριβώς γιατί διέπουν και χαρακτηρίζουν το 'μαθηματικό γίγνεσθαι' και το 'μαθηματικώς πράττειν' και, κατά συνέπεια, διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στο 'μαθηματικώς μανθάνειν και διδάσκειν'. Εντάσσονται δε σε δυο διακριτές ομάδες, αφενός τις αμιγώς 'μαθηματικές πρακτικές' που συνδέονται με τις πρακτικές και τους λόγους (discourses) ανάπτυξης της επιστήμης των μαθηματικών και αφετέρου τις κοινωνικο-πολιτισμικο-συναισθηματικές πρακτικές' που χαρακτηρίζουν τις πρακτικές και τους λόγους συμμετοχής των ατόμων σε αυτήν την ανάπτυξη.

Στην ενότητα αυτήν παρουσιάζονται οι πρακτικές των δυο παραπάνω ομάδων σε μια προσπάθεια σαφούς οριοθέτησης του περιεχομένου και της λειτουργικότητάς τους στην καθημερινή εκπαιδευτική πράξη στα μαθηματικά. Καθεμιά τους έχει μια μοναδική εστίαση, αλλά, ταυτόχρονα αλληλοεπιδρά με τις άλλες, όταν τίθεται σε λειτουργία.

(2α). Μαθηματικές διεργασίες και Μαθηματικές πρακτικές

Οι αμιγώς μαθηματικές πρακτικές περιλαμβάνουν την δημιουργία συνδέσεων, τον συλλογισμό και την επιχειρηματολογία, μαθηματική επικοινωνία, οπτικοποίηση, επιλογή και χρήση εργαλείων και επίλυση προβλήματος, μοντελοποίηση, γνωστική ενημερότητα και συζητούνται στη συνέχεια.

(i) *Δημιουργία συνδέσεων*: Η πρακτική της δημιουργίας συνδέσεων αφορά στην παροχή ευκαιριών στους μαθητές να συνειδητοποιούν:

α) σχέσεις μεταξύ διαφόρων μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών καθώς και των διαφορετικών μαθηματικών πεδίων (γεωμετρία, άλγεβρα, στοχαστικά μαθηματικά). Για παράδειγμα τα παιδιά μπορεί να συζητήσουν τη σχέση ανάμεσα στο κλάσμα 1⁄4, τον δεκαδικό 0.25, και το ποσοστό 25% ή σε μεγαλύτερες τάξεις να συνδέουν τη γεωμετρική και την αλγεβρική ερμηνεία ενός προβλήματος (π.χ. ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της παράστασης Ιχ+2Ι).

β) σχέσεις των μαθηματικών με την καθημερινότητα και με άλλες επιστήμες. Ο εκπαιδευτικός είναι σημαντικό να εντάσσει στη διδασκαλία του τη χρήση πλαισίων από την καθημερινότητα που έχουν νόημα για τα παιδιά (π.χ. αυθεντικά προβλήματα, παιχνίδια, μοντέλα λειτουργίας καθημερινών καταστάσεων), αλλά και πλαίσια που αναδεικνύουν τη σύνδεση των μαθηματικών με άλλα γνωστικά αντικείμενα (π.χ. φυσικές επιστήμες, λογοτεχνία, φυσική αγωγή).

(ii) *Συλλογισμός & επιχειρηματολογία*: Η ανάπτυξη συλλογισμού και επιχειρηματολογίας διευκολύνεται όταν οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν και να αιτιολογήσουν τον τρόπο λύσης που προτείνουν σε ένα μαθηματικό ερώτημα. Η αξιολόγηση των επιχειρημάτων που αναπτύσσουν τα ίδια τα παιδιά αλλά και οι συμμαθητές τους, η δικαιολόγηση ενός αποτελέσματος που δημιουργεί έκπληξη, η ανάλυση και σύγκριση διαφορετικών τρόπων επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, η διατύπωση ερωτημάτων και εικασιών, η παρουσίαση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, η κατασκευή μιας απόδειξης, η γενίκευση μιας ιδέας από συγκεκριμένα παραδείγματα και η εξαγωγή συμπερασμάτων αποτελούν κρίσιμα στοιχεία της ανάπτυξης της συγκεκριμένης πρακτικής. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τους μαθητές να παρουσιάζουν τον τρόπο λύσης τους και να επιχειρηματολογούν γι' αυτόν ανεξάρτητα από την ορθότητα του αποτελέσματος ή να αναπτύσσουν επιχειρήματα για να πείσουν ένα συμμαθητή τους ότι έχει κάνει λάθος. Το παρακάτω παράδειγμα είναι ενδεικτικό της προσπάθειας μιας εκπαιδευτικού να βοηθήσει μια μαθήτριά της να εξηγήσει τη σκέψη της για τον υπολογισμό της διαφοράς 72-39 (Wood, 2000).

Δασκάλα: Τι βρήκες και πώς το έκανες;

Μαθήτρια: 33…Σκέφτηκα 72 βγάζω 30 και βρήκα 42. Και μετά έβγαλα 10 και βρήκα…

Δασκάλα: Περίμενε… Έβγαλες από το 72 το 30 και βρήκες 42. Μετά έβγαλες 10. Γιατί έβγαλες 10;

Μαθήτρια: Γιατί ήταν ευκολότερο. Ήταν κοντά στο 9.

Δασκάλα: Τι εννοείς κοντά στο 9;

Μαθήτρια: Επειδή το 9 είναι κοντά στο 10 και έτσι είναι 32.

Δασκάλα: 32, αλλά πώς βρήκες 33;

Μαθήτρια: Πρόσθεσα 1.

Δασκάλα: Γιατί πρόσθεσες 1;

Μαθήτρια: Επειδή πρέπει να βγάλεις 9 αντί για 10, έτσι έπρεπε να δώσω το 1 πίσω.

(iii) *Μαθηματική επικοινωνία*: Η επικοινωνία σχετίζεται με την ικανότητα των παιδιών να μοιράζονται τις σκέψεις τους, τις ερωτήσεις τους, τις ιδέες τους και τις λύσεις τους χρησιμοποιώντας τον προφορικό λόγο, τη γραπτή συμβολική γλώσσα των μαθηματικών, αλλά και μη λεκτικές μορφές επικοινωνίας. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ενθαρρύνει τους μαθητές να επινοούν τα δικά τους σύμβολα πριν τους εισάγει στα επίσημα μαθηματικά σύμβολα. Η μετάφραση της φυσικής γλώσσας σε συμβολική γλώσσα και αντίστροφα και η έμφαση στην ακρίβεια της μαθηματικής γλώσσας βοηθά την επικοινωνία μεταξύ των μελών της τάξης (για παράδειγμα η σωστή χρήση του συμβόλου της ισότητας, η επιλογή των μονάδων μέτρησης, η απόδοση τίτλων σε στατιστικά διαγράμματα, η διατύπωση ορισμών). Οι μαθητές κατά την επικοινωνία τους στις ομάδες εργασίας και στην ολομέλεια της τάξης μπορούν να αναστοχαστούν πάνω στον τρόπο σκέψης τους και τον τρόπο σκέψης των συνομιλητών τους, να αναθεωρήσουν τις στρατηγικές τους, να οδηγηθούν στην αποσαφήνιση των ιδεών και την ανάλυση των επιχειρημάτων που ανταλλάσσονται και να προχωρήσουν σε βαθύτερη κατανόηση εννοιών και διαδικασιών. Όταν ο εκπαιδευτικός παροτρύνει τα παιδιά να συμμετέχουν στη μαθησιακή διαδικασία επικοινωνώντας τη σκέψη τους, τα αποτελέσματα στην κατανόηση των μαθηματικών είναι πολύ θετικά (Ing et al., 2015).

(iv) *Οπτικοποίηση*: Η πρακτική της οπτικοποίησης συνδέεται με τη χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων που ο μαθητής μπορεί να αξιοποιήσει και να επιλέξει για να επικοινωνήσει τη σκέψη του. Για παράδειγμα, όταν τα παιδιά στις μικρές ηλικίες κατασκευάζουν ένα εικονόγραμμα και ένα ραβδόγραμμα με βάση ένα πίνακα δεδομένων δίνεται η δυνατότητα να συνδέσουν και να συγκρίνουν διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης των δεδομένων και να τους αξιολογήσουν ως προς την προσφορά τους. Επίσης, η χρήση της αριθμογραμμής είναι ένα κατάλληλο αναπαραστατικό εργαλείο για υπολογισμούς και ανάδειξη των σχέσεων μεταξύ των αριθμών, ενώ η χρήση και κατασκευή χαρτών βοηθούν την ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης των μαθητών.

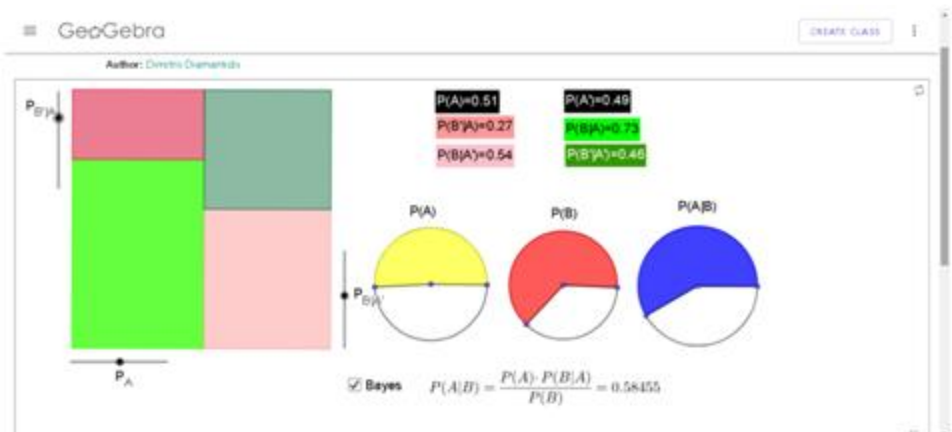
(v) *Επιλογή και χρήση εργαλείων*: Τα παιδιά ενθαρρύνονται να χρησιμοποιήσουν μια ποικιλία χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων. Τα χειραπτικά εργαλεία που δίνουν τη δυνατότητα στα παιδιά να συνδέσουν την άτυπη με την τυπική γνώση μπορεί να είναι καθημερινά αντικείμενα από το περιβάλλον των μαθητών (π.χ. μολύβια, χαρτόνι), ή πολιτισμικά εργαλεία (π.χ. νομίσματα, ζυγαριά), ή εξειδικευμένα εργαλεία (π.χ. αριθμητήριο). Η χρήση τους μπορεί να διαφέρει ως προς τη μαθηματική δράση που υποστηρίζουν. Για παράδειγμα, το χειραπτικό υλικό μπορεί να είναι ένα μοντέλο αναπαράστασης μιας διαδικασίας (π.χ. το μοντέλο της ζυγαριάς), ένα μέσο διερεύνησης μιας σχέσης (π.χ. οι γεωπίνακες για τη διερεύνηση της σχέσης εμβαδού και περιμέτρου), ή ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται στη γεωμετρία για σχεδιασμό, κατασκευή, σύγκριση γεωμετρικών αντικειμένων (διαβήτης, όργανα μέτρησης).

Αντίστοιχα, τα ψηφιακά εργαλεία διαθέτουν χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τη μαθηματική δραστηριότητα και την ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων, όπως:

α) Δυνατότητες διερεύνησης και πειραματισμού. Για παράδειγμα το μοντέλο της χαλασμένης αριθμομηχανής, καθώς και το μοντέλο του άβακα που αποτελούν προσομοιώσεις μιας αριθμομηχανής και ενός κλασικού άβακα επιτρέπουν την ανάπτυξη διερευνητικών έργων και τον πειραματισμό.

β) Δυνατότητες δυναμικού χειρισμού μαθηματικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra, στο περιβάλλον επιτρέπει στους μαθητές να ασχοληθούν με γεωμετρικές κατασκευές και να τις χειριστούν με δυναμικό τρόπο, π.χ. να σύρουν και να αυξομειώσουν το μέγεθος ευθύγραμμων τμημάτων ή γωνιών και να παρατηρήσουν τις αλλαγές στη γεωμετρική κατασκευή.

γ) Αλληλοσυνδεόμενες αναπαραστάσεις: οι μεταβολές σε μια αναπαράσταση επιφέρουν αυτομάτως μεταβολές και στις υπόλοιπες διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα στην παρακάτω εφαρμογή η αλλαγή των τιμών των πιθανοτήτων P(A), P(B΄|A) και P(B|A΄) μέσω δυναμικού χειρισμού επιφέρει αλλαγές τόσο τις «πίτες» των πιθανοτήτων P(A), P(B) και P(A|B), όσο και στο τετράγωνο των συμπληρωματικών ενδεχομένων.



δ) Πολλαπλές δυνατότητες έκφρασης μαθηματικών νοημάτων. Για παράδειγμα μπορεί να αξιοποιηθεί η γλώσσα προγραμματισμού Logo στα πλαίσια περιβαλλόντων Γεωμετρίας της Χελώνας για την ανάπτυξη παραμετρικών ή μη διαδικασιών με στόχο την κατασκευή και διερεύνηση γεωμετρικών σχημάτων.

Καθώς τα έργα μετασχηματίζονται σε δραστηριότητα από τους συμμετέχοντες στην τάξη των μαθηματικών, τα εργαλεία μπορούν να στηρίξουν τη δημόσια παρουσίαση εικασιών και επιχειρημάτων από τους μαθητές (Bussi, 2011). Η αξιοποίηση ποικιλίας εργαλείων για το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο και η συζήτηση πάνω στις ομοιότητες και τις διαφορές τους μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν σε βάθος τις μαθηματικές έννοιες, τις διαδικασίες και τις αναπαραστάσεις τους.

(vi) *Επίλυση προβλήματος*: Η επίλυση προβλήματος συνδέεται με την συμμετοχή των μαθητών σε ένα έργο που δεν γνωρίζουν εκ των προτέρων τον τρόπο λύσης του, διαφορετικά το έργο αφορά μια εφαρμογή ή άσκηση (NCTM, 2000). Επομένως, οι μαθητές πρέπει να έχουν την ευκαιρία να προτείνουν τις δικές τους λύσεις σε νέες προβληματικές καταστάσεις, αλλά και σε προβλήματα που έχουν διατυπώσει οι ίδιοι. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να ενθαρρύνουν τα παιδιά να χρησιμοποιούν μια ποικιλία στρατηγικών για την επίλυση ενός προβλήματος όπως για παράδειγμα να το αναπαραστήσουν με υλικά, να χρησιμοποιήσουν ένα πίνακα με τις πληροφορίες του προβλήματος, να επαναδιατυπώσουν το πρόβλημα, να το απλοποιήσουν, να κάνουν μια υπόθεση, να εργαστούν αντίστροφα (Fan & Zhu, 2007). Η διατύπωση νέων προβλημάτων από τους ίδιους τους μαθητές τους δίνει την ευκαιρία να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες που προσεγγίζουν, αξιοποιώντας δημιουργικά διαφορετικά πλαίσια από τον κόσμο των εμπειριών τους (English, 1997; Cai & Leikin, 2020).

(vii) *Μοντελοποίηση*: Η μαθηματική μοντελοποίηση προσφέρει τη δυνατότητα σύνδεσης της πραγματικής ζωής με τα μαθηματικά. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέγει έργα από την καθημερινότητα του μαθητή , την κοινωνία και τον χώρο εργασίας και να βοηθά στη μετάφρασή τους στη γλώσσα των μαθηματικών (π.χ. η κατασκευή μιας εξίσωσης για την επίλυση ενός καθημερινού προβλήματος, η επιλογή ενός δειγματικού χώρου και η απόδοση πιθανοτήτων στα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, , η χρήση της γεωμετρίας σε ένα πρόβλημα σχεδιασμού). Η μοντελοποίηση περιλαμβάνει τόσο τη διαδικασία της αποπλαισίωσης μιας κατάστασης με σκοπό την συμβολική αναπαράστασή της και τον χειρισμό των συμβόλων όσο και την αναφορά στην αρχική κατάσταση για την ερμηνεία των συμβόλων και των αποτελεσμάτων (επανα-πλαισίωση). Για παράδειγμα, στις συνθετικές εργασίες, οι μαθητές καλούνται οι ίδιοι να διαμορφώσουν, να διερευνήσουν και να αξιολογήσουν μαθηματικά μοντέλα με τη χρήση χειραπτικών ή/και ψηφιακών εργαλείων.

(viii) *Μεταγνωστική ενημερότητα*: Οι μαθητές αναπτύσσουν μεταγνωστική ενημερότητα όταν θέτουν ερωτήματα στον εαυτό τους όπως: Τι κάνω; Γιατί το κάνω; Πώς με βοηθάει αυτό; Οι εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν τους μαθητές να αναπτύξουν μεταγνωστικές ικανότητες, όταν ενισχύουν τη ‘ φωναχτή σκέψη’ κατά τη λύση ενός προβλήματος και τους δίνουν την ευκαιρία να αναστοχαστούν σε ένα πρόβλημα με ερωτήματα όπως: Γιατί χρησιμοποίησες αυτόν τον τρόπο; Το σκέφτηκες πρώτα με άλλο τρόπο; Έχεις λύσει κάποιο παρόμοιο πρόβλημα;

(2β). Κοινωνικές, πολιτισμικές και συναισθηματικές πρακτικές

Οι *κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές* ενέχουν ταυτόχρονα γνωστικά και κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτικά στοιχεία της ανθρώπινης (νοητικής και φυσικής) δράσης, όπως η επικοινωνία, η αλληλεπίδραση, ο λόγος (discourse), η συμπερίληψη, η μαθηματική ταυτότητα μάθησης και ο μαθηματικός γραμματισμός και αφορούν σε δεξιότητες και ικανότητες των μαθητών:

- Να ερμηνεύουν καταστάσεις στον προσωπικό, εργασιακό και ευρύτερα κοινωνικό τους βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά
- Να αναπτύσσουν κριτική επίγνωση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στις κοινωνικές, περιβαλλοντικές, πολιτισμικές και οικονομικές σχέσεις
- Να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση
- Να κατανοούν τη διαλεκτική σχέση ανάμεσα στη ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του πολιτισμού, καθώς και την αξία της για την ανθρώπινη δραστηριότητα διαχρονικά.
- Να είναι μαθηματικά εγγράμματοι, δηλαδή να μπορούν να αναλύουν, να ερμηνεύουν τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά αλλά και να επεμβαίνουν στο κοινωνικό τους περιβάλλον, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά. Ένα "μαθηματικά εγγράμματο" άτομο αντιλαμβάνεται ότι οι μαθηματικές έννοιες, οι δομές και οι ιδέες έχουν εφευρεθεί ως εργαλεία για να οργανώσουν τα φαινόμενα του περιβάλλοντος και διαθέτει την ικανότητα να κατανοεί, να κρίνει, να δημιουργεί και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά σε μια ποικιλία ενδο- και εξω-μαθηματικών καταστάσεων, στις οποίες τα μαθηματικά παίζουν ή θα μπορούσαν να παίξουν κάποιο ρόλο.

Οι *κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές* αφορούν σε νόρμες αναγνώρισης και διαχείρισης συναισθημάτων και συμπεριφορών, διαμόρφωσης και διατήρησης θετικών σχέσεων, λήψης υπεύθυνων αποφάσεων και επίλυσης προκλητικών καταστάσεων και, τέλος, διατύπωσης και επιτυχούς διεκπεραίωσης θετικών στόχων. Υποστηρίζουν τους μαθητές στην μελέτη των μαθηματικών, καθώς συντελούν στην ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης, την αντιμετώπιση των προκλήσεων και την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης και, εν τέλει, στην ανάπτυξη θετικής ταυτότητας μάθησης των μαθηματικών, καθώς μέσω αυτών οι μαθητές:

- Αναπτύσσουν θετικά κίνητρα, αυτοπεποίθηση, εστίαση στις θετικές πτυχές των εμπειριών, υπομονή και επιμονή στην αντιμετώπιση οποιασδήποτε μαθηματικής κατάστασης
- Εκτιμούν την ομορφιά και την κομψότητα των μαθηματικών
- Αναπτύσσουν πνεύμα περιέργειας και αγάπη για τα μαθηματικά

- Αναπτύσσουν και ασκούν δεξιότητες που υποστηρίζουν τη θετική αλληλεπίδραση με άλλους για την αντιμετώπιση μαθηματικών έργων σεβόμενοι την διαφορετικότητα στη σκέψη και έκφραση

- Αξιοποιούν δεξιότητες αξιολόγησης, ελέγχου και αυτογνωστικής ρύθμισης της προόδου τους προκειμένου να οικοδομήσουν ισχυρές ταυτότητες μαθητευομένων των μαθηματικών.

- Αναγνωρίζουν και διαχειρίζονται διαφορετικού τύπου, ποιότητα και έντασης συναισθήματα και το άγχος με τρόπο αποτελεσματικό για τους ίδιους και τη μάθηση.

Οι κοινωνικές, πολιτισμικές και συναισθηματικές πρακτικές που αναφέρονται στο ΠΣ προωθούνται όταν οι εκπαιδευτικοί:

- Διατηρούν υψηλές προσδοκίες για όλους τους μαθητές.
- Βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν θετικές στάσεις για τα μαθηματικά ενισχύοντας τον ενθουσιασμό τους κατά την ενασχόλησή τους με αυτά.
- Επιλέγουν έργα στα οποία οι μαθητές μπορούν να ανταποκριθούν με επιτυχία.
- Υποστηρίζουν την ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης των μαθητών καλλιεργώντας την πεποίθηση ότι όλοι μπορούν να τα καταφέρουν μέσω της προσπάθειας.
- Εμπλέκουν όλους τους μαθητές στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και μαθηματικής επικοινωνίας.
- Αναδεικνύουν ότι μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τα Μαθηματικά για να πάρει ορθολογικές αποφάσεις ακόμα και σε συνθήκες αβεβαιότητας
- Παροτρύνουν τους μαθητές να επιμένουν στην επίλυση ενός προβλήματος.
- Βοηθούν τους μαθητές να αντιληφθούν τη χρήση των μαθηματικών στην καθημερινότητά τους και το ευρύτερο κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον τους.
- Διευκολύνουν τη συνεργασία σε ομάδες, υποστηρίζοντας συνήθειες όπως: να ακούν και να προσπαθούν να κατανοούν τις εξηγήσεις των συμμαθητών τους, να συζητούν τις διαφωνίες τους στην ομάδα, να καταλήγουν σε κοινά αποδεκτές λύσεις.

3. Μαθηματικά έργα και μαθηματική δραστηριότητα: επιλογή/σχεδιασμός & διαχείριση στην τάξη

Μαθηματικό έργο και μαθηματική δραστηριότητα: Το μαθηματικό έργο είναι το έργο ή η εργασία που αναθέτει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές, ενώ η μαθηματική δραστηριότητα αφορά τις δράσεις που αναλαμβάνουν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να φέρουν σε πέρας ένα έργο που τους έχει ανατεθεί. Το μαθηματικό έργο μπορεί να είναι ένα παιχνίδι ή μια άσκηση ή ένα πρόβλημα ή ακόμα και μια ερώτηση που θα θέσει ο εκπαιδευτικός στην τάξη και έχει ως στόχο να προκαλέσει μαθηματική δραστηριότητα. Αν και ένα έργο προορίζεται να προκαλέσει συγκεκριμένη μαθηματική δραστηριότητα, πρέπει να γίνει διάκριση ανάμεσα: α) στο μαθηματικό έργο, όπως αυτό σχεδιάστηκε αρχικά, β) στο μαθηματικό έργο, όπως παρουσιάστηκε από τον εκπαιδευτικό μέσα στην τάξη, γ) στο μαθηματικό έργο, ως αντικείμενο διαπραγμάτευσης μεταξύ των μαθητών, δ) στο μαθηματικό έργο, όπως αυτό τελικά διαμορφώθηκε ως συνισταμένη των δράσεων εκπαιδευτικών και μαθητών (Margolinas, 2013, Caleja, 2013) στο πλαίσιο της σχολικής τάξης. Ένα μαθηματικό έργο συνδέεται με συγκεκριμένα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα, και στοχεύει όχι μόνο στην ανάπτυξη συγκεκριμένων μαθηματικών γνώσεων, αλλά και στην καλλιέργεια μαθηματικών διεργασιών (π.χ. οπτικοποίηση, μοντελοποίηση κλπ.) και κοινωνικο-πολιτισμικών και κοινωνικο-συναισθηματικών πρακτικών (π.χ. σύνδεση των μαθηματικών με τον πολιτισμό) (Schoenfeld, 2020).

Επιλογή/σχεδιασμός: Ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που θα επιλέξει ή θα σχεδιάσει ένα μαθηματικό έργο και στη συνέχεια θα το διαφοροποιήσει ανάλογα με τις ανάγκες των μαθητών, ανάλογα με αυτά που ανακύπτουν κατά τη διδασκαλία, στο πλαίσιο μιας κυκλικής διαδικασίας σχεδιασμού/τροποποίησης – εφαρμογής στην τάξη – αξιολόγησης του μαθηματικού έργου. Η απλή εμπλοκή των μαθητών με ένα μαθηματικό έργο (π.χ. η επίλυση εξίσωσης), δεν είναι αρκετό για να θεωρηθεί ότι ο μαθητής αναπτύσσει μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα . Μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα προσφέρει στους μαθητές την ευκαιρία να μαθητεύσουν σε μια ποικιλία μαθηματικών πρακτικών και να μυηθούν στις μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών (όπως η απόδειξη και η γενίκευση ή η ισοδυναμία και οι μετασχηματισμοί) (Τζεκάκη, 2015).

Βασικό κριτήριο για την επιλογή/τροποποίηση ή το σχεδιασμό εξαρχής ενός μαθηματικού έργου είναι οι μαθηματικές διεργασίες ή πρακτικές που επιδιώκεται να αναπτύξει ο μαθητής. Τα μαθηματικά έργα είναι σημαντικό να βρίσκονται κοντά στα ενδιαφέροντα ή τις εμπειρίες των μαθητών, να σχετίζονται με πραγματικές καταστάσεις της καθημερινότητας και να εμπλέκουν τους μαθητές στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία συνδέσεων και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού (Artigue, 2012). Ταυτόχρονα, να είναι προκλητικά μαθηματικά αλλά και να βρίσκονται εντός των δυνατοτήτων των μαθητών. Οι μαθητές χρειάζεται, δηλαδή, να διαθέτουν και τα εργαλεία αλλά και την πρότερη γνώση, ώστε να εμπλακούν δημιουργικά σε ένα μαθηματικό έργο. Μαθηματικά έργα με πολλαπλά σημεία εισόδου, δηλαδή έργα με κυμαινόμενο βαθμό δυσκολίας ή που μπορούν να αντιμετωπιστούν με ποικίλους τρόπους, αλλά και πολλαπλά σημεία εξόδου, δηλαδή έργα που δίνουν τη δυνατότητα στα παιδιά να δείξουν με διάφορους τρόπους ότι έφεραν σε πέρας το έργο, συντελούν στη διαφοροποίηση της διδασκαλίας ανάλογα με τα ενδιαφέροντα, την προϋπάρχουσα γνώση και τις δεξιότητες των μαθητών. Τέλος, μια ποικιλία πόρων (αναπαραστάσεις, μοντέλα, χειραπτικά ή ψηφιακά εργαλεία κλπ.)

μπορεί να αξιοποιηθεί στο πλαίσιο ενός μαθηματικού έργου, ώστε στα χέρια των μαθητών οι πόροι αυτοί να μετατραπούν σε εργαλεία διερεύνησης, συλλογισμού και επικοινωνίας των μαθηματικών εννοιών. Ο κατάλληλος σχεδιασμός και η κατάλληλη διδακτική διαχείριση των μαθηματικών έργων στην τάξη συντελεί καθοριστικά στο να μειωθεί η απόσταση μεταξύ των προθέσεων του εκπαιδευτικού και της μαθηματικής δραστηριότητας – και συνεπώς τη μάθησης - που τελικά αναπτύσσουν οι μαθητές (Ainley & Margolinas, 2013).

Διδακτική διαχείριση: Δύο σημεία φαίνεται να είναι καθοριστικά ως προς τη διδακτική διαχείριση ενός μαθηματικού έργου:

- η έμφαση που δίνεται από την πλευρά του εκπαιδευτικού στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών, στη μαθηματική δραστηριότητα και μάθηση και όχι απλά στη διεκπεραίωση του έργου,
- η δυνατότητα του εκπαιδευτικού να υποστηρίζει και να συντονίζει το διάλογο και τη συζήτηση μέσα στην τάξη (Clarke & Mesiti, 2013).

Κατά την εφαρμογή ενός μαθηματικού έργου στη σχολική τάξη μπορούν να διακριθούν σύμφωνα με τους Trevisan, Ribeiro, και da Ponte, (2020) τρία στάδια: Στο πρώτο στάδιο της εισαγωγής του μαθηματικού έργου στην τάξη, ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν το πλαίσιο του έργου και να το συνδέσουν με τις προηγούμενες μαθηματικές τους γνώσεις. Παράλληλα, ενθαρρύνει τους μαθητές στην επιλογή και χρήση κατάλληλων εργαλείων (π.χ. χειραπτικών, ψηφιακών, οπτικών αναπαραστάσεων) (González, & Eli, 2017).

Στο δεύτερο στάδιο της αυτόνομης εργασίας, οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή σε ομάδες και ο εκπαιδευτικός αλληλεπιδρά μαζί τους. Καλό είναι ο εκπαιδευτικός να έχει προβλέψει κατά το σχεδιασμό του μαθηματικού έργου πιθανές στρατηγικές των μαθητών και πιθανές παρανοήσεις και να έχει σκεφτεί τρόπους και μεθόδους για να τις αναγνωρίσει και να τις αντιμετωπίσει. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να υποστηρίξει το διάλογο και τη συζήτηση στις ομάδες βοηθώντας τα παιδιά να αποσαφηνίσουν τις ιδέες τους με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα με διευκρινιστικές ερωτήσεις ή ζητώντας από ένα μαθητή να αναδιατυπώσει τις ιδέες ενός άλλου μαθητή της ομάδας του. Επίσης, ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει έμφαση στη συλλογιστική σκέψη των παιδιών και στη νοερή επιχειρηματολογία με ερωτήσεις, όπως: «Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον συμμαθητή σας; Γιατί;», «Τι θα γινόταν αν…; Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;» «Η απάντηση που δώσατε έχει νόημα; Είστε σίγουροι ότι η απάντηση που δίνετε είναι σωστή; Πώς το ξέρετε;», «Υπάρχει άλλη σωστή απάντηση;», «Υπάρχει άλλος τρόπος να βρούμε τη λύση; Πού διαφέρουν οι διαφορετικές στρατηγικές που ακολουθήσατε;» κλπ. Όταν παρέχει οδηγίες ο εκπαιδευτικός ενδείκνυται να εστιάζει κυρίως στη διαδικασία και όχι στο τελικό προϊόν της μαθηματικής διερεύνησης, για παράδειγμα μπορεί να απευθύνει στους μαθητές ερωτήσεις/υποδείξεις όπως: «Ποια είναι τα στοιχεία-κλειδιά τους προβλήματος;», «Τι αλλάζει και τι παραμένει σταθερό; Διατηρήστε όλες τις μεταβλητές πλην μιας σταθερές και αρχίστε να πειραματίζεστε με αυτή. Ποιος ο ρόλος της; Ακολουθήστε τη ίδια διαδικασία για κάθε μεταβλητή» κλπ. (Van de Walle et al., 2014).

Στο τρίτο στάδιο της συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης, οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της δραστηριότητάς τους και τις στρατηγικές που ανέπτυξαν και έτσι ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να υποστηρίξει τους μαθητές να προχωρήσουν σε συνδέσεις και επεκτάσεις των μαθηματικών ιδεών που προσεγγίστηκαν (Dooley, 2009; Stein et al., 2008), ενώ παράλληλα επικυρώνει και αξιολογεί τη μαθηματική γνώση των μαθητών (Morgan, 2000). Παρακολουθώντας την εξέλιξη των στρατηγικών των μαθητών σε όλα τα στάδια της ενασχόλησής τους με το μαθηματικό έργο ο εκπαιδευτικός μπορεί να αξιολογήσει και την επίδραση του συγκεκριμένου έργου (Ainley & Margolinas, 2013) στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

4. Μάθηση και Διδασκαλία των Μαθηματικών

(4α). Η τροχιά μάθησης & διδασκαλίας: Πρόκειται για περιγραφές της σκέψης και μάθησης ενός μαθητή σε μια συγκεκριμένη μαθηματική περιοχή καθώς και την αντίστοιχη υποτιθέμενη διαδρομή που ακολουθείται μέσα από μια σειρά διδακτικών έργων που σκοπό έχουν να ενεργοποιήσουν τα διαδοχικά αυτά στάδια ανάπτυξης. Με αυτόν τον τρόπο επιδιώκεται να ανιχνευτεί και να υποβοηθηθεί η πορεία ανάπτυξης των σταδίων σκέψης ενός μαθητή επιτυγχάνοντας συγκεκριμένους στόχους (Clements & Sarama, 2004, p. 83).

Μια τροχιά μάθησης και διδασκαλίας (ΤΜΔ) στηρίζεται στην υπόθεση ότι οι δεξιότητες και ικανότητες του μαθητή ακολουθούν μια εξελικτική πορεία η οποία επηρεάζεται από παράγοντες όπως η διδασκαλία, η μαθηματική ωρίμανση αλλά και υποκειμενικές συνιστώσες όπως οι προδιαθέσεις, οι στάσεις και τα ενδιαφέροντα. Με μια τροχιά γίνεται εφικτός ο χαρακτηρισμός των μαθησιακών στοιχείων που πλαισιώνουν μια πορεία μάθησης από ένα σημείο σε ένα άλλο καθώς και η περιγραφή των κατάλληλων ενδεχομένως διδακτικών πράξεων προκειμένου να διευκολυνθεί αυτή η μετάβαση. Οι τροχιές επομένως είναι συνυφασμένες με συγκεκριμένους διδακτικούς στόχους ή μαθησιακά αποτελέσματα και με τους τρόπους που οι μαθητές εφαρμόζουν τις προσδοκώμενες δεξιότητες και ικανότητες. Ο τρόπος χρήσης τους είναι διττός:

- οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν συγκεκριμένες σειρές από μαθηματικά έργα και δραστηριότητες προκειμένου να ενεργοποιήσουν τις νοητικές διεργασίες που οδηγούν προς την επιδιωκόμενη κατεύθυνση (ή χρησιμοποιούν ΠΣ και διδακτικά υλικά που έχουν σχεδιαστεί βασιζόμενα στην ίδια σειρά υποθέσεων).

- η σκέψη και μάθηση των μαθητών σε μια συγκεκριμένη περιοχή των Μαθηματικών, διέρχεται μέσα από τα διαδοχικά επίπεδα που θα οδηγήσουν στο προτεινόμενο μαθησιακό αποτέλεσμα με την κατάλληλη διδακτική διαχείριση.

Ο Οδηγός του εκπαιδευτικού στο Ειδικό μέρος περιγράφει την εξελικτική πορεία ανάπτυξης κάποιου/ων ΠΜΑ σε ορισμένες θεματικές περιοχές και ενίοτε παρουσιάζει κάποια τέτοια πορεία που συνάδει σε μεγάλο βαθμό με την έννοια της τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας (ΤΜΔ) που δόθηκε παραπάνω. Έτσι ο εκπαιδευτικός μπορεί να διευκολυνθεί στον σχεδιασμό της διδασκαλίας του και ειδικότερα:

- στην επισήμανση των κύριων στόχων που είναι αναγκαίο να επιτευχθούν
- στις αναγκαίες προηγούμενες γνώσεις που απαιτούνται
- στις συνδέσεις με επόμενες έννοιες και την κατοπινή εξέλιξη των εννοιών που διδάσκονται

(4β). Διδακτικές προσεγγίσεις/ στρατηγικές (teaching strategies): Προκειμένου ο εκπαιδευτικός να πετύχει στην πραγμάτωση των στόχων ενός προγράμματος σπουδών, είναι αναγκαίο να αναζητά και να διαθέτει μια ποικιλία εκπαιδευτικών μεθόδων ως εργαλεία διαμεσολάβησης μεταξύ του μαθηματικού περιεχομένου και της κατασκευής μαθηματικού νοήματος στη σχολική τάξη. Η επιλογή της κατάλληλης διδακτικής προσέγγισης απαιτεί προσεκτική μελέτη καθώς δεν υπάρχει μια γενική συνταγή για όλες τις περιπτώσεις. Όσο εγγύτερη είναι μια ακολουθούμενη διδακτική πρακτική στις ανάγκες των μαθητών, η πιθανότητα να οδηγήσει σε ένα επιθυμητό αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερη.

Στην ενότητα αυτή συζητούνται διδακτικές προσεγγίσεις και προσανατολισμοί της διδακτικής πράξης που υποστηρίζονται από τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα του πεδίου της Διδακτικής των Μαθηματικών.

(i) *Διδασκαλία βασισμένη στην έρευνα (Research based teaching)*

Ως διδασκαλία που βασίζεται στην έρευνα εννοούμε τη διδασκαλία η οποία σχεδιάζεται με βάση ευρήματα της έρευνας που αφορούν στη φύση της μαθηματικής σκέψης και μάθησης στη σχολική τάξη καθώς και τις αντίστοιχες προτάσεις διδακτικής διαχείρισης.

Ερευνητικά δεδομένα τονίζουν την αναγκαιότητα η διδακτική παλέτα των εκπαιδευτικών να περιλαμβάνει δεδομένα έρευνας περί διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών. Δηλαδή ο διδακτικός σχεδιασμός του εκπαιδευτικού οφείλει να ανανεώνεται, να εμπλουτίζεται και να αναπροσαρμόζεται στα νέα δεδομένα που αφορούν στις εκπαιδευτικές, τις γνωστικές και τις αναπτυξιακές παραμέτρους που φέρνει στο φως η έρευνα για τη μάθηση των μαθηματικών.

Μια άλλη παράμετρος που πρέπει να λαμβάνει υπόψη του ο διδακτικός σχεδιασμός είναι ο τρόπος ανάπτυξης των εννοιών στα μαθηματικά ώστε να είναι συμβατός με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μαθητών κάθε βαθμίδας: τις γνώσεις, τις εμπειρίες και το λεξιλόγιο που διαθέτουν για να μαθηματικοποιήσουν τις ιδέες τους, με δεδομένο ότι οι μαθητές δεν βλέπουν και δεν αντιλαμβάνονται τα πράγματα με τον ίδιο τρόπο όπως ο εκπαιδευτικός. Υπάρχουν σαφείς ενδείξεις ότι η απομνημόνευση των μαθηματικών και η επικέντρωση του μαθήματος σε ασκήσεις και διαδικαστική ευχέρεια δεν αρκεί για την ανάπτυξη της κατανόησης και τονίζεται η σημασία της διδασκαλίας για εννοιολογική κατανόηση.

Άλλα στοιχεία που, σύμφωνα με ερευνητικά δεδομένα, είναι χρήσιμο να περιλαμβάνονται στο σχεδιασμό της διδασκαλίας, είναι η έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση, η ενθάρρυνση της δημιουργικότητας των μαθητών, η δημιουργία συνεργατικού-συμπεριληπτικού περιβάλλοντος, η διαφοροποιημένη διδασκαλία, η δημιουργία μικρο-κοινότητων εξερεύνησης και συζήτησης στην τάξη, η χρήση αναπαραστάσεων.

(ii) *Διδασκαλία βασισμένη στη διερεύνηση (Inquiry based teaching)*

Η διδασκαλία που βασίζεται στη διερεύνηση είναι η παιδαγωγική μέθοδος κατά την οποία η οικοδόμηση νοήματος στη σχολική τάξη γίνεται με τον μαθητή στο ρόλο του ερευνητή ο οποίος ανακαλύπτει, δημιουργεί και συνθέτει νέα εργαλεία. Η ανάπτυξη ερευνητικών δεξιοτήτων θεωρούνται ως κεντρικός στόχος μάθησης και διδασκαλίας. Η εννοιολογική μάθηση αποκτά προβάδισμα έναντι της μάθησης αλγοριθμικών διαδικασιών ενώ παράλληλα μεθοδεύονται η ανάπτυξη και η εξέλιξη «συνηθειών του μυαλού» που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική σκέψη.

Σε μια τάξη διερεύνησης, οι γνωστικές συγκρούσεις που προκύπτουν όταν οι μαθητές συνειδητοποιούν την ανεπάρκεια προηγούμενων γνωστικών εργαλείων, λειτουργούν ως εργαλείο ενεργούς εμπλοκής των μαθητών με σκοπό την επανεξέταση της σκέψη τους, τη συζήτηση και αναζήτηση νέων οπτικών ή ιδεών.

Ο παρακάτω πίνακας περιγράφει ορισμένα χαρακτηριστικά μιας διερευνητικού τύπου διδακτικής προσέγγισης.

Χαρακτηριστικά μιας διδασκαλίας που υποστηρίζει την διερεύνηση	
Ο εκπαιδευτικός…	
Παρουσιάζει πλούσια μαθηματικά έργα που εμπλέκουν τους μαθητές σε διαδικασίες σκέψης ενώ συμμετέχουν ενεργά στο περιεχόμενο και πραγματοποιούν	Τα έργα που δίνονται • είναι προσεγγίσιμα από όλους τους μαθητές • περιλαμβάνουν προκλήσεις που είναι εφικτές • αναπτύσσουν την κατανόηση και εκμάθηση διαδικασιών

συνδέσεις.	• περιέχουν διαφορετικά σημεία εισόδου • εμπεριέχουν ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών • δίνουν έμφαση στην διαδικασία επίλυσης αντί για την απάντηση
Υποστηρίζει τη δημιουργία ενός συνεργατικού περιβάλλοντος που εμπλέκει τους μαθητές στην ανταλλαγή ιδεών, στην ανάπτυξη επιχειρημάτων, στην πρόκληση και στην κατασκευή των μαθηματικών τους νοημάτων.	Η ατμόσφαιρα της τάξης • υποστηρίζει τον διαμοιρασμό ιδεών και προσεγγίσεων • αξιοποιεί διαφορετικές ιδέες και οπτικές • προωθεί ανταλλαγή απόψεων και κριτική ανάλυση • αναγνωρίζει ότι οι μαθητές μπορούν να μάθουν ο ένας από τον άλλο
Χρησιμοποιεί ερωτήσεις που προωθούν το συλλογισμό και κινητοποιούν τους μαθητές να επικοινωνούν με σαφήνεια τις μαθηματικές σκέψεις και τις ιδέες τους	Οι ερωτήσεις του εκπαιδευτικού • προκαλούν τη σκέψη και τους συλλογισμούς των μαθητών • προξενούν την αποτίμηση και ανάλυση των στρατηγικών • αναδεικνύουν παρανοήσεις • στηρίζει την μάθηση από τα λάθη • προκαλεί την εξερεύνηση εναλλακτικών στρατηγικών
Παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να αναλάβουν περισσότερες ευθύνες για την εκμάθηση και τους υποστηρίζει όλο και πιο ενεργά για την εκτέλεση των εγχειρημάτων τους.	Οι μαθητές • επιλέγουν προβλήματα για να λύσουν • ρωτάνε και να απαντούν σε ερωτήσεις • παίρνουν αποφάσεις • σχεδιάζουν και ανακαλύπτουν στρατηγικές • παρουσιάζουν ιδέες • κάνουν κριτική αποτίμηση των ιδεών

(iii) *Διδασκαλία ως διαδικασία επίλυσης προβλήματος (Teaching as problem solving)*

Ως διδασκαλία επίλυσης προβλήματος (problem solving) εννοούμε τη διδασκαλία που επικεντρώνεται στην επίλυση προβλήματος, μέσα από τρεις διακριτές πρακτικές (Schroeder & Lester, 1989):

α) τη διδασκαλία μέσω της επίλυσης η οποία χαρακτηρίζεται από την εισαγωγή των νέων εννοιών μέσω της ανάγκης επίλυσης προβληματικών καταστάσεων. Με αφετηρία ένα πρόβλημα που δεν αντιμετωπίζεται με τα προηγούμενα εργαλεία, αναπτύσσονται νέες μαθηματικές τεχνικές και προσεγγίσεις. Η αναδιοργάνωση της γνώσης για την κατασκευή νέων μεθόδων και στρατηγικών, οδηγεί στην ανάπτυξη του μαθηματικού περιεχομένου και τη ταυτόχρονη σύνδεση του με την προ υπάρχουσα γνώση. Έτσι αναπτύσσεται μια σύνθετη κατανόηση που περιλαμβάνει την τυπική γνώση η οποία δομείται στη συνέχιση της διαισθητικής – εμπειρικής κατανόησης (Baroody, 2003, Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus, 2001). Για μια διδασκαλία μέσω της επίλυσης είναι απαραίτητη η επιλογή κατάλληλων προβληματικών καταστάσεων που γεφυρώνουν παλιά και νέα γνώση ώστε να διαφαίνεται η ανάγκη υιοθέτησης νέων προσεγγίσεων.

β) τη διδασκαλία της επίλυσης η οποία αφορά στη διδασκαλία στρατηγικών επίλυσης. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να παρατηρούν οι ίδιοι την εξέλιξη της πορείας τους κατά την επίλυση (μέσα από μοντέλα επίλυσης όπως του Polya). Η εστίαση είναι η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και βασίζεται στην οπτική των Μαθηματικών ως ένός τρόπου σκέψης, αναζήτησης και εύρεσης μοτίβων για την επίλυση προβλημάτων. Ο στόχος σε μια τέτοια προσέγγιση είναι η απόκτηση ελέγχου από τους μαθητές πάνω στη διαχείριση προβληματικών καταστάσεων, χρήση μεθόδων επίλυσης και ανάπτυξης της σκέψης τους. Μια διδασκαλία αυτού του τύπου περιλαμβάνει τη συζήτηση και ανάλυση κάθε συνιστώσας της διαδικασίας επίλυσης, την επισήμανση των ενεργειών των μαθητών ενώ επιλύουν προβλήματα καθώς και υιοθέτηση μεταγνωστικού τύπου ελέγχου των βημάτων της επίλυσης και στοιχείων αυτορύθμισης.

γ) τη διδασκαλία για την επίλυση προβλήματος όπου η διδασκαλία εστιάζεται στους τρόπους που οι νέες γνώσεις μπορούν να εφαρμοστούν για την επίλυση συνήθων ή μη-συνήθων προβλημάτων. Στους μαθητές δίνονται παραδείγματα εφαρμογής των μαθηματικών εννοιών μέσω της χρησιμοποίησης τους προκειμένου να επιλυθούν προβλήματα.

Η διδασκαλία μέσω της επίλυσης οδηγεί σε υψηλότερη απόδοση μαθητών και στην ανάπτυξη θετικότερων στάσεων απέναντι στα Μαθηματικά και τη χρησιμότητα τους (Harwell et al., 2007; Huntley et al., 2000; Riordan & Noyce, 2001; Schoenfeld, 2002; Thompson & Senk, 2001). Η διδασκαλία μέσω επίλυσης μπορεί να ακολουθείται από διδασκαλία για την επίλυση ώστε η νέα γνώση να εφαρμόζεται σε καινούργια πλαίσια (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001).

Σε κάθε περίπτωση διδασκαλίας προβλημάτων, περιλαμβάνεται ο τονισμός στοιχείων που αποτελούν συνιστώσες κάθε είδους επίλυσης, όπως ο προοδευτική εξέλιξη προς τον στόχο, η λειτουργική αξία του λάθους και η προσαρμοστικότητα της σκέψης.

(4γ). Διδακτικές πρακτικές (teaching practices) στην τάξη των μαθηματικών

Η ενότητα αυτή εστιάζει στις καθημερινές ‘νόρμες’ εργασίας του εκπαιδευτικού στην τάξη των μαθηματικών, όπως είναι η διαχείριση του λάθους και η διαχείριση της μαθηματικής επικοινωνίας. Πρόκειται για πρακτικές διδακτικής διαχείρισης της μάθησης των μαθηματικών σε μικρο-επίπεδο, οι οποίες διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στην διαμόρφωση του μαθηματικού νοήματος από τους μαθητές. Αρχικά, γίνεται αναφορά σε διδακτικές πρακτικές (practices) που στοχεύουν συχνότερα στην ενεργή εμπλοκή των μαθητών στην απόκτηση (acquisition) της μαθηματικής γνώσης και στην ανάπτυξη της μαθηματικής τους σκέψης και στη συνέχεια σε αυτές που προτάσσουν την δυναμική της συμμετοχής στην μαθηματική δραστηριότητα που αναπτύσσεται στην τάξη. Προφανώς, οι δυο ομάδες διδακτικών πρακτικών αλληλοεπιδρούν διαλεκτικά κατά την διάρκεια της εξέλιξης της διδασκαλίας.

(i) *Διδακτικές πρακτικές με έμφαση στη γνωστική διάσταση της εμπλοκής στη μάθηση των μαθηματικών: η περίπτωση της διαχείρισης του λάθους*

Από την βιβλιογραφία έχει επισημανθεί η παιδαγωγική αξία **του λάθους** και η διδακτική του αξιοποίηση

- Τα λάθη οδηγούν σε νέες ερωτήσεις και απορίες. Συχνά επιτρέπουν να έρθουν στην επιφάνεια έννοιες που δεν έχουν κατανοήσει σε βάθος οι μαθητές και για τις οποίες είχαν μια επιφανειακή κατανόηση.
- Τα λάθη επιτρέπουν μια βαθύτερη κατανόηση των παρανοήσεων που έχουν δημιουργήσει οι μαθητές με αποτέλεσμα ο εκπαιδευτικός να έχει καλύτερη εικόνα των αδυναμιών που πρέπει να θεραπεύσει. Η ανακάλυψη του οδηγεί στην ανάδειξη και βαθύτερη κατανόηση της λειτουργίας των επιμέρους στοιχείων του θεωρήματος, της έννοιας κλπ.
- Η αναζήτηση του λάθους μετατοπίζει το βάρος από το αποτέλεσμα προς το συλλογισμό και τη μαθηματική επιχειρηματολογία. Έτσι οι μαθητές διευκολύνονται στη σταδιακή ανάπτυξη ορθών μαθηματικών συλλογισμών.

Μια άλλη πρακτική που αφορά στη διδασκαλία είναι η διδασκαλία με έμφαση στην **εννοιολογική κατανόηση**. Η διδασκαλία με έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση και όχι μόνο στην κατάκτηση αλγοριθμικής γνώσης, περιλαμβάνει τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών εννοιών κατά τη διάρκεια της επίλυσης προβλημάτων, την χρήση και μετάβαση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, την επισήμανση μαθηματικών σχέσεων μεταξύ αριθμών, παραστάσεων, σχέσεων, σχημάτων κλπ Η εννοιολογική κατανόηση είναι η γνώση που κατανοείται (Hiebert & Carpenter, 1992) καθώς και η γνώση αυτής της γνώσης (μεταγνώση) και ως τέτοια είναι συμπληρωματική της αλγοριθμικής γνώσης. Επομένως η κατεύθυνση της διδασκαλίας είναι επιθυμητό να περιλαμβάνει την ανάπτυξη και των δυο συνιστωσών: η διδασκαλία με εννοιολογικό περιεχόμενο βοηθάει στη δημιουργία μακροπρόθεσμης κατανόησης εννοιών σε βάθος ενώ η διδασκαλία αλγορίθμων και διαδικασιών βοηθάει τη σύνδεση της εννοιολογικής κατανόησης με τη συμβολική γλώσσα. Η εκμάθηση κανόνων και συμβόλων χωρίς κατανόηση των εννοιών που βρίσκονται πίσω από αυτές, οδηγεί σε επιφανειακή κατανόηση που εύκολα μπορεί να ξεχαστεί αργότερα. Αντίθετα, η διδασκαλία με εννοιολογική κατεύθυνση (όπως για παράδειγμα κατά την επίλυση ενός προβλήματος με τη διερεύνηση στρατηγικών επίλυσης) βοηθάει στον τρόπο ανασύστασης και επαναδημιουργίας σχέσεων που ενδεχομένως ένας μαθητής δεν θυμάται.

(ii) *Διδακτικές πρακτικές με έμφαση στην κοινωνικο-πολιτισμική διάσταση της εμπλοκής στη μάθηση των μαθηματικών: η* διαχείριση της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης στην τάξη & η διαχείρισης των εργαλείων.

Η διδακτική πράξη μπορεί να προσφέρει πολλαπλές ευκαιρίες για εμπλοκή των μαθητών σε **μαθηματικές συζητήσεις** μέσα στην τάξη. Οι συζητήσεις δημιουργούν ένα περιβάλλον μέσα στο οποίο οι μαθητές μαθαίνουν να ακούνε τα επιχειρήματα των άλλων, να ασκούν κριτική και να εκφράζουν τα δικά τους. Το περιβάλλον στο οποίο αυτό υλοποιείται μπορεί να πάρει διαφορετικές μορφές: μέσω της επικοινωνίας με έναν συμμαθητή τους, με άλλα μέλη μιας ολιγομελούς ομάδας ή μέσα στην ολομέλεια της τάξης. Οι ερωτήσεις του εκπαιδευτικού ή των συμμαθητών μπορούν να αποτελέσουν το εφαλτήριο μιας συζήτησης: ερωτήσεις που αφορούν στην περιγραφή ή στην επεξήγηση μιας διαδικασίας, το σκεπτικό ενός τρόπου υπολογισμού, μιας προσέγγισης ή το σχηματισμό μιας εικασίας μπορούν να λειτουργήσουν ως αφετηρία ανάλυσης, επεξήγησης και σχηματισμού νέων ιδεών και οπτικών. Οι συζητήσεις μπορούν να προκληθούν και μετά από κατάλληλες ερωτήσεις του εκπαιδευτικού που επεκτείνουν τις σκέψεις των μαθητών, τους προκαλούν ή τους ξαφνιάζουν, που τους οδηγούν στην επανεξέταση και διερεύνηση συγκεκριμένων εννοιών, ικανοτήτων και πρακτικών. Ο σχηματισμός χρήσιμων διδακτικά ερωτήσεων απαιτεί προετοιμασία από τον διδάσκοντα και ενασχόληση με θέματα που έχουν μαθηματικό ενδιαφέρον ή αποτελούν πηγές παρανοήσεων από τους μαθητές. Η χρήση ανοικτών ερωτήσεων οι οποίες δεν απαντώνται με ένα ναι ή ένα όχι ή που μπορούν να έχουν πολλαπλές απαντήσεις ή (όπως στα ρεαλιστικά προβλήματα) ελλιπή ή ασαφή δεδομένα, υποβοηθούν την ανάπτυξη συζητήσεων και συμμετοχικών διαδικασιών. Παράλληλα μεταφέρουν την εστίαση του διαλόγου από το δάσκαλο στους μαθητές και ενθαρρύνουν την έκφραση διαφορετικών οπτικών. Η υιοθέτηση ενός τέτοιου μοντέλου συζήτησης απαιτεί χρόνο εξοικείωσης από τους μαθητές.

Η διδακτική πρακτική της ενθάρρυνσης της **συνεργασίας** μέσα στην τάξη των μαθηματικών συνεισφέρει στην ανάπτυξη της γνωστικής συνιστώσας της μαθηματικής κατανόησης αλλά και στη δημιουργία θετικών στάσεων απέναντι στα μαθηματικά (MacMath, Wallace, & Xiaohong, 2009). Ένα συνεργατικό περιβάλλον επιταχύνει την ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών και παράλληλα συνεισφέρει στην ανάπτυξη αυτοπεποίθησης, συναισθημάτων ικανοποίησης και δημιουργία δεσμών συνάφειας με τα υπόλοιπα μέρη του συνόλου. Η κοινωνική δυναμική που δημιουργείται συνεισφέρει θετικά στη συμπερίληψη όλων των μαθητών σε ένα σύνολο ισότιμης συμμετοχής και δημιουργίας (Suurtamm et al., 2015). Η καλλιέργεια ισχυρών δεσμών μεταξύ των μελών συνεισφέρει στην ανάπτυξη της συνοχής της ομάδας και στην εκμάθηση τεχνικών συνεργασίας και συνεισφοράς σε ένα σύνολο. Παράλληλα, οι συνεργατικές τεχνικές είναι πιο αποτελεσματικές κατά την επίλυση προβλημάτων καθώς η έκφραση διαφορετικών ιδεών οδηγεί συχνά σε καλύτερη κατανόηση των επόμενων σταδίων επίλυσης και διερεύνησης (Fleming, 2000).

Οι μαθητές μπορούν να ενθαρρύνονται να «κάνουν» Μαθηματικά μέσα από διαδικασίες που υποβοηθούν την εξερεύνηση και τη δημιουργία. Τρόποι ενεργούς εμπλοκής των μαθητών, μπορεί να είναι μέσω:

1. της ενεργούς αλληλεπίδρασης με άλλους μαθητές
2. της διερεύνησης μαθηματικών εννοιών με διαφορετικούς τρόπους (π.χ κιναισθητικός, αναλυτικός, εικονιστικός κλπ)
3. της εμπλοκής τους σε συζητήσεις με σκοπό την ανάπτυξη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας
4. της διάθεσης ικανοποιητικού χρόνου για την ανάπτυξη και επεξεργασία των ιδεών τους.

Παράλληλα η συνεργασία και η ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία μάθησης, συντελεί στην αντιμετώπιση της **μαθηματικοφοβίας** (δηλαδή στην αντιμετώπιση συναισθημάτων άγχους, νευρικότητας και αποφυγής όταν ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με μαθηματικά προβλήματα, Stuart, 2000). Οι αιτίες μπορεί να αναζητηθούν στην έλλειψη αυτοπεποίθησης στις μαθηματικές ικανότητες του ίδιου του μαθητή, οι αντιλήψεις του εκπαιδευτικού, των άλλων μαθητών, του οικογενειακού ή κοινωνικού περιβάλλοντος. Λόγω της συσχέτισης που έχει η μαθηματικοφοβία με χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά, είναι σημαντικό να υιοθετηθούν στρατηγικές από τον εκπαιδευτικό μείωσης της, όπως (Jackson & Leffingwell, 1999) :

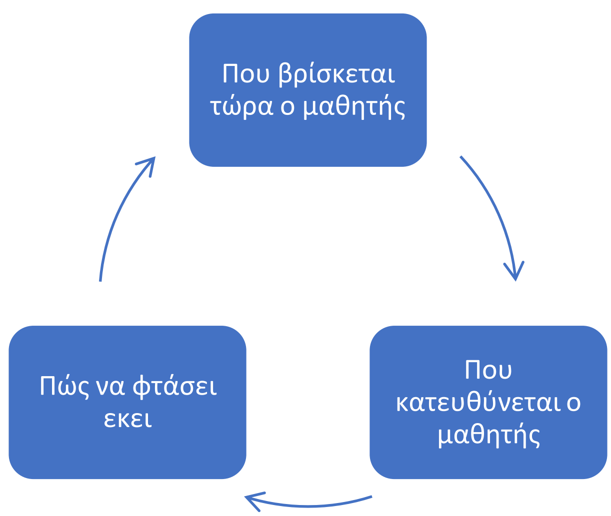
1. συνειδητοποίηση της επίδρασης του εκπαιδευτικού στους μαθητές
2. προβολή θετικής στάσης απέναντι σε κάθε μαθητή ξεχωριστά
3. ενθάρρυνση όλων των ερωτήσεων, αποριών κλπ των μαθητών
4. συμπερίληψη των ενδιαφερόντων των μαθητών στις δραστηριότητες της τάξης
5. αφιέρωση περισσότερου χρόνου σε μαθητές που έχουν μεγαλύτερη απόσταση από τα Μαθηματικά.
6. χρήση ποικίλλων ειδών υλικών (π.χ γραπτές οδηγίες, λινκς, εποπτικό-χειραπτικό υλικό, χρήση apps) προς τους μαθητές

Παράλληλα με την αντιμετώπιση της μαθηματικοφοβίας, η δημιουργία **θετικών στάσεων** απέναντι στα Μαθηματικά είναι σημαντικός παράγοντας δημιουργίας υψηλών επιδόσεων στα Μαθηματικά (Colgan, 2014). Παράγοντες όπως η στήριξη του εκπαιδευτικού στους μαθητές, η υιοθέτηση θετικών στάσεων και προδιαθέσεων από τον ίδιο τον διδάσκοντα και η συνεργασία με τους γονείς/κηδεμόνες των μαθητών μπορούν να βοηθήσουν σε αυτή την κατεύθυνση.

5. Βασικές Αρχές της Αξιολόγησης

Η *αξιολόγηση* συμβάλλει στην εξέλιξη της γνωστικής ανάπτυξης των μαθητών και των μαθητριών και υποστηρίζει τη διαδικασία λήψης αποφάσεων για τη διδασκαλία και τη μάθηση (NCTM, 2000). Η αξιολόγηση δεν συνιστά μια διακριτή συνιστώσα της διδασκαλίας, αλλά συμπεριλαμβάνει τις διδακτικές πρακτικές και αναδεικνύει τις κατανοήσεις που έχουν επιτευχθεί.

Οι μορφές αξιολόγησης εντάσσονται γενικότερα σε δύο κυρίως κατευθύνσεις, την τελική και τη διαμορφωτική. Η *τελική* αξιολόγηση συνιστά μια αποτίμηση αθροιστικού χαρακτήρα, η οποία υποστηρίζει ελάχιστα τις διδακτικές αποφάσεις ή τον εντοπισμό παρανοήσεων, καθώς λειτουργεί αποσπασματικά. Με τη *διαμορφωτική* αξιολόγηση καθορίζεται το "σημείο" στο οποίο το άτομο τοποθετείται γνωστικά σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα, ενώ η τοποθέτηση αυτή ερμηνεύεται και αξιοποιείται για τη λήψη αποφάσεων και για τον επανασχεδιασμό της διδασκαλίας. Βασικές πτυχές της διαμορφωτικής αξιολόγησης αποτελούν (α) ο προσδιορισμός του "σημείου" στο οποίο τοποθετείται γνωστικά το άτομο, (β) ο καθορισμός των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων, (γ) η επιλογή τρόπων επίτευξης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων και (δ) ο σχεδιασμός για μελλοντική δράση (van de Walle, 2017).



Σχήμα 3

Με βάση την προβληματική που αναπτύχθηκε παραπάνω, υιοθετείται η προσέγγιση της αξιολόγησης που στοχεύει στη μάθηση (assessment for learning) και ανατροφοδοτεί μαθητές και εκπαιδευτικούς. Η αξιολόγηση για τη μάθηση αξιοποιεί το σύνολο των διαδικασιών αξιολόγησης, τόσο τις διαμορφωτικές όσο και τις αθροιστικές, ενώ πραγματοποιείται περισσότερες από μία φορές κατά τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας. Στο πλαίσιο της αξιολόγησης για τη μάθηση, οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν την αξιολόγηση ως εργαλείο διερεύνησης της γνώσης και των ικανοτήτων των μαθητών, των παρανοήσεων, των προκαταλήψεων ή των ελλειμμάτων που μπορεί να έχουν.

Τα *εργαλεία αξιολόγησης* που προτείνονται στο πλαίσιο της αξιολόγησης με στόχο τη μάθηση δίνουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να συλλέξει δεδομένα ώστε να αποκτήσει μια συνολική θέαση της μαθησιακής πορείας και της διδασκαλίας και να λάβει τεκμηριωμένες αποφάσεις για την ενίσχυση της μάθησης και την εξέλιξη της διδασκαλίας. Σε αυτή την κατεύθυνση η αξιολόγηση, η διδασκαλία και η μάθηση αλληλοτροφοδοτούνται.

Η προσέγγιση της αξιολόγησης για τη μάθηση υιοθετεί μια κυκλική αντίληψη *σύνδεσης της αξιολόγησης με τις διδακτικές πρακτικές* του εκπαιδευτικού. Ειδικότερα, η αξιολογική διαδικασία θεωρείται πλήρως ενσωματωμένη στη διδασκαλία και αναπτύσσεται σε τέσσερα στάδια με βάση το σχήμα 4 παρακάτω.

Η κριτική διερεύνηση της μάθησης και της διδασκαλίας, ο σχεδιασμός, η μάθηση μέσα από τη διδακτική πρακτική και η ανάπτυξη αναστοχαστικών διαδικασιών ως μέρους του επανασχεδιασμού της διδασκαλίας και της αξιολόγησης συνιστούν ένα πλαίσιο ανάπτυξης των διδακτικών πρακτικών αλλά και του ίδιου του εκπαιδευτικού.

Σχήμα 4

6. Ο κύκλος σχεδιασμού, υλοποίησης και αξιολόγησης της διδασκαλίας ως πλαίσιο ανάπτυξης της διδακτικής πρακτικής και του εκπαιδευτικού

Σύγχρονες θεωρήσεις για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά προτείνουν την επαγγελματική μάθηση και τη συνεργασία μέσα από κοινότητες πρακτικής (Wenger, 1998) και κοινότητες διερεύνησης (Jaworski, 2006).

Κοινότητα πρακτικής: τα άτομα "μοιράζονται" την επαγγελματική γνώση σε κοινές δράσεις και αλληλεπιδρούν στο πλαίσιο ενός κοινού εγχειρήματος. Η συμμετοχή του ατόμου στην κοινότητα πρακτικής αφορά τη διαπραγμάτευση και επαναδιαπραγμάτευση του εγχειρήματος, (Lave & Wenger, 2005).

Η μάθηση των μελών μιας κοινότητας πρακτικής πραγματοποιείται μέσω μιας διαδικασίας νόμιμης 'περιφερειακής συμμετοχής'. Στο πλαίσιο αυτό, η διδασκαλία αποτελεί μαθητεία σε μια κοινότητα πρακτικής, η οποία απαρτίζεται από έμπειρα και μη μέλη, τα οποία δεσμεύονται σε ένα κοινό εγχείρημα/ μια κοινή δράση και "μοιράζονται" το ίδιο ρεπερτόριο (Wenger, 1998). Χαρακτηριστικά μιας κοινότητας πρακτικής είναι η *δέσμευση* στην κοινότητα, η *εικόνα-ταυτότητα* των ατόμων που την απαρτίζουν και η *ευθυγράμμιση* με τους στόχους της κοινότητας.

Κοινότητα διερεύνησης: σε συνέχεια της παραπάνω προβληματικής, η Jaworski (2012) ανέδειξε τη διερεύνηση ως *εργαλείο* επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά, μέσα από τη διδασκαλία στην τάξη, και ως *διαδικασία*, μέσα από την οποία οι εκπαιδευτικοί κατασκευάζουν ατομικές και συλλογικές εννοιολογικές κατανοήσεις και πρακτικές ως μέλη της κοινότητας πρακτικής, ενώ εισάγει τον όρο της 'κριτικής ευθυγράμμισης' ως της κριτικής που ασκούν εκπαιδευτικοί και ερευνητές στους στόχους, τις δράσεις και τις προοπτικές της κοινότητας πρακτικής (Goos, 2014). Η εξασφάλιση χρόνου για τη συνεργασία εκπαιδευτικών στο σχολείο αποτελεί σημαντικό παράγοντα υποστήριξης της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών (Sakonidis & Potari, 2014).

Προσέγγιση Lesson study: Στο πλαίσιο της προσέγγισης επαγγελματικής ανάπτυξης Lesson study οι εκπαιδευτικοί συνεργάζονται για να σχεδιάσουν τα μαθήματά τους και εκφράζουν τον προβληματισμό τους για τη διδασκαλία που πρόκειται να πραγματοποιήσουν. Ειδικότερα, οι εκπαιδευτικοί διαβάζουν και κατανοούν το μάθημα που έχει επιλεγεί να μελετηθεί σε συνθήκες πραγματικής τάξης, προετοιμάζονται για τη συλλογή δεδομένων που αφορούν τους μαθητές και ορίζουν τον εκπαιδευτικό και την τάξη στην οποία θα πραγματοποιηθεί. Οι εκπαιδευτικοί, σε αυτό το πλαίσιο, επανεξετάζουν τον σχεδιασμό του «μαθήματος προς μελέτη» και τα εργαλεία συλλογής δεδομένων, διδάσκουν και παρατηρούν το μάθημα και τους μαθητές (ένα μέλος της ομάδας διδάσκει και οι υπόλοιποι παρατηρούν χρησιμοποιώντας τα εργαλεία παρατήρησης που έχουν προαποφασίσει), ενώ η ομάδα οργανώνει και σχηματοποιεί/ ομαδοποιεί τα δεδομένα που προκύπτουν από την παρατήρηση των μαθητών. Τέλος, «μοιράζονται» κατά ζεύγη τις παρατηρήσεις/ σημειώσεις τους, αναλύουν και συζητούν τα συμπεράσματα από τα δεδομένα που συλλέγουν και (ως ομάδα) αναστοχάζονται σε σχέση με τη μάθηση που επιτεύχθηκε και το τι σήμαινε αυτό για τη δική τους διδασκαλία.

Οι εκπαιδευτικοί εργάζονται σε ένα μάθημα, αντιμετωπίζοντάς το, καταρχάς, ως το «καλύτερο» μάθημα που θα μπορούσαν να ετοιμάσουν, αφιερώνουν χρόνο για να συλλέξουν δεδομένα, συμπληρώνοντας φύλλα παρατήρησης, για να αναστοχαστούν, δηλαδή οι εκπαιδευτικοί δημιουργούν μαθήματα από τα οποία πρόκειται να μάθουν. Μέσω της παρατήρησης οι εκπαιδευτικοί εξασφαλίζουν ότι θα συζητήσουν για όσα συμβαίνουν πραγματικά στην τάξη και λαμβάνουν ενήμερες (informed) αποφάσεις, οι οποίες βασίζονται σε γεγονότα της τάξης (Dudley et al., 2019).

Στο πλαίσιο της προσέγγισης επαγγελματικής ανάπτυξης Lesson study οι εκπαιδευτικοί έχουν τον απαιτούμενο χρόνο για να σχεδιάσουν ένα μάθημα, να αλληλεπιδράσουν, να αναπτύξουν τη σκέψη τους και να προβληματιστούν σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, και αναλαμβάνουν την ευθύνη για την ατομική επαγγελματική εξέλιξη, εστιάζοντας την προσοχή τους στους δικούς τους μαθητές.

Αναφορές

Bussi, M. (2011). Artifacts and utilization schemes in mathematics teacher education: place value in early childhood education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 93-112.

Cai, J. & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 287-301.

Dudley, P., Xu, H., & Lang, J. (2019) Empirical evidence of the impact of lesson study on: students’ achievement, teachers’ professional learning and on institutional and system evolution: an illustrative, complex case-development exemplar in London. *European Journal of Education*.

English, L. (1997). Promoting a Problem-Posing classroom. *Teaching Children Mathematics*, 4, 172-179.

Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics* 66, 61-75.

Goos, M. (2014). Researcher–teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. *ZDM,* 46(2), 189–200. doi:10.1007/s11858-013-0556-9.

Goos, M., Stillman, G. & Vale, C. (2007) Teaching Secondary School Mathematics, Allen & Unwin Academic.

Hanna, G., & de Villiers, M. (Eds.) (2012) Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997) Mathematical tasks and student cognition: Classroom based factors that support and inhibit high level mathematical thinking and reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 28(5), 524–549.

Ing, M., Webb, N., Franke, M., Turrou, A., Wong, J., Shin. N. Fernandez, C. (2015). Student participation in elementary mathematics classrooms: the missing link between teacher practices and students' achievement? *Educational Studies in Mathematics* 66, 341-356.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching.*Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(2), 187–211.

Jaworski, B. (2012). Mathematics teaching development as a human practice: identifying and drawing the threads. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education,* 44, 613–625.

Mariotti M. A. (2000) Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment, Educational Studies in Mathematics 44: 25–53.

NCTM (2000) Principles and Standards for School Mathematics. The National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author

Sakonidis, C., & Potari, D. (2014). Mathematics teacher educators'/researchers' collaboration with teachers as a context for professional learning. *ZDM, 46*(2), 293–304. doi:10.1007/s11858-014-0569-z.

Stein, M. K., & Kim, G. (2009) The role of mathematics curriculum materials in large scale urban reform. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd (Eds.), Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction (pp. 37-55). New York: Routledge.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge University Press

Wood, T. (2000). Differences in teaching and opportunities for learning in primary mathematics classes. *ZDM*, 5, 149-154.

Α. ΕΙΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

a. Αριθμός, Άλγεβρα και Ανάλυση

1. Σημασία του πεδίου

Πραγματικοί Αριθμοί

Στο Λύκειο η μελέτη των αριθμών επικεντρώνεται στην εμβάθυνση των γνώσεων των ιδιοτήτων του συνόλου των πραγματικών αριθμών και των βασικών υποσυνόλων του, δηλαδή των φυσικών, ακεραίων, ρητών και άρρητων αριθμών . Οι πραγματικοί αριθμοί είναι άμεσα συνδεδεμένοι με όλα τα φαινόμενα της πραγματικής ζωής που αποτυπώνονται με μαθηματικά αντικείμενα (μεταβλητές, εξισώσεις, συναρτήσεις, κλπ). Για αυτό και η γνώση των ιδιοτήτων και των εφαρμογών των πραγματικών μαθητών αποτελεί βασική κατεύθυνση του Προγράμματος Σπουδών σε όλες τις τάξεις της δωδεκάχρονης εκπαίδευσης. Στην επίλυση προβλημάτων και την μοντελοποίηση κυριαρχεί η χρήση των πραγματικών αριθμών και ειδικότερα στην ερμηνεία και κατανόηση φαινομένων από τη Φυσική, την Βιολογία, την Οικονομία και συμβάλει στην υλοποίηση κοινωνικοπολιτισμικών διδακτικών στόχων.

Άλγεβρα

Κανονικότητες, Συναρτήσεις, Αλγεβρικές Παραστάσεις, Αλγεβρικές Σχέσεις (Ισότητες – Ανισότητες) και Σύνολα

Η Άλγεβρα αποτελεί ένα σημαντικό μέρος του μαθηματικού περιεχομένου στο Λύκειο. Χωρίζεται στις θεματικές ενότητες: Κανονικότητες, Συναρτήσεις, Αλγεβρικές Παραστάσεις, Αλγεβρικές Σχέσεις (Ισότητες – Ανισότητες) και Σύνολα. Ακολουθεί η ανάλυση της σημασίας του μαθηματικού περιεχομένου της Άλγεβρας στο Πρόγραμμα Σπουδών ανά θεματική ενότητα.

Κανονικότητες-Συναρτήσεις

Η συνάρτηση από τις προηγούμενες τάξεις του Γυμνασίου έχει αναδειχθεί σε θεμελιώδη έννοια των Μαθηματικών. Η αναζήτηση των σχέσεων και γενικότερα, αναλλοίωτων χαρακτηριστικών μεταξύ μεταβλητών ποσοτήτων καθώς και του τρόπου συμμεταβολής τους είναι η βάση της μαθηματικής δραστηριότητας. Ο «συναρτησιακός» τρόπος σκέψης αποτελεί την οπτική πάνω στην οποία θα βασιστεί η ανάπτυξη όλων των υπόλοιπων μαθηματικών εννοιών και προτάσεων. Η ενασχόληση των μαθητών με αυτό το πεδίο μπορεί να βοηθήσει στην καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης (διερεύνηση, εικασία, μοντελοποίηση) και να αποτελέσει ένα σημείο εισαγωγής στις συναρτήσεις και την άλγεβρα. Η κατανόηση των συναρτήσεων ως διαδικασία που περιλαμβάνει συμεταβαλόμενες μεταβλητές είναι απαραίτητη προκειμένου να γίνουν κατανοητές αργότερα έννοιες όπως ρυθμός μεταβολής και η ολοκλήρωση (Cottrill et al., 1996).

Αλγεβρικές Παραστάσεις

Η σημασία του πεδίου έχει αναδειχθεί στο Δημοτικό και κυρίως στο Γυμνάσιο. Στο Λύκειο παρουσιάζονται μερικές μορφές αλγεβρικών μετασχηματισμών που σχετίζονται με τη ν-στη ρίζα και τους άρρητους αριθμούς.

Αλγεβρικές Σχέσεις

Οι Αλγεβρικές Σχέσεις ομαδοποιούνται σε Ισότητες και Ανισότητες. Η εξίσωση, η ανίσωση και τα συστήματα (γραμμικά και μη-γραμμικά) εξισώσεων αποτελούν ίσως τα σημαντικότερα μαθηματικά εργαλεία επίλυσης προβλημάτων και μοντελοποίησης. Η μαθηματικοποίηση μιας πραγματικής κατάστασης ή ενός φαινομένου μέσω εξίσωσης, ανίσωσης ή συστήματος επιτρέπει καταρχάς την βαθύτερη κατανόηση του φαινομένου, ενώ η επίλυσή τους και η ερμηνεία των λύσεων στο πλαίσιο του προβλήματος συμβάλει στην εξαγωγή συμπερασμάτων που αφορούν το υπό εξέταση πρόβλημα. Επομένως, οι Ισότητες και Ανισότητες συνιστούν κατάλληλα μαθηματικά αντικείμενα για τη σύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο.

Σύνολα

Η θεωρία συνόλων αποτελεί τη βάση της θεμελίωσης των Μαθηματικών και την γλώσσα έκφρασης των μαθηματικών ισχυρισμών. Επίσης αποτελεί γλώσσα έκφρασης σε πολλά επιστημονικά πεδία εκτός των μαθηματικών. Η μελέτη των βασικών σχέσεων των συνόλων μπορεί να υποβοηθήσει την ανάπτυξη της αφηρημένης σκέψης των μαθητών. Για αυτό είναι ιδιαίτερα κρίσιμο να γίνει κατανοητή και εφαρμόσιμη από όλους του μαθητές.

Ανάλυση

Η διδασκαλία της Μαθηματικής Ανάλυσης στο Λύκειο αποτελεί την εισαγωγή των μαθητών σε μια σημαντική περιοχή των Μαθηματικών με πλήθος εφαρμογών σε πολλούς τομείς των μαθηματικών καθώς και σε άλλες επιστήμες. Η πληθώρα των εφαρμογών της Ανάλυσης σε όλα τα επιστημονικά πεδία δεν είναι ο μοναδικός λόγος διδασκαλίας της. Η Ανάλυση βρίσκεται στον πυρήνα της σύγχρονης επιστημονικής οπτικής που έχουμε για τον κόσμο. Η γλώσσα έκφρασης και επικοινωνίας κάθε επιστημονικού κλάδου είναι τόσο συνυφασμένος με τον τρόπο σκέψης του Απειροστικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού, που δεν μπορεί να ιδωθεί εκτός αυτού του πλαισίου. Δεν είναι τυχαίο που η Ανάλυση θεωρείται ως ένα από τα κορυφαία επιτεύγματα της ανθρώπινης διανόησης (Edwards, 1979). Χάρη στην Ανάλυση δόθηκε ακριβής μαθηματική έκφραση σε θεμελιώδεις έννοιες όπως η κίνηση, η συνέχεια, η μεταβολή και το άπειρο (ορισμένες πλευρές του) οι οποίες έχουν αποτελέσει τη βάση για επιστημονικές και φιλοσοφικές αναζητήσεις από την αρχαιότητα. Οι σημαντικότερες εξισώσεις της Μηχανικής, της Αστρονομίας και των φυσικών επιστημών είναι διαφορικές και ολοκληρωτικές εξισώσεις που μελετήθηκαν και επιλύθηκαν κατά την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού τον 17ο αιώνα. Προβλήματα που παρέμεναν άλυτα για αιώνες, με την έλευση και ανάπτυξη των μεθόδων της Ανάλυσης, μπορούν σήμερα και επιλύονται από μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ο εξαιρετικά ισχυρός μηχανισμός των θεωρημάτων και υπολογιστικών τεχνικών του Απειροστικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού αποτελούν ένα παράδειγμα της αξίας και της αποτελεσματικότητας των Μαθηματικών. Η Ανάλυση έχει τρεις συνιστώσες: ένα σύνολο αλγορίθμων ή κανόνων, μια θεωρία που εξηγεί το γιατί οι κανόνες λειτουργούν και εφαρμογές (της θεωρίας και των κανόνων) σε θεμελιώδη προβλήματα της επιστήμης. Παράλληλα απαιτεί την ανάπτυξη ενός τρόπου σκέψης ποιοτικά διαφορετικού από αυτόν που γνώρισαν οι μαθητές στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία. Ο πυρήνας αυτού του διαφορετικού τρόπου σκέψης είναι οι άπειρες διαδικασίες και ο προσδιορισμός αγνώστων ποσοτήτων μέσα από την προσέγγιση τους οσοδήποτε κοντά από γνωστές ποσότητες. Οι θεματικές ενότητες στις οποίες υποδιαιρείται η μελέτη της Ανάλυσης στην Τρίτη τάξη του Λυκείου είναι η σύγκλιση, η διαφόριση και η ολοκλήρωση.

Σύγκλιση

Η έννοια του ορίου είναι μια ιδιαίτερα δύσκολη έννοια, χαρακτηριστική του είδους σκέψης που απαιτείται στα ανώτερα μαθηματικά. Κατέχει κεντρική θέση που διεισδύει σε ολόκληρη τη μαθηματική ανάλυση - ως θεμέλιο της θεωρίας προσέγγισης, της συνέχειας, του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού. Πολλοί ερευνητές θεωρούν ότι η κατανόηση της έννοιας του ορίου είναι θεμελιώδης για την μελέτη ολόκληρου του κλάδου της Ανάλυσης (π.χ, Bezuidenhout, 2001). Πράγματι, το όριο βρίσκεται σε διάφορα μαθηματικά πλαίσια όπως η σύγκλιση ακολουθιών και σειρών (γεωμετρικών προόδων) η μελέτη της συμπεριφοράς πραγματικών συναρτήσεων και προβλήματα μοντελοποίησης.

Διαφόριση

Κεντρική έννοια της διαφόρισης αποτελεί η παράγωγος συνάρτησης, σε σημείο και σε διάστημα των πραγματικών αριθμών. Η παράγωγος είναι το βασικό εργαλείο στη μελέτη των χαρακτηριστικών μιας συνάρτησης, όπως η μονοτονία και τα ακρότατα, η κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Έτσι, είναι εφικτός ο σχηματισμός της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και γενικότερα η εξαγωγή συμπερασμάτων για την συμπεριφορά της σε όλο το πεδίο ορισμού της καθώς και η επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων με πολύπλοκη μορφή. Η παράγωγος είναι μια μορφή συμμεταβολής και εκφράζει το ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους, σε πλήθος προβλημάτων και φαινομένων του φυσικού, κοινωνικού και οικονομικού περιβάλλοντος, όπως είναι η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σώματος, η ένταση ηλεκτρικού ρεύματος, το οριακό κόστος μιας επιχείρησης. Αυτή η διττή σημασία της παραγώγου, ως ρυθμός μεταβολής και ως εργαλείο της μελέτης των χαρακτηριστικών της συνάρτησης συνθέτει τη σημαντικότητα του διαφορικού λογισμού στα μαθηματικά και ειδικότερα στα σχολικά μαθηματικά.

Ολοκλήρωση

Η ολοκλήρωση αποτελεί μια πολύ ισχυρή μέθοδο επίλυσης προβλημάτων που δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με καθαρά γεωμετρικές ή αλγεβρικές μεθόδους. Έχοντας ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, από γεωμετρικές εφαρμογές όπως στον υπολογισμό εμβαδών και όγκων, σε εφαρμογές σε προβλήματα Φυσικής όπως στον υπολογισμό μάζας και έργου ή σε προβλήματα οικονομίας, βοηθούν στην κατανόηση και μοντελοποίηση του πραγματικού κόσμου. Το θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, βοηθάει στην περιγραφή της σχέσης που έχουν οι δυο βασικές έννοιες της Ανάλυσης (διαφόριση και ολοκλήρωση) και την σύνδεση τους μέσα από ένα δίκτυο διαφορετικών αναπαραστάσεων (γραφικής, αναλυτικής, μέσω χρήσης μοντέλων από τη Φυσική).

2. Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης και δυσκολίες των μαθητών: Αριθμοί

Στο Γυμνάσιο, στην υποδιαίρεση του πεδίου Ι: Αριθμός, το Πρόγραμμα Σπουδών έχει σκοπό να ενισχύσει την ανάδειξη των δομικών στοιχείων των αριθμητικών συνόλων που διδάσκονται στο Δημοτικό, με έμφαση στις πράξεις των αριθμών, αξιοποιώντας την άτυπη αριθμητική γνώση των μαθητών. Επιπλέον γίνεται η επέκταση της έννοιας και των ιδιοτήτων των φυσικών στους ακεραίους και των ακεραίων στους ρητούς. Στη Β και Γ τάξη του Γυμνασίου εισάγεται η έννοια της τετραγωνικής ρίζας και των άρρητων αριθμών.

Στο Λύκειο, εισάγεται επιπλέον η έννοια της ν-στής ρίζας και ορισμένοι άρρητοι αριθμοί όπως ο αριθμός e. Στα μαθηματικά προσανατολισμού ορίζονται οι δυνάμεις με εκθέτη πραγματικό αριθμό και οι λογάριθμοι. Οι λογάριθμοι ορίζονται μέσω της λογαριθμικής συνάρτησης η οποία είναι αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής.

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στην εννοιολογική κατανόηση των ρητών και άρρητων αριθμών. Μία από τις σημαντικότερες δυσκολίες είναι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών, η κλασματική, ως πηλίκο δύο ακεραίων και η δεκαδική, ως δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων ή ως περιοδικός δεκαδικός αριθμός. Μια συνήθης δυσκολία αφορά τα επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία στους ρητούς αριθμούς, όπως συμβαίνει για παράδειγμα με την ισότητα $1=0.999\ldots$. Σύγχυση επίσης προκαλεί η δεκαδική προσέγγιση ενός άρρητου αριθμού η οποία συχνά χρησιμοποιείται σε αριθμητικούς υπολογισμούς, χωρίς να γίνεται πάντα κατανοητό ότι δεν αποτελεί διαφορετική αναπαράσταση του άρρητου αριθμού αλλά προσέγγισή του από έναν ρητό. Επίσης, μαθησιακές δυσκολίες παρατηρούνται αναφορικά με την πυκνότητα και τη διαδοχικότητα στους ρητούς και άρρητους αριθμούς (Merenluoto and Lehtinen, 2002; Voskoglou and Kosyvas, 2012).

Στη Β΄ Λυκείου στο μάθημα προσανατολισμού εισάγεται η μαθηματική επαγωγή ως μέθοδος απόδειξης η οποία αποτελεί ένα από τα βασικά μαθηματικά αποδεικτικά σχήματα που μαθαίνει ο μαθητής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι μαθητές συναντούν την μαθηματική επαγωγή ως διαδικασία αφού έχουν σχηματίσει μια ευρεία διαισθητική αντίληψη των φυσικών αριθμών. Αν και οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τους φυσικούς αριθμούς ωστόσο η γενίκευση, η αυστηρή χρήση αποδεικτικών μεθόδων για την αιτιολόγηση ισχυρισμών και η μαθηματική επιχειρηματολογία σχηματίζουν συχνά εμπόδια στην κατανόηση.

Οι δυσκολίες των μαθητών σχετίζονται κυρίως με:

- τις πολλαπλές ερμηνείες και εφαρμογές της έννοιας της διαιρετότητας (αλγοριθμικής πράξης, έκφρασης περιοδικότητας – επαναληπτικότητας, ανάλυσης αρθμού σε γινόμενο, πλήθος παραγόντων)
- την αποδεικτική διαδικασία και ειδικότερα την πλήρη αιτιολόγηση ισχυρισμών και συμπερασμάτων.

Ειδικότερα, σε σχέση με την μαθηματική επαγωγή, από την έρευνα προκύπτουν οι εξής δυσκολίες:

- ο κυκλικός συλλογισμός ο οποίος οδηγεί τους μαθητές να θεωρούν ότι στο επαγωγικό βήμα η P(n) είναι αληθής για κάθε n (Ernest, 1984; Movshoviz-Hadar, 1993)
- οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες στηην εφαρμογή τεχνικών απόδειξης κατά τη μετάβαση : $P(n) \rightarrow P(n+1)$ (Nardi & Iannone, 2003).
- η αναγκαιότητα του βήματος της βάσης, δηλαδή η επαλήθευση ότι η P(1) αληθευει, παραμελείται συχνά από τους μαθητές (Dubinsky & Lewin, 1986; Stylianides et al., 2007).
- η έλειψη συνειδητοποίησης ότι η μαθηματική επαγωγή λειτουργεί εντός του συνόλου των φυσικών και όχι σε μεγαλύτερα σύνολα όπως των πραγματικών, οδηγεί σε λάθη δομικής μορφής εφαρμογής της μαθηματικής επαγωγής (Stylianides et al., 2007).

Ενδεικτικά έργα και δραστηριότητες

Έργο 1. (Α΄ Λυκείου, Αριθμοί)

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Υπολογισμός, αναπαράσταση, συσχέτιση με οικείες και διαισθητικές ιδέες, τεκμηρίωση,</td><td rowspan="3">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="3">ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Α Λυκείου/ανισότητες/γραφικές παραστάσεις</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μετασχηματισμοί</td></tr>
</table>

			εικασία		σε όλους
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων, Συλλογισμού & επιχειρηματολογίας	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Να ερμηνεύουν καταστάσεις στον προσωπικό, εργασιακό και ευρύτερα κοινωνικό τους βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά	***Συγκείμενο***	Αριθμητική, Φυσική		

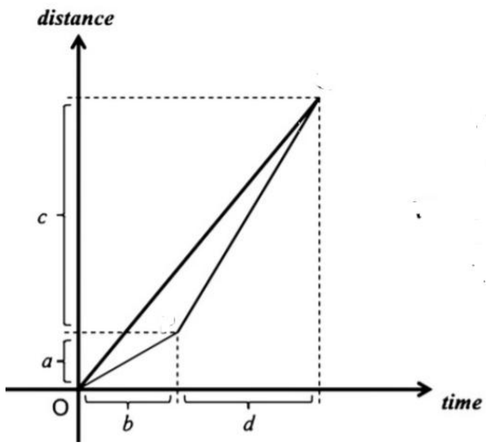
Ένας μαθητής ξεκινώντας με βάση τα κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ υπολόγισε το κλάσμα με αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το αντίστοιχο άθροισμα των παρονομαστών ως εξής: $\frac{1+3}{2+4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ και βρήκε ότι το νέο κλάσμα είναι μεταξύ των αρχικών: $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

α) Συζητήστε με έναν συμμαθητή σας αν αυτό είναι τυχαίο. Δώστε ακόμη ορισμένα παραδείγματα.

β) Πώς μπορεί να διατυπωθεί αλγεβρικά η παραπάνω «ιδιότητα» που ανακάλυψε ο μαθητής;

γ) Μπορείτε να αποδείξετε τη σχέση: αν α,β, γ ,δ θετικοί ώστε $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$ τότε: $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} < \frac{\gamma}{\delta}$;

δ) Στο παρακάτω διάγραμμα εκφράζουμε την κίνηση ενός κινητού που διανύει μια απόσταση α σε χρόνο b με ταχύτητα $\frac{\alpha}{b}$ και στη συνέχεια διανύει μια απόσταση c σε χρόνο d με ταχύτητα $\frac{c}{d}$
Αν η δεύτερη ταχύτητα είναι μικρότερη από την πρώτη ταχύτητα του κινητού μπορείτε να εξηγήσετε γιατί η μέση ταχύτητα με την οποία το κινητό διανύει το άθροισμα των αποστάσεων είναι μεταξύ των δυο ταχυτήτων; Πώς συσχετίζεται αυτό με το ερώτημα γ;



Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Ο στόχος είναι οι μαθητές να διερευνήσουν την έννοια της «πυκνότητας» και της «διαδοχικότητας» στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Στο συγκεκριμένο έργο, οι μαθητές διερευνούν την έννοια της «πυκνότητας» στους ρητούς, εφόσον έρχονται σε επαφή με έναν τρόπο εύρεσης ενός ρητού αριθμού ανάμεσα στο 1/2 και στο 3/4 και στη συνέχεια γενικεύουν την συγκεκριμένη μέθοδο για δύο τυχαίους θετικούς ρητούς. Ως προς τη «διαδοχικότητα» των ρητών, οι μαθητές μπορούν να ερωτηθούν να εξηγήσουν εάν έχουν ή δεν έχουν νόημα φράσεις της μορφής ο «επόμενος» ρητός του 1/3 κλπ. Επίσης γίνεται διασύνδεση με ένα πρόβλημα της Φυσικής.

3. Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης και δυσκολίες των μαθητών: Άλγεβρα

Κανονικότητες – Συναρτήσεις

Οι μαθητές στο Γυμνάσιο έχουν ασχοληθεί με φαινόμενα συμμεταβολής μεγεθών και με προβλήματα γραμμικών και απλών τετραγωνικών συναρτήσεων. Αρχικά η έννοια της συνάρτησης ερμηνεύεται ως σχέση μεταξύ δυο ποσοτήτων που αλληλοεξαρτώνται. Χρησιμοποιούνται τέσσερις βασικές αναπαραστάσεις: λεκτική, γραφική, με χρήση πινάκων και συμβολική (χρήση αλγεβρικών τύπων). Στις τάξεις του Λυκείου εισάγεται ο τυπικός συμβολισμός με το y ή το f(x) καθώς και η αντιστοίχιση μεταξύ στοιχείων δυο συνόλων. Η κύρια εστίαση στο Γυμνάσιο είναι η γραμμική συνάρτηση και δευτερευόντως η $y=\alpha x^2$. Ενώ στο Γυμνάσιο δίνεται έμφαση στις γραφικές παραστάσεις των ευθειών $y=\alpha x+\beta$, από την Α΄ Λυκείου μελετώνται πιο συστηματικά τα χαρακτηριστικά και οι μετασχηματισμοί των δευτεροβάθμιων πολυωνύμων. Στο Λύκειο η συνάρτηση αντιμετωπίζεται ως σχέση αντιστοιχίας και παράλληλα ως συμμεταβολή μεγεθών. Οι μαθητές επιλύουν προβλήματα όπου χρησιμοποιούνται συναρτήσεις, μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις και μελετούν γραφικές παραστάσεις (πιο περιορισμένα στη Γενική Παιδεία και ευρύτερα στον Προσανατολισμό). Προκειμένου να αναπτυχθεί μια πλούσια νοητή εικόνα της έννοιας και να οικοδομηθούν συνδέσεις, οι μαθητές έρχονται σταδιακά σε επαφή με διαφορετικούς τρόπους αναπαραστάσεων συναρτήσεων

(Thompson & Carlson, 2017), όπως: συμβολικός, γραφικός, διαγραμματικός (π.χ διάγραμμα Venn), λεκτικός, μέσω πίνακα, πεπλεγμένος (μέσω συναρτησιακής σχέσης). Παράλληλα, στον προσανατολισμό της Β΄ και της Γ΄ Λυκείου, εμβαθύνουν σε νέες κατηγορίες συναρτήσεων (τριγωνομετρικές, πολυωνυμικές και εκθετικές-λογαριθμικές) και μελετούν ιδιότητες τους (μονοτονία, ακρότατα, πεδία ορισμού) τις οποίες είναι σε θέση να ορίσουν σε γενική μορφή. Έτσι η πορεία της συνάρτησης ως διαδικασίας φτάνει στο σημείο της υποστασιοποίησης και θεώρησης της ως ένα καινούργιο αντικείμενο πάνω στο οποίο μπορούν να εφαρμοστούν νέες διαδικασίες – ενέργειες όπως η σύνθεση, οι αλγεβρικές πράξεις, η αντιστροφή, το όριο, η παραγώγιση και η ολοκλήρωση. Στη τελευταία τάξη του Λυκείου γίνεται η πλήρης συνειδητοποίηση της συμπληρωματικότητας της έννοιας της συμμεταβολής με αυτή της αντιστοιχίας. Συγχρόνως είναι και μια από τις πιο σύνθετες και δυσκολότερες μαθηματικές έννοιες για τους μαθητές. Η έννοια της συνάρτησης μπορεί να οριστεί φορμαλιστικά με τη χρήση ελάχιστων λέξεων, ωστόσο όταν εφαρμόζεται σε ένα πλαίσιο, μαθηματικό ή μαθηματικοποιημένο, η άτυπη γλώσσα που χρησιμοποιείται αναδεικνύει νοήματα που υπερβαίνουν την απλή λογική του ορισμού (Sierpinska, 1992). Διδακτικά, η χρησιμότητα της έννοιας της συνάρτησης είναι σημαντική γιατί αποτελεί:

α) ένα σημαντικό μέρος των μαθηματικών και επομένως απαραίτητο για όσους μαθητές επιλέξουν σπουδές που θα χρησιμοποιούν μαθηματικά.

β) μια ενοποιητική έννοια κατά μήκος ολόκληρου του προγράμματος σπουδών. Για παράδειγμα οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί του επιπέδου μπορούν να ιδωθούν και να εξετασθούν ως συναρτήσεις. Το ίδιο συμβαίνει για τις αριθμητικές πράξεις, τις πιθανότητες, τις αναδρομικές σχέσεις κλπ.

γ) ένα πολύτιμο εργαλείο για την αποσαφήνιση της μαθηματικής σκέψης και των μαθηματικών συλλογισμών που μπορεί να αλλάξει ριζικά την διατύπωση και απόδειξη σημαντικών προτάσεων.

δ) ένα μέσο για περιγραφή, αναπαράσταση και μοντελοποίηση φαινομένων, καταστάσεων ή προβλημάτων εκτός του πεδίου των μαθηματικών.

Οι δυσκολίες των μαθητών με τις συναρτήσεις σχετίζονται κυρίως με:

- τη συνθετότητα της έννοιας, την ποικιλία των μαθηματικών νοημάτων που σχετίζονται με αυτήν, όπως μεταβλητή (ανεξάρτητη και εξαρτημένη), συμμεταβολή, σύνολο, καθώς και την ποικιλία των αναπαραστάσεών της (λεκτική διατύπωση, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση, πίνακας τιμών)
- το επίπεδο αφαίρεσης που απαιτεί η μελέτη της συνάρτησης από τα διαφορετικά πλαίσια στα οποία μπορεί να εμφανίζεται (αριθμητική, μέτρηση κ.λπ.), καθώς και η ίδια η διαφορετικότητα αυτών των πλαισίων
- την αναγκαιότητα να αντιληφθούν οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης σε ένα επίπεδο ως διαδικασία και σε ένα άλλο ως αντικείμενο που συνοδεύεται από μια ποικιλία αναπαραστάσεων. Συχνά οι μαθητές ταυτίζουν την έννοια της συνάρτησης με μια υπολογιστική διαδικασία ή έναν τύπο και δυσκολεύονται να περάσουν στο επίπεδο της συνάρτησης–αντικείμενο (πχ. να συσχετίσουν έναν τρόπο αναπαράστασής της με έναν άλλο).

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές συχνά έχουν μια πολύ περιορισμένη αντίληψη για το τι είναι συνάρτηση το οποίο τους εμποδίζει να πουν τι είναι εκτός από πολύ συγκεκριμένες πρωτοτυπικές περιπτώσεις. Οι μαθητές σύμφωνα με τις έρευνες, συχνά ταυτίζουν την συνάρτηση με την ύπαρξη ενός απλού κανόνα. Έτσι, για παράδειγμα μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένωση διαστημάτων συχνά θεωρείται ότι πρόκειται για δυο συναρτήσεις με βάση τα διαστήματα του πεδίου ορισμού (Clement, 2001). Η ύπαρξη μιας αναλυτικής παράστασης - αλγεβρικού τύπου για να περιγράψει μια σχέση ως συνάρτηση είναι ένα διαδεδομένο λάθος των μαθητών, που αντιστοιχεί σε προηγούμενες ιστορικά οπτικές ακόμη και μετά από χρόνια ενασχόλησης με συναρτήσεις (Tall, 1996). Έτσι, η σχέση $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, θεωρείται συνάρτηση ενώ η σχέση που περιγράφει την πρόταση: *Ο Α χρωστάει 2€ στον Β, ο Β 3€ στον Γ και ο Γ 4€ στον Β*, δεν θεωρείται αφού δεν υπάρχει κάποιος προφανής τύπος. Άλλη παρανόηση είναι η πεποίθηση ότι η γραφική παράσταση πρέπει να είναι συνεχής, οπότε μια γραφική παράσταση που είναι όπως η γραφική του ακέραιου μέρους δεν θεωρείται ότι απεικονίζει συνάρτηση. Επίσης διαδεδομένη παρανόηση είναι η πεποίθηση ότι οι συναρτήσεις είναι 1-1: για παράδειγμα η f (x) = 12 για αυτό το λόγο δεν θεωρείται συνάρτηση (Markovits, Eylon, & Bruckheimer, 1986).

Ενδεικτικά έργα και δραστηριότητες

Έργο 1. (Α Λυκείου, πολυωνυμική συνάρτηση 2ου βαθμού).

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**	
Πεδίο	Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση	***Ειδικά***	Υπολογισμός, αναπαράσταση, συσχέτιση με οικείες και διαισθητικές ιδέες, τεκμηρίωση, εικασία	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Α Λυκείου /Δευτεροβάθμια εξίσωση, παραβολή				
Μεγάλες Ιδέες	Μαθηματική δομή Απόδειξη				

Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων, Συλλογισμού & επιχειρηματολογίας	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	Αυθεντικό κείμενο, geogebra
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Να κατανοούν τη διαλεκτική σχέση ανάμεσα στη ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του πολιτισμού	***Συγκείμενο***	Μαθηματικό πρόβλημα		

Ο Γερμανός μαθηματικός August Ferdinand Möbius στα μέσα του 19ου αιώνα βρήκε έναν τρόπο να υπολογίζει το γινόμενο δυο θετικών αριθμών μέσω της γραφικής παράστασης της παραβολής $y=x^2$: για να βρει το γινόμενο α x β ένωσε τα σημεία της παραβολής με τετμημένες -α και β. Το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον κατακόρυφο άξονα είναι το ζητούμενο γινόμενο.

α) Ελέγξτε με έναν συμμαθητή σας τον ισχυρισμό για ένα ζευγάρι θετικών α και β.

β) Μπορείτε δουλεύοντας με έναν συμμαθητή σας να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας και του κατακόρυφου άξονα; Πώς τεκμηριώνεται ο ισχυρισμός του Mobius;

γ) Αν θεωρούσαμε άλλη παραβολή (π.χ την $y=2x^2$) τι θα ίσχυε; Μπορείτε να κάνετε έναν αντίστοιχο ισχυρισμό για την νέα παραβολή που θεωρήσατε;

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Η διερεύνηση προβλημάτων μέσα στο ιστορικό πλαίσιο δημιουργίας τους προσφέρει τη δυνατότητα της σύνδεσης των μαθηματικών με την κοινωνία και της παρουσίασης των μαθηματικών με «ανθρώπινο πρόσωπο» δηλαδή ως ανθρώπινων δημιουργημάτων που απαντούν και αντανακλούν τις συνθήκες της εποχής τους. Η δυνατότητα της χρήσης των υπολογιστικών μηχανών σήμερα, δεν πρέπει να επισκιάζει τον σημαντικό ρόλο που έπαιζαν οι υπολογιστικές τεχνικές στο παρελθόν και κατά συνέπεια η βαρύτητα που είχε η εύρεση αριθμητικών τεχνικών όπως αυτή του έργου παραπάνω. Με αφορμή τέτοια έργα, μπορεί να δοθεί η δυνατότητα στους μαθητές να διερευνήσουν και άλλα ιστορικά και κοινωνικά στοιχεία, όπως η χρησιμότητα των υπολογιστικών τεχνικών εκείνης της εποχής, ο ρόλος των απαιτήσεων των άλλων επιστημονικών πεδίων στα μαθηματικά κλπ προκειμένου να συμπεριληφθούν όλοι οι μαθητές στη συζήτηση αποτελώντας τμήμα της μαθηματικής μικροκοινότητας της τάξης.

Αλγεβρικές Παραστάσεις

Οι Αλγεβρικές Παραστάσεις έχουν αναπτυχθεί στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο, με τη χρήση του γράμματος ως γενικευμένο αριθμό (άγνωστος, σταθερά, μεταβλητή), με τον υπολογισμό της αριθμητικής τους τιμής, την αναγνώριση και περιγραφή της δομής τους και τέλος τον μετασχηματισμό τους σε απλούστερες μορφές (κυρίως στη Γ Γυμνασίου). Στο Λύκειο, δεν εξελίσσεται περαιτέρω το μαθηματικό περιεχόμενο της θεματικής ενότητας, αλλά ενσωματώνονται οι αλγεβρικές ταυτότητες και κυρίως η νιοστή ρίζα στους μετασχηματισμούς των αλγεβρικών παραστάσεων.

Έργο 1. (Α Λυκείου, Ρίζες Πραγματικών Αριθμών).

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Επίλυση προβλήματος/ μοντελοποίηση, αποδεικτική διαδικασία, εφαρμογή (εξήγηση, τεκμηρίωση)</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Επίλυση προβλήματος, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Α Λυκείου</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μετασχηματισμοί, Προσέγγιση</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Δημιουργία συνδέσεων, Μαθηματικής επικοινωνίας</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Να μιλήσουν, να γράψουν και να ακούσουν μαθηματικά (Μαθηματική επικοινωνία)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2">αριθμομηχανή</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Επιστημονικό</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Δίνεται η παράσταση: $\left(\sqrt[3]{2}+3\right)\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-3\cdot\sqrt[3]{2}+9\right]$.

α) Να υπολογίσετε την παράσταση με χρήση αριθμομηχανής με χρήση τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ιδιότητες.

γ) Να συγκρίνετε τις δυο μεθόδους.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Η μαθηματική δραστηριότητα έχει στόχο την σύγκριση των προσεγγιστικών και αλγεβρικών μεθόδων κατά τον μετασχηματισμό παραστάσεων. Επιπλέον, με τη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές διαπιστώνουν ότι η δεκαδική προσέγγιση των άρρητων αριθμών δεν είναι αρκετή για τον ακριβή υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων. Με τον προσεγγιστικό υπολογισμό της παράστασης στο ερώτημα α, δεν επιτυγχάνεται το ακριβές αριθμητικό αποτέλεσμα με τη χρήση τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων και χρειάζεται να αυξήσουμε το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων ώστε το τελικό αποτέλεσμα να γίνει ίσο με 29. Με την εφαρμογή των ταυτοτήτων πραγματικών αριθμών το αποτέλεσμα είναι ακριβές και άμεσο, αλλά απαιτεί μαθηματική σκέψη και όχι απλώς εκτέλεση αριθμητικών πράξεων και υπολογισμών. Προτείνεται η σύγκριση των μεθόδων να γίνει όχι μόνο ως προς την ακρίβεια του αποτελέσματος, αλλά και την ταχύτητα υλοποίησης των υπολογισμών και τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν.

Αλγεβρικές Σχέσεις (Ισότητες – Ανισότητες)

Οι μαθητές έχουν ασχοληθεί με εξισώσεις και ανισώσεις α΄ βαθμού στο Γυμνάσιο. Επίσης, έχουν μελετήσει την επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Έχουν επίσης διαπραγματευτεί την επίλυση γραμμικών συστημάτων 2x2 αλγεβρικά και γραφικά. Έχουν αναπτύξει στρατηγικές μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων με χρήση εξισώσεων και ανισώσεων α΄ και β΄ βαθμού.

Στο Λύκειο και συγκεκριμένα στην Α΄ τάξη, οι μαθητές μελετούν πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις α΄ και β΄ βαθμού καθώς και δυωνυμικές εξισώσεις. Στη Β΄ τάξη και συγκεκριμένα στην άλγεβρα γενικής παιδείας, συμπεριλαμβάνονται πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις οποιουδήποτε βαθμού και απλές άρρητες εξισώσεις οι οποίες συνήθως ανάγονται σε πολυωνυμικές. Οι αλγεβρικές σχέσεις της Β τάξης περιλαμβάνουν επίσης τις τριγωνομετρικές εξισώσεις και ανισώσεις καθώς και τα γραμμικά και μη-γραμμικά συστήματα εξισώσεων. Οι εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις και ανισώσεις μελετώνται στα μαθηματικά προσανατολισμού της Β τάξης. Τέλος, η επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων γενικής μορφής, υλοποιείται αξιοποιώντας κυρίως τις συναρτήσεις και τις ιδιότητές τους (π.χ. μονοτονία) στα μαθηματικά προσανατολισμού των τάξεων Β και Γ τάξης.

Στο Λύκειο οι μαθητές επιλύουν τις εξισώσεις, τις ανισώσεις και τα συστήματα ακολουθώντας την αλγεβρική και την συναρτησιακή προσέγγιση (Drijvers, 2010). Στην αλγεβρική θεώρηση, το x παριστάνει την άγνωστη ποσότητα την οποία πρέπει να προσδιορίσουμε και αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους όπως με δοκιμή, με μετασχηματισμό της εξίσωσης και τη βοήθεια παραγοντοποίησης. Παράλληλα όμως στο πρόγραμμα σπουδών ακολουθείται και η συναρτησιακή προσέγγιση δηλαδή η αξιοποίηση της γραφικής παράστασης και των χαρακτηριστικών της (π.χ. μονοτονία) μιας συνάρτησης για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων καθώς και η γραφική αναπαράσταση γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων για τη γραφική τους επίλυση. Για αυτό και υπάρχουν ΠΜΑ τα οποία υπηρετούν και τις δύο θεωρήσεις.

Οι μαθητές συνήθως δυσκολεύονται στην αξιοποίηση της γραφικής παράστασης των συναρτήσεων για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων και συνήθως προτιμούν τις αλγεβρικές διαδικασίες επίλυσης (Huntley et al., 2007). Επίσης, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης μιας ρεαλιστικής κατάστασης και την αποτύπωσή της μέσω αλγεβρικής παράστασης. Τέλος, δυσκολίες προκύπτουν στις περιπτώσεις που η επίλυση εξίσωσης, ανίσωσης και συστημάτων δεν ακολουθεί τις συνήθεις αλγοριθμικές διαδικασίες και απαιτεί την ανάπτυξη μαθηματικών συλλογισμών και της μαθηματικής σκέψης.

Έργο 1. (Β Λυκείου Προσανατολισμού, Λογάριθμοι)

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Αριθμός, Άλγεβρα και Ανάλυση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Επίλυση προβλήματος/ μοντελοποίηση, αποδεικτική διαδικασία, εφαρμογή (εξήγηση, δοκιμή ειδικών περιπτώσεων)</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Επίλυση προβλήματος</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Συναρτήσεις</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μεταβολή, Ισοδυναμία</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Επίλυσης προβλήματος</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Να συλλογιστούν για διαφορετικούς σκοπούς, π.χ. για να εικάσουν, να πείσουν, να αποδείξουν (Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού/ flexible modality of reasoning)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Να αναπτύσσουν κριτική επίγνωση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στις κοινωνικές, περιβαλλοντικές, πολιτισμικές και οικονομικές σχέσεις</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Επιστημονικό</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Το μέγεθος ενός σεισμού είναι ένα μέτρο της ενέργειας που εκλύεται από το σεισμό. Σύμφωνα με την κλίμακα Richter το μέγεθος R ενός σεισμού εντάσεως Ι δίνεται από τον τύπο $R = \log I - \log I_0$, όπου I_0 είναι μια ορισμένη ελάχιστη ένταση.

α) Να βρεθεί το μέγεθος R ενός σεισμού που έχει ένταση εκατό φορές μεγαλύτερη από την ορισμένη ελάχιστη ένταση I_0.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του μεγέθους R του σεισμού για τις διάφορες τιμές του Ι. Θεωρείστε ότι $I_0 = 1$.

γ) Μία σεισμική δόνηση χαρακτηρίζεται ως ισχυρή όταν το μέγεθος της είναι τουλάχιστον 6 και δεν ξεπερνά τους 7 βαθμούς της κλίμακας Richter. Αν επιπλέον η ελάχιστη ένταση I_0 ορισθεί να είναι 1, ποιες είναι οι δυνατές τιμές της έντασης Ι όταν έχουμε ισχυρό σεισμό;

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Το τρίτο ερώτημα της δραστηριότητας αποτελεί μία ανίσωση με άγνωστο την ένταση Ι. Η μέθοδος επίλυσης είναι αλγεβρική και βασίζεται στην έννοια της αντίστροφης συνάρτησης και αποτελεί το κεντρικό σημείο της επίλυσης. Προτείνεται επίσης η σύνδεση της αλγεβρικής επίλυσης στο ερώτημα γ με την γραφική επίλυση, η οποία επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης του ερωτήματος β. Επιπλέον, η γενίκευση της παραπάνω μεθόδου σε συναρτήσεις γενικής μορφής είναι ένα σημείο που προτείνεται να τονιστεί στους μαθητές.

Σύνολα

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά με συστηματικό τρόπο την έννοια του συνόλου και των σχέσεων και πράξεων μεταξύ συνόλων. Οι πράξεις μεταξύ συνόλων είναι ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές μπορούν να δώσουν νόημα στους συνδέσμους «ή» και «και».

Οι δυσκολίες των μαθητών σχετίζονται κυρίως με:

- τη διαφορετική ερμηνεία στα Μαθηματικά των σύνδεσμων «ή» και «και» από εκείνη που του αποδίδονται συνήθως στην καθημερινή χρήση τους.
- τη δυσκολία χρήσης του συμβολισμού και της μετάβασης από την αλγεβρική στην συνολοθεωρητική αναπαράσταση και αντίστροφα.

Έργο 1. (Α Λυκείου, σύνολα).

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)

		σημαντικά)			
Πεδίο	Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση	***Ειδικά***	Υπολογισμός, αναπαράσταση, τεκμηρίωση	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Α Λυκείου Προσαν./ Σύνολα				
Μεγάλες Ιδέες	Μαθηματική δομή Γενίκευση				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων, Συλλογισμού & επιχειρηματολογίας, μοντελοποίηση	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	να μπορούν ερμηνεύουν τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά	***Συγκείμενο***	επιστημονικό πρόβλημα		

Έστω Ω = {1,2,3,4,5,6,7,89,10,11} και Α = {3,4,10,9,11} Β={1,3,4,7} και Γ={1,4,8,11}.

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn τα σύνολα Α,Β,Γ.

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους και με με διάγραμμα Venn τα παρακάτω σύνολα: $A \cap B$, $B \cup \Gamma, A \cup (B \cap \Gamma)$, $A \cap (B \cup \Gamma), A \cap B \cap \Gamma, A' \cap B'$.

γ) Βρείτε το σύνολο Δ που αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του Α. Είναι υποσύνολο του Α;

δ) Βρείτε το σύνολο Ε που αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του Δ. Εξετάστε αν το Δ είναι υποσύνολο του Ε. Είναι το Δ στοιχείο του Ε;

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Επειδή η έννοια του συνόλου δεν ορίζεται, χρειάζεται να τονισθούν οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να θεωρηθεί μια συλλογή αντικειμένων σύνολο μέσα από κατάλληλα παραδείγματα. Η χρήση παραδόξων ή κλάσεων που δεν είναι σύνολα (π.χ Α={χ|$\notin A$}). Η αναπαράσταση συνόλων, σχέσεων και πράξεων αυτών καθώς και η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, βοηθούν στη κατανόηση του ρόλου και των ιδιοτήτων του συνόλου.

4. Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης και δυσκολίες των μαθητών: Ανάλυση

Σύγκλιση

Μια πρώτη επαφή με οριακού τύπου διαδικασίες είχαν οι μαθητές στην Ευκλείδεια Γεωμετρία με τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου. Σε αντίθεση με τον υπολογισμό του εμβαδού πολυγώνων, ο οποίος γίνεται με πεπερασμένες διαδικασίες, στην περίπτωση του κύκλου, προσεγγίζουμε τον κύκλο οσοδήποτε κοντά από κανονικά πολύγωνα. Αυτή η διαδικασία υπολογισμού έχει ως βάση την έννοια του ορίου, η οποία αποτελεί την θεμελιώδη έννοια της Ανάλυσης. Οι μαθητές έχουν μια ακόμη πιο αναλυτική επαφή με το όριο, στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Β Λυκείου και ειδικότερα στις ακολουθίες. Η πρώτη επαφή τους γίνεται διαισθητικά και προκειμένου να μπορέσουν να κατανοήσουν τις ιδιότητες του ορίου συνάρτησης απαιτούνται γνώσεις συναρτήσεων που έχουν δει στη Β και κυρίως στην αρχή της Γ Λυκείου. Η έννοια του ορίου ενθυλακώνει ουσιαστικά δυο διαδικασίες: μια κατά την οποία η ανεξάρτητη μεταβλητή πλησιάζει μια τιμή και μια δεύτερη κατά την οποία η εξαρτημένη μεταβλητή πλησιάζει μια άλλη τιμή. Στην ενότητα αυτή γίνεται αρχικά σύντομη ανασκόπηση των βασικών στοιχείων των συναρτήσεων (Ορισμός, Ισότητα, Πράξεις, Σύνθεση, Μονοτονία, Ακρότατα). Ακολούθως γίνεται εισαγωγή στο όριο συνάρτησης το οποίο αποτελεί τη βάση για την Ανάλυση. Μέσα από κατάλληλα παραδείγματα οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν πλούσιες αναπαραστάσεις για το όριο και τη συνέχεια. Ωστόσο, επειδή είναι μια ιδιαίτερα λεπτή έννοια και ο τυπικός «ε-δ» ορισμός αντικειμενικά είναι δύσκολο να κατανοηθεί από μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, η διδασκαλία της Ανάλυσης στο Λύκειο συνήθως περιορίζεται σε απλή εφαρμογή τύπων με αξιοποίηση κυρίως αλγεβρικών δεξιοτήτων και δεν περιλαμβάνει μια ουσιαστική εισαγωγή στον τρόπο σκέψης αυτής της μαθηματικής περιοχής. Αποτέλεσμα μιας τέτοιας διδασκαλίας, είναι ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών να δημιουργεί παρανοήσεις και να σχηματίζει λανθασμένες αντιλήψεις και εικόνες για τις έννοιες και τα θεωρήματα της Ανάλυσης.

Από έρευνες προκύπτει ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν κατανοεί πλήρως την έννοια του ορίου. Οι προηγούμενες γνώσεις που έχει ο μαθητής που προέρχονται από την καθημερινή εμπειρία και οι σημασίες των όρων που χρησιμοποιούνται δεν εξαφανίζονται αλλά αναμιγνύονται με την νεοαποκτηθείσα γνώση, τροποποιούνται και αναπροσαρμόζονται. Για παράδειγμα οι λέξεις «τείνει» και «όριο» έχουν ήδη μια συγκεκριμένη σημασία για τους μαθητές πριν αρχίσουν την τυπική εκμάθηση της έννοιας και συνεχίζουν να βασίζονται σ' αυτές και στη συνέχεια. Τέτοιες περιπτώσεις είναι η έννοια του «τείνει προς» όπως: πλησιάζει (μένοντας τελικά μακριά του), πλησιάζει ... χωρίς να το φθάνει, πλησιάζει ... μέχρι σχεδόν να το φθάσει, μοιάζει (π.χ. «αυτό το κόκκινο τείνει προς το ροζ»). Ἄλλες παρανοήσεις έχουν να κάνουν με την έννοια του αξεπέραστου ορίου (το οποίο μπορούμε να φθάσουμε ή είναι αδύνατο να φθάσουμε), με την έννοια του σημείου το οποίο πλησιάζουμε χωρίς να το φθάνουμε, με την έννοια του μέγιστου ή ελάχιστου ανώτερου ή κατώτερου ορίου και τέλος με την έννοια του τέλους ή τέρματος. Συνήθεις παρανοήσεις των μαθητών έχουν να κάνουν με μια δυναμικού τύπου ερμηνεία της έννοιας κατά την οποία το όριο μιας συνάρτησης αποτελεί μια διακριτή ακολουθία βημάτων με σκοπό την καλύτερη προσέγγιση της τιμής της συνάρτησης (Oehrtman, 2009), ή με εικόνες του ορίου ως ασύμπτωτης (η οποία δεν φτάνει ποτέ την τελική τιμή) ή ως σύνολα σημείων συσσώρευσης. Ως πηγή δημιουργίας προβλημάτων κατανόησης θεωρείται η διάσταση που υπάρχει μεταξύ του αλγεβρικού και του «αναλυτικού» τρόπου σκέψης. Η Μαθηματική Ανάλυση απαιτεί αλγεβρικές δεξιότητες και ικανότητες αλλά ταυτόχρονα και την υιοθέτηση ενός διαφορετικού τρόπου σκέψης καθώς και νέες τεχνικές. Αυτό επειδή στην Ανάλυση πολλές φορές τις ποσότητες που χρησιμοποιούμε δεν τις γνωρίζουμε ακριβώς, αλλά προσεγγιστικά, ως όρια γνωστών ποσοτήτων. Συνεπώς, ενώ η απόδειξη των ισοτήτων στην Άλγεβρα έχει στατικό χαρακτήρα στον Απειροστικό Λογισμό έχει δυναμικό κάτι το οποίο απαιτεί μια επιπλέον προσπάθεια προσαρμογής από τον μαθητή. Η έννοια της συνέχειας, από γνωστική άποψη παρουσιάζει παρόμοιες δυσκολίες. Για παράδειγμα, ένα εμπόδιο αποτελεί το γεγονός ότι υφίσταται μια αυθόρμητη αντίληψη που προκαλείται από τη χρήση στην καθημερινή ζωή φράσεων όπως «έβρεχε συνεχώς όλη μέρα» (δηλαδή, δεν υπήρξε διακοπή στη βροχόπτωση) ή «η σιδηροδρομική γραμμή είναι συνεχώς ενωμένη» (δεν υπάρχουν κενά στις ράγες). Αυτή η άποψη ενισχύεται συχνά από τις προσπάθειες «επεξήγησης» της έννοιας της συνέχειας με περιγραφές όπως ότι η γραφική παράσταση «είναι μονοκόμματη» ή «σχεδιάζεται χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί», συγχέοντας μ’ αυτό τον τρόπο τις μαθηματικές έννοιες της συνέχειας και της συνεκτικότητας (Tall &Vinner, 1981). Επιπλέον, κατά την εισαγωγή στην έννοια της συνέχειας οι μαθητές απαιτείται να γεφυρώσουν τη διαισθητική έννοια της καθημερινής ζωής της συνέχειας ως απρόσκοπτης πορείας, χωρίς κενά ή χάσματα, με την κατά Cauchy-Weierstrass έννοια που είναι περισσότερο στατική και με διακριτά διαφορετικά στοιχεία. Αυτές οι δυο οπτικές λόγω της σύνδεσης τους με διαφορετικά εννοιολογικά συστήματα αναφοράς μπορούν να οδηγήσουν σε γνωστικού τύπου συγκρούσεις και παρανοήσεις (Nunez, Edwards & Matos, 1999).

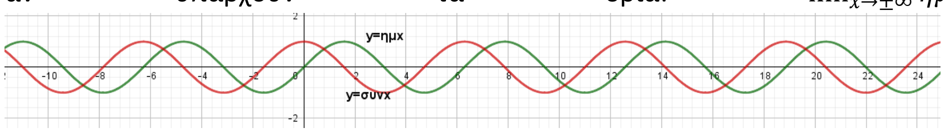
Έργο 1. (Γ Λυκείου προσανατολισμού, όριο συνάρτησης).

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Αναπαράσταση, δομή</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Γ Λυκείου /Όριο</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μετασχηματισμοί</td></tr>
<tr><td>Μαθηματικές διεργασίες &</td><td>Ισοδυναμία, πρακτική συλλογισμού & επιχειρηματολογί</td><td>Γενικά</td><td>Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικο</td></tr>
</table>

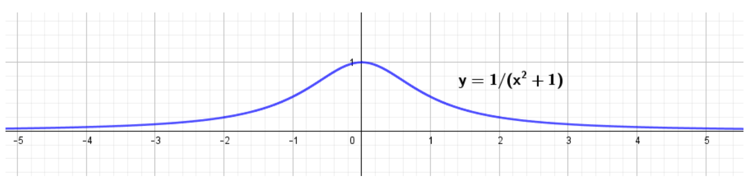
πρακτικές	ας,		ύ συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	κατασκευή μέσω λογισμικού geogebra προσομείωσης
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές		***Συγκείμενο***	Μαθηματικό		

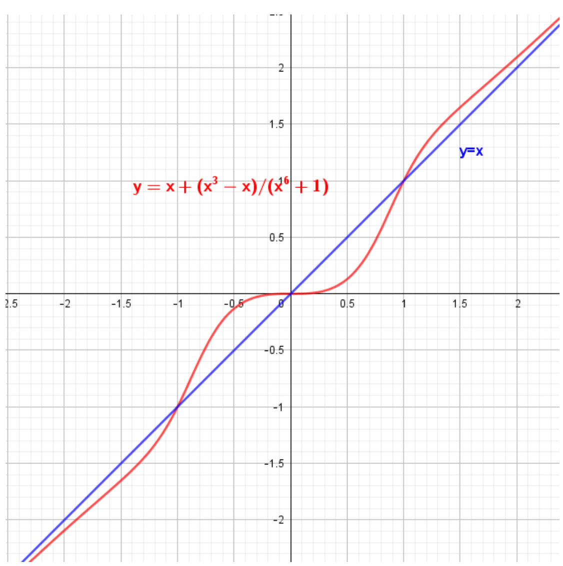
i) Με βάση τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων y = ημx και y = συνx να ελέγξετε,

αν υπάρχουν τα όρια: $\lim_{x\to\pm\infty} \eta\mu x, \lim_{x\to\pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$



ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $g(x) = x + \frac{x^3-x}{x^6+1}$ και έπειτα να ελέγξετε, αν οι ασύμπτωτες έχουν κοινά σημεία με τις γραφικές παραστάσεις των αντίστοιχων συναρτήσεων.





Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση. Με δεδομένο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου και οι περισσότερες αποδείξεις των προτάσεων και των θεωρημάτων της Ανάλυσης είναι εκτός του πλαισίου των μαθηματικών του Λυκείου, για να αποτελέσει η διδασκαλία της μια πραγματική εισαγωγή στην περιοχή αυτή, πρέπει να συμβάλλει στην ανάπτυξη σωστών διαισθητικών αντιλήψεων από τους μαθητές για τις έννοιες, τις ιδιότητες τους και τα θεωρήματα της Ανάλυσης μέσα από την ουσιαστική χρήση οπτικών αναπαραστάσεων. Γι' αυτό πρέπει να υπάρξει μια ισορροπία και σύνδεση των τυπικών λύσεων και των αντίστοιχων οπτικών αναπαραστάσεων με στόχο την κατανόηση των ιδιοτήτων της Ανάλυσης σε ένα πρώτο διαισθητικό επίπεδο.

Διαφόριση

Η θεματική περιοχή της διαφόρισης εντάσσεται στο Λύκειο με τα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας της Γ΄ τάξης. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τον λόγο μεταβολής για να ορίσουν τη στιγμιαία ταχύτητα, να αναγνωρίζουν ότι η παράγωγος εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους και να τον αξιοποιούν στην επίλυση προβλημάτων και στη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων. Στα Μαθηματικά της Γ΄ τάξης προσανατολισμού, αναδεικνύεται ακόμα περισσότερο ο ρόλος της παραγώγου ως ρυθμού μεταβολής και δίνεται επίσης έμφαση στην αξιοποίηση της παραγώγου για την μελέτη των χαρακτηριστικών της συνάρτησης.

Κατά την ανάπτυξη των εννοιών του διαφορικού λογισμού υπάρχουν σημαντικές δυσκολίες ή παρανοήσεις από τους μαθητές (Tall, 2002). Οι μαθητές συνήθως ανταποκρίνονται επιτυχώς στην εύρεση της παραγώγου με την εφαρμογή των κανόνων παραγώγισης σε βασικές συναρτήσεις. Σημαντική όμως δυσκολία αποτελεί η σύνδεση της παραγώγου με διαφορετικές έννοιες ή αναπαραστάσεις, όπως είναι ο αλγεβρικός συμβολισμός της παραγώγου ως το όριο του λόγου μεταβολής $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της συνάρτησης, ο ρυθμός μεταβολής μεγεθών. Ενδεικτικά επισημαίνονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εφαρμογή της παραγώγου στην επίλυση προβλημάτων και ερμηνεία φαινομένων καθώς και σε παρανοήσεις που σχετίζονται με την έννοια της εφαπτομένης (Biza, Christou & Zachariades, 2008).

Έργο 1. (Γ Λυκείου Προσανατολισμού, Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο)

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ **(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ** **(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ** **(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**	
Πεδίο	Αριθμός, Άλγεβρα &	***Ειδικά***	διαδικασίες	***Προτεινόμενα***	ποικιλία

	Ανάλυση		εκτέλεσης, Οργάνωση, συστηματοποίηση	***χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Γ Λυκείου, Διαφόριση				
Μεγάλες Ιδέες	Προσέγγιση – σύγκλιση				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων, Συλλογισμού & επιχειρηματολογίας	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	κατασκευή προσομοίωσης μέσω λογισμικού geogebra
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές					

Για να βρούμε προσεγγιστικά μια μη μηδενική ρίζα της εξίσωσης x = 2ημx χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Newton-Raphson. Θέτουμε f(x) = x – 2ημ x και χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ όπου } n=0,1,2,3,\dots .$$

Αν επιλέξουμε μία πρώτη προσέγγιση της άγνωστης ρίζας το $x_0 = 1{,}1$, τότε βρίσκουμε:

$x_1 = 8{,}453$, $x_2 = 5{,}256$, $x_3 = 203{,}384$, $x_4 = 118{,}019$, $x_5 = -87{,}471$, $x_6 = -203{,}637$.

α) Χρησιμοποιώντας ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας εξηγείστε από τη γραφική παράσταση της f(x) = x – 2ημ x γιατί δεν μπορούμε να προχωρήσουμε με την αρχική συνθήκη $x_0 = 1{,}1$.

β) Τι θα συνέβαινε αν παίρναμε $x_0 = \pi/3$;

γ) Σχεδιάζοντας τις γραφικές παραστάσεις των y=x και y=2ημx βρείτε μια καλύτερη αρχική εκτίμηση για το για x_0 (π.χ για $x_0 = 1{,}5$).

δ) Υπολογίστε με τη μέθοδο Newton-Raphson για $x_0 = 1{,}5$ τις πρώτες 6 προσεγγίσεις της ρίζας της εξίσωσης.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Οι μαθητές κάνοντας χρήση των ψηφιακών εργαλείων επιλύουν, με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης, εξισώσεις οι οποίες δεν επιλύονται με αλγεβρικές μεθόδους. Με αυτό τον τρόπο αναδεικνύεται η αναγκαιότητα χρήσης τέτοιων μεθόδων. Η δραστηριότητα επίσης επισημαίνει στους μαθητές τις αδυναμίες της μεθόδου η οποία δεν συγκλίνει απαραίτητα στις λύσεις της εξίσωσης. Οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν τις αρχικές συνθήκες της αλγοριθμικής διαδικασίας Newton-Raphson και να επαληθεύσουν την καταλληλότητά τους. Τέλος, η δραστηριότητα δημιουργεί συνδέσεις μεταξύ αριθμητικών και γραφικών μεθόδων επίλυσης.

Ολοκλήρωση

Το ορισμένο ολοκλήρωμα εισάγεται μέσω της περιγραφής του υπολογισμού εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από μια θετική συνάρτηση και τον οριζόντιο άξονα. Αρχικά προσεγγίζεται διαισθητικά και στη συνέχεια αναδεικνύεται η σύνδεση του με τη παράγωγο μέσα από το θεμελιώδες θεώρημα. Οι προηγούμενες γνώσεις της παραγώγου είναι αποφασιστικής σημασίας για την κατανόηση της παραπάνω σύνδεσης. Η ενότητα του ολοκληρώματος (όπως και της παραγώγου) είναι μία από αυτές όπου, εκτός από την κατανόηση των εννοιών, οι μαθητές πρέπει να δουν και να αντιμετωπίσουν εφαρμογές σε προβλήματα. Μέσα από προβλήματα που αφορούν στην εύρεση εμβαδού, όγκου κ.α. θα φανεί η αποτελεσματικότητα των εργαλείων του Απειροστικού Λογισμού σε περιπτώσεις οι οποίες δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με άλλα εργαλεία. Αξιοποιώντας τις ΤΠΕ, θα γίνουν αντιληπτές έννοιες, όπως της παράγουσας μιας συνάρτησης (και κατ' επέκταση όλων των βασικών συναρτήσεων), του ορισμένου ολοκληρώματος και εφαρμογών του στον υπολογισμό εμβαδών επίπεδων χωρίων και όγκων στερεών εκ περιστροφής.

Από αρκετές έρευνες (π.χ Metaxas, 2007) προκύπτει ότι οι μαθητές εμφανίζουν παρανοήσεις σε μια σειρά από έννοιες και τεχνικές που συναντούν στην ολοκλήρωση. Πολλές φορές επιδεικνύουν «ψευδο-εννοιολογική» συμπεριφορά που σημαίνει ότι χρησιμοποιούν την ελάχιστη προσπάθεια προκειμένου να ανταποκρίνονται με έναν τρόπο που θα κρίνεται από τον διδάσκοντα ως ικανοποιητικό. Στην περίπτωση της ολοκλήρωσης πολλές από τις παρατηρούμενες παρανοήσεις των μαθητών οφείλονται σε προηγούμενες συνδεόμενες έννοιες. Η γνωστή και από άλλες πλευρές της Ανάλυσης απόσταση μεταξύ της εννοιολογικής και διαδικασιακής κατανόησης υφίσταται και στον ολοκληρωτικό λογισμό με αποτέλεσμα οι γνώσεις των μαθητών να βασίζονται σε μεμονωμένα γεγονότα. Έτσι, δεν μπορούν να διακρίνουν τις συνδέσεις μεταξύ των εννοιών και το χάσμα αυτό ενισχύεται από ελλιπείς γνώσεις σε προηγούμενες ενότητες της Ανάλυσης (όρια, συνεχείς συναρτήσεις και παράγωγοι). Η κατανόηση της οργανικής σχέσης μεταξύ της διαφορισιμότητας και της ολοκλήρωσης προϋποθέτει την ικανότητα των μαθητών να κατανοούν τη συνεχή και ομαλή μεταβολή των μεταβλητών (Thompson & Carlson, 2017). Για παράδειγμα, παρόλη τη κεντρική σημασία του θεμελιώδους θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού στην Ανάλυση, έρευνες έχουν καταγράψει σημαντικές δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση του. Η ελλιπής κατανόηση στην έννοια της συνάρτησης, στο ρυθμό μεταβολής και στον τρόπο που συμμεταβάλλονται ο ρυθμός μεταβολής με την ανεξάρτητη μεταβλητή οδηγούν τους μαθητές σε μηχανιστική εφαρμογή του θεωρήματος χωρίς βαθύτερη κατανόηση των εννοιών που εμπλέκονται.

Ενδεικτικά έργα και δραστηριότητες

Έργο 1. (Γ Λυκείου Προσανατολισμού, υπολογισμός όγκου εκ περιστροφής)

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">υπόθεση, μοντελοποίηση, τεκμηρίωση</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Γ ΛΥΚΕΙΟΥ /όγκος στερεών εκ περιστροφής</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μετασχηματισμοί</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Μοντελοποίηση
Μεταγνωστική ενημερότητα</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2">κατασκευή μέσω λογισμικού geogebra προσομείωσης</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Ρεαλιστικό πρόβλημα</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Η σφαίρα ενός ψεύτικου πιστολιού, έχει το σχήμα του στερεού που σχηματίζεται από την περιστροφή του επίπεδου χωρίου που βρίσκεται ανάμεσα στη y=ln(x) και τις ευθείες με εξισώσεις x=1 και x=e. Η σφαίρα καρφώθηκε μέσα σε έναν παχύ τοίχο και σταμάτησε στο εσωτερικό του αφού διένυσε μια μικρή απόσταση δημιουργώντας μια κλειστή κυλινδρική οπή. Στην συνέχεια η σφαίρα αφαιρέθηκε αφήνοντας μια τρύπα (που περιλάμβανε την κυλινδρική οπή).

α) Σχεδιάστε το επίπεδο χωρίο που περιλαμβάνεται μεταξύ των γραμμών των y =ln(x), x=1 και x=e.

β) Υπολογίστε τον όγκο της τρύπας που έχει μείνει στον τοίχο μετά την αφαίρεση της σφαίρας

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση. Στην ενότητα αυτή, αλλά και σε όλες τις προηγούμενες, θα πρέπει να αποφευχθεί η μηχανιστική εφαρμογή διαδικασιών και τεχνικών, καθώς και ασκήσεων που ουσιαστικά αφορούν ενότητες της Ανάλυσης, οι οποίες δεν περιλαμβάνονται στην ύλη της Γ΄ Λυκείου. Αυτά όχι μόνο δε συμβάλουν, αλλά δημιουργούν σοβαρά χρονικά εμπόδια στην επίτευξη των ουσιαστικών στόχων του μαθήματος. Στη διδασκαλία της Ανάλυσης ουσιαστικό ρόλο μπορεί να παίξει η αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας και ιδιαίτερα τα παρεχόμενα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας. Για την επιλογή ενός έργου επισημαίνεται ότι το έργο πρέπει:

• Να είναι κατανοητό από όλους τους μαθητές και να μην επιτρέπει παρανοήσεις.

• Να αφήνει περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια.

• Να ενθαρρύνει τη συνεργατικότητα την ομαδική εργασία και το νοητικό ανταγωνισμό.

• Να μην επιτρέπει άμεση προσέγγιση στη λύση.

• Το πρόβλημα από το οποίο προκύπτει η δραστηριότητα, να είναι πλούσιο σε εμπλεκόμενες έννοιες και να μπορεί ο μαθητής να ανταπεξέλθει.

• Η εργασία του προβλήματος να μπορεί να συνδυάζει δύο τουλάχιστον πλαίσια (π.χ. αριθμητικό, γραφικό), μεταξύ των οποίων ο μαθητής θα μπορεί να κάνει τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις.

Προτείνονται δραστηριότητες που συνδέουν πραγματικές καταστάσεις με τα μαθηματικά. Ξεκινώντας με ένα μαθηματικοποιημένο πρόβλημα από τον πραγματικό κόσμο, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις μεθόδους για τον υπολογισμό όγκου στερεού εκ περιστροφής προκειμένου να υπολογίσουν τα ζητούμενα στοιχεία. Η δραστηριότητα μπορεί να επεκταθεί με την εύρεση των υποθέσεων που οδήγησαν στη μαθηματικοποίηση του προβλήματος και να διερευνηθεί η δυνατότητα επίλυσης ενός αντίστοιχου προβλήματος με διαφορετικές υποθέσεις (διαφορετική μοντελοποίηση). Η χρήση των τύπων ολοκλήρωσης είναι απαραίτητη για την επίτευξη των παραπάνω στόχων, αλλά δεν αποτελεί αυτοσκοπό.

5. Μαθησιακή Εξέλιξη (τροχιά) της συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης ως από τις πιο κεντρικές των μαθηματικών, έχει παρουσία από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού έως και την τελευταία τάξη του Λυκείου. Αρχικά στο πρώτο στάδιο (προ-αλγεβρικό), το οποίο εκτείνεται στο Δημοτικό, οι μαθητές αποκτούν απαραίτητες δεξιότητες ώστε να μπορούν να εργαστούν με συναρτήσεις προκειμένου να λύσουν προβλήματα. Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν ακόμη μεταβλητές για να εκφράσουν συναρτησιακές σχέσεις αλλά σταδιακά έρχονται σε επαφή με την έννοια της μεταβλητής. Στο επόμενο στάδιο (προ-δομικό) οι μαθητές έχουν την ικανότητα να αναγνωρίζουν μια αναπαράσταση συνάρτησης κάθε φορά χωρίς τη δυνατότητα συσχέτισης με άλλες αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν την ύπαρξη μιας αναδρομικής σχέσης μεταξύ των x και y όταν δίνονται σε μορφή πίνακα, αλλά δεν μπορούν να εκφράσουν ακόμη την αλγεβρική σχέση που συνδέει τις μεταβλητές αποτυπώνοντας της σε μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ των μεταβλητών. Στη συνέχεια οι μαθητές σταδιακά αρχίζουν να δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ των αναπαραστάσεων (μονο-δομικό επίπεδο) αλλά αυτές είναι κατά βάση απλές. Για παράδειγμα οι μαθητές μπορεί να είναι ικανοί να μεταφράζουν από μια πινακοποιημένη μορφή δεδομένων σε μια συμβολική συνάρτηση αλλά να μην μπορούν να περιγράψουν λεκτικά τη συνάρτηση. Όταν οι μαθητές αρχίσουν να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων (πινακοποιημένες, συμβολικές, λεκτικές αναπαραστάσεις) έχουν φτάσει στο επόμενο στάδιο (πολυ-δομικό επίπεδο). Εδώ, για παράδειγμα μπορούν να εξηγήσουν πώς η παράμετρος της κλίσης μιας γραμμικής συνάρτησης σχετίζεται με σταθερή διαφορά των y για σταθερές μεταβολές των x. Καθώς οι μαθητές κατανοούν σε μεγαλύτερο βάθος την έννοια της συνάρτησης, μπορούν να συγκρίνουν και να αντιπαραβάλλουν πληροφορίες που δίνονται σε πολλαπλές αναπαραστάσεις και να επιλέγουν ποια αναπαράσταση είναι πιο χρήσιμη σε δεδομένο πλαίσιο (σχετικιστικό επίπεδο). Επίσης μπορούν να μετακινούνται με ευχέρεια μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων υιοθετώντας κάθε φορά διαφορετική οπτική και εργαλεία επίλυσης ενός προβλήματος (Chazan & Yerushalmy, 2003). Στο πιο υψηλό επίπεδο κατανόησης της έννοιας (αφηρημένο επίπεδο), οι μαθητές χρησιμοποιούν και εφαρμόζουν συναρτήσεις για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων ή τη δημιουργία νέων. Η χρήση των συναρτήσεων δεν είναι σε αλγοριθμικό επίπεδο. Η τροχιά της συνάρτησης περιέχει τα θέματα της συμμεταβολής και της αντιστοίχισης. Η έννοια της συμμεταβολής αναφέρεται στην αναγνώριση και ερμηνεία καταστάσεων οι οποίες μπορούν να περιγραφούν από την ταυτόχρονη μεταβολή δυο ποσοτήτων. Η έννοια της μεταβλητής ως μιας ποσότητας που μεταβάλλεται συνεχώς είναι απαραίτητη για την περιγραφή και επίλυση προβλημάτων που είναι οικεία στους μαθητές όπως προβλήματα κινηματικής ή μεταβολών μεγεθών όπως θερμοκρασία, βάρος κλπ. Η προσέγγιση των συναρτήσεων μέσω της συμμεταβολής, προϋποθέτει κατανόηση του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλονται οι δυο μεταβλητές. Αυτό σημαίνει κατανόηση του τρόπου που συντονίζεται η μεταβολή από το y_m στο y_{m+1} καθώς από το x_m μεταβαίνουμε στο x_{m+1}. Μέσω πινάκων αυτό σημαίνει τη συντονισμένη μεταβολή δυο ή περισσότερων στηλών καθώς η μια μεταβλητή κινείται πάνω ή κάτω στην στήλη της. Μέσω γραφήματος, περιλαμβάνει την κατανόηση των αλλαγών στον κατακόρυφο άξονα καθώς η άλλη μεταβλητή κινείται οριζόντια. Η προσέγγιση της συμμεταβολής προετοιμάζει την μελέτη της Μαθηματικής Ανάλυσης και της μοντελοποίησης φυσικών φαινομένων. Οι μαθητές αρχικά στο Γυμνάσιο αναγνωρίζουν την εξαρτημένη και την ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ στη συνέχεια εντοπίζουν και εκφράζουν το είδος της μεταβολής (αύξηση ή μείωση) που μπορεί να επιφέρει στην εξαρτημένη μεταβλητή μια συγκεκριμένη αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η εύρεση αυτής της κατεύθυνσης της μεταβολής είναι η βάση της έννοιας της μονοτονίας που θα υποστασιοποιηθεί στις πρώτες τάξεις του Λυκείου. Στο τέλος του Γυμνασίου και στην αρχή του Λυκείου οι μαθητές μπορούν να προσδιορίσουν σε συγκεκριμένες συναρτήσεις, τις τιμές της μιας μεταβλητής ώστε να ανταποκρίνεται σε συγκεκριμένες τιμές της άλλης (ανεξάρτητης ή εξαρτημένης). Η αναγνώριση του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης αρχικά για σταθερές μεταβολές του x και στη συνέχεια για τυχαία μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής, είναι ο επόμενος σταθμός ανάπτυξης της έννοιας. Η εύρεση και ο υπολογισμός της μεταβολής του ρυθμού μεταβολής στην Γ Λυκείου είναι το τελικό σημείο διαπραγμάτευσης της έννοιας, όπου η μορφή της καμπύλης ως προς την κυρτότητα αναλύεται και προσδιορίζεται. Η οπτική της διμελούς σχέσης – αντιστοιχίας, αναπτύσσεται αρχικά στο Γυμνάσιο όπου η μεταβλητή αντιμετωπίζεται ως στοιχείο ενός συνόλου ή μιας δομής. Έτσι σταδιακά ο μαθητής εισάγεται στην έννοια της μονοσήμαντης αντιστοίχισης η οποία αποτελεί τη βάση του ορισμού της συνάρτησης. Οι μαθητές ορίζουν, υπολογίζουν, συγκρίνουν συναρτήσεις και συνθέτουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης (όπως η γραφική παράσταση σε ορθοκανονικό σύστημα) σε μια ενιαία εικόνα της έννοιας. Η οπτική της αντιστοιχίας είναι φανερή και στον συμβολισμό: y=f(x) καθώς και σε μοντέλα ερμηνείας όπως αυτό της μηχανής (στο οποίο οι μεταβλητές αντιστοιχούν στα input–output) και υποβοηθά στην κατανόηση του γεγονότος ότι η αντιστοιχία μεταξύ δυο συνόλων αριθμών μπορεί να εκφραστεί μέσω γενικών αλγεβρικών «κανόνων». Από τις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου ένας στόχος είναι η αναπαράσταση της έννοιας της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δυο ποσοτήτων που αλληλοεξαρτώνται. Χρησιμοποιούνται τέσσερις βασικές αναπαραστάσεις: λεκτική, γραφική, με χρήση πινάκων και συμβολική (χρήση αλγεβρικών τύπων). Στις τάξεις του Λυκείου εισάγεται ο τυπικός συμβολισμός με το y ή το f(x) καθώς και η αντιστοίχιση μεταξύ στοιχείων δυο συνόλων. Η κύρια εστίαση στο Γυμνάσιο είναι η γραμμική συνάρτηση και δευτερευόντως η $y = ax^2$. Αρχικά στο Γυμνάσιο δίνεται έμφαση στις γραφικές παραστάσεις των ευθειών y=αx+β, ενώ από την Α Λυκείου μελετώνται πιο συστηματικά τα χαρακτηριστικά και οι μετασχηματισμοί των δευτεροβάθμιων πολυωνύμων. Οι μαθητές επιλύουν προβλήματα όπου χρησιμοποιούνται συναρτήσεις (στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο), μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις (κυρίως στο Λύκειο) και μελετούν γραφικές παραστάσεις (πιο περιορισμένα στο Γυμνάσιο και σε ευρύτερα είδη συναρτήσεων στο Λύκειο). Έτσι, διακρίνουν τις διαφορετικές όψεις της έννοιας και συνθέτουν διακριτές πλευρές της. Παράλληλα, στην κατεύθυνση της Β και της Γ, εμβαθύνουν σε νέες κατηγορίες συναρτήσεων (τριγωνομετρικές, πολυωνυμικές και εκθετικές-λογαριθμικές) και μελετούν ιδιότητες τους (μονοτονία, ακρότατα, πεδία ορισμού) τις οποίες είναι σε θέση να ορίσουν σε γενική μορφή. Έτσι η πορεία της συνάρτησης ως διαδικασίας φτάνει στο σημείο της υποστασιοποίησης και θεώρησης της ως ένα καινούργιο αντικείμενο πάνω στο οποίο μπορούν να εφαρμοστούν νέες διαδικασίες – ενέργειες όπως η σύνθεση, το όριο, η παραγώγιση και η ολοκλήρωση. Στη τελευταία τάξη του Λυκείου γίνεται η πλήρης συνειδητοποίηση της συμπληρωματικότητας της έννοιας της συμμεταβολής με αυτή της αντιστοιχίας. Οι δυο οπτικές της συνάρτησης μπορούν να λειτουργήσουν συμπληρωματικά. Για παράδειγμα ο ρυθμός μεταβολής είναι η έκφραση μιας σχέσης στην οποία οι αλλαγές στη μια μεταβλητή εκφράζονται συμβολικά ή αριθμητικά σε σχέση με τις αλλαγές στην άλλη μεταβλητή, όπου η συμμεταβολή γενικά δεν μπορεί να εκφράσει με ακρίβεια την αλλαγή αυτή. Στις περιπτώσεις όπου ο ρυθμός μεταβολής μπορεί να υπολογιστεί αλγοριθμικά η συμμεταβολή δεν παίζει κάποιο ρόλο. Αντίστοιχα, ένας μαθητής μπορεί να εκφράσει μια κατάσταση ποιοτικά μέσω της συμμεταβολής δυο ποσοτήτων, χωρίς να μπορεί να την εκφράσει μέσω τύπων. Η χρήση παραδειγμάτων με μεταβολές από γραφήματα και πίνακες καθώς και από προβλήματα σε ρεαλιστικά πλαίσια, βοηθάει την υιοθέτηση και των δυο προσεγγίσεων ανάλογα με την περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Αναπαραστάσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων (Wilmot et al.,

2011)		
Επίπεδο	Ο μαθητής μπορεί να	Ανταπόκριση του μαθητή
5. Αφηρημένο	δημιουργεί συνδέσεις όχι μόνο εντός του πεδίου αλλά και πέραν αυτού, γενικεύει και μεταφέρει τις βασικές ιδέες που περιγράφουν τη δεδομένη περίπτωση.	Προβλέπει, εξηγεί και συνθέτει την κατανόηση του σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο. Επιλύει μη-συνήθη προβλήματα με μη αλγοριθμικές μεθόδους
4. Σχετικιστικό	επιδεικνύει κατανόηση της σημαντικότητας των επιμέρους σε σχέση με το όλο.	Συγκρίνει /αντιπαραβάλλει πληροφορίες από διαφορετικές αναπαραστάσεις συναρτήσεων και επιδεικνύει κατανόηση περιεχομένου. Αναγνωρίζει ποιες αναπαραστάσεις να επιλέξει με βάση το πλαίσιο του προβλήματος. Επιλέγει αναπαραστάσεις και μεταβαίνει με ευχέρεια από την μια στην άλλη.
3. Πολυδομικό	Δημιουργεί συνδέσεις, αλλά οι μετα-συνδέσεις μεταξύ τους δεν γίνονται αντιληπτές, ούτε η σημασία τους για το όλο.	Κάνει συνδέσεις μεταξύ περισσότερων από δυο αναπαραστάσεων και αναγνωρίζει τουλάχιστον δυο σχετικές ιδιότητες μιας συναρτησιακής σχέσης.
2. Μονοδομικό	Κάνει απλές και προφανείς συνδέσεις αλλά δεν γίνεται κατανοητή η σημασία τους.	Κάνει συνδέσεις μεταξύ δυο αναπαραστάσεων.
1. Προ-δομικό	Αποκτάει κομμάτια ασύνδετων πληροφοριών που δεν έχουν συνοχή ή νόημα.	Ερμηνεύει γραφήματα όπου και οι δυο μεταβλητές πρέπει να ερμηνευτούν ή με το χρόνο ως ανεξάρτητη

		μεταβλητή. Κατανοεί μια συνάρτηση εκφρασμένη με μια αναπαράσταση.
0. Προ-αλγεβρικό	Αποκτάει αναγκαίες δεξιότητες.	Κατανοεί τη συναρτησιακή εξάρτηση όπου η μεταβολή της μιας επηρεάζει την άλλη. Ξεχωρίζει συνεχείς μεταβλητές από ποιοτικές.

Ενδεικτικό έργο μαθησιακής εξέλιξης της έννοιας της συνάρτησης (Γυμνάσιο και Λύκειο)

Η χρέωση δυο πακέτων Α και Β μιας εταιρίας κινητής τηλεφωνίας είναι ως εξής:

Στο πακέτο «Α» υπάρχει πάγιο 10 € ανά μήνα και η χρέωση είναι 0,20€ για κάθε λεπτό ομιλίας.

Στο πακέτο «Α» υπάρχει πάγιο 6€ ανά μήνα και η χρέωση είναι 0,50€ για κάθε λεπτό ομιλίας.

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις που δίνουν το ποσό που πρέπει να πληρώσουμε σε κάθε γραφείο για x λεπτά ομιλίας. (Β Γυμν.)

β) Για πόσα λεπτά ομιλίας το μήνα θα πληρώσει και στα πακέτα το ίδιο ποσό;

(Β Γυμν.)

γ) Για πόσα λεπτά ομιλίας το μήνα συμφέρει να χρησιμοποιήσει κάποιος το πακέτο Α; (Γ Γυμν.)

δ) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων (αναφέρετε τις υποθέσεις που κάνατε) (Α Λυκ.)

ε) Μπορείτε να δημιουργήσετε ένα πακέτο που να έχει ίδιο πάγιο με το Α αλλά μέχρι 5 λεπτά ομιλίας να έχε μικρότερη χρέωση; Η συνάρτηση κόστους – χρόνου ομιλίας μπορεί να είναι γραμμική; (Β Λυκ.)

Βιβλιογραφία

Bezuidenhout, A. (2001). Metaphor and What Is Said: A Defense of a Direct Expression View of Metaphor. *Midwest Studies in Philosophy ,25*(1):156.

Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education, 10(1),* 53 – 70.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1991*). A history of mathematics*. John Wiley & Sons.

Chazan, D. & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. In: Kilpatrick, J. Schifter, D. & Martin, G.(Eds) *A Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics* Publisher: NCTM.

Clement, L. (2001). What Do Students Really Know about Functions? *Mathematics Teacher*, *94(*9), p.745-48.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15,* 167–192.

Drijvers, P. (Ed.). (2010). *Secondary Algebra Education*. Sense Publishers.

Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* Springer.

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 115–139.

Jankvist, U.T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 235–261.

Knuth, E. J. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education, 31(4)*, 500–508.

Markovits, Z., Eylon, B, & Bruckheimer, M. (1986). Functions Today and Yesterday. *For the Learning of Mathematics 6*,2.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In M. Limon, & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 233-258). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Metaxas, N. (2007). Difficulties on indefinite integral. *Proceedings of the 32nd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education v. 3*, p. 265-272. P.M.E – Korea. ISSN: 0771-100X.

Núñez, R.E., Edwards, L.D. & Filipe Matos, J. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics 39,* 45–65.

Oehrtman, M. (2009). Collapsing Dimensions, Physical Limitation, and Other Student Metaphors for Limit Concepts. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(4), 396-426.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Elements of Pedagogy and Epistemology* (pp.25-58). Notes and Reports Series of the Mathematical Association of America,Vol. 25.

Stewart, I., & Tall, D. (2015). *The foundations of mathematics*. Oxford University Press.

Tall, D. (1996). Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking. *L'Enseignement des Mathématiques*, *42*, 395– 415.

Tall, D. (2002). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics. 12*. 10.1007/BF00305619.

Thompson, P. & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. *Compendium for research in mathematics education* (pp.421-456) Chapter: 16. National Council of Teachers of Mathematics.

Voskoglou, M. & Kosyvas, G. (2012) Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. *Journal of Research in Mathematics Education, 1 (3)*, 301—336.

Wilmot, D., Schoenfeld, A., Wilson, M., Champney, D. & Zahner, W. (2011). Validating a Learning Progression in Mathematical Functions for College Readiness. *Mathematical Thinking and Learning, 13*. 259-291.

b. Γεωμετρία – Μέτρηση

1. Σημασία του πεδίου

Η μελέτη του πεδίου «Γεωμετρία & Μέτρηση» είναι σημαντική για τρεις βασικούς λόγους. Συμβάλλει ουσιαστικά στην ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης προσφέροντας δυνατότητες ερμηνείας και παρέμβασης στο φυσικό και δομημένο περιβάλλον. Αξιοποιείται ως εργαλείο για τη μελέτη άλλων θεμάτων στα μαθηματικά και την επιστήμη. Το πιο σημαντικό, ωστόσο, είναι ότι με τη μελέτη της γεωμετρίας αναπτύσσεται συστηματικά η μαθηματική συλλογιστική, με την οποία εξελίσσεται τόσο η λογική επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση η οποία είναι είναι σημαντική για κάθε πολίτη όσο και η δημιουργική σκέψη σε πολλούς ερευνητικούς τομείς.

Η πρακτική και εκπαιδευτική αξία του πεδίου

Το πεδίο έχει μια γενική πρακτική και εκπαιδευτική αξία. Όλοι χρειάζονται γεωμετρικές γνώσεις προκειμένου να λειτουργήσουν ως πολίτες στην κοινωνία. Παραδοσιακά οι γνώσεις αυτές δεν αναγνωρίζονται ως γεωμετρικές γνώσεις στις οποίες οι μαθητές θα μπορούσαν να εκπαιδευτούν στο σχολείο και να αποκτήσουν αντίστοιχες δεξιότητες. Αυτές οι γνώσεις υποστηρίζουν τη χωρική αντίληψη του μαθητή και μελλοντικού πολίτη και χρησιμοποιούνται σε διαδικασίες όπως η ανάγνωση και λειτουργική χρήση σχεδίων, μοντέλων, διαγραμμάτων και χαρτών, παροχή οδηγιών, σχεδιασμού και κατασκευής αντικειμένων, οργάνωση και λειτουργική ταξινόμηση αντικειμένων στο χώρο, μετρήσεων, προσανατολισμού κ.α. Οι δεξιότητες αυτές είναι απαραίτητες ολοένα και περισσότερο για την αποτελεσματική λειτουργία ενός πολίτη στη σύγχρονη κοινωνία. Το συγκεκριμένο πεδίο μπορεί να καλύψει επίσης διαφοροποιημένες ανάγκες και ικανότητες των μαθητών οι οποίοι ενδιαφέρονται ιδιαίτερα για την ανάπτυξη συλλογισμών με βάση τα σχήματα ή για καλλιτεχνικές δημιουργίες που βασίζονται σε γεωμετρικές ιδέες.

Η προπαρασκευαστική αξία του πεδίου

Ως προπαρασκευαστική αξία του πεδίου σε κάποιο επίπεδο/βαθμίδα θεωρούμε το απαραίτητο υπόβαθρο το οποίο οφείλει να έχει κάποιος μαθητής προκειμένου να είναι προετοιμασμένος για την παρακολούθηση σπουδών σε επόμενο επίπεδο. Με την έννοια αυτή η μελέτη του πεδίου στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση μπορεί να καλλιεργήσει στους μαθητές το απαραίτητο διαισθητικό και εμπειρικό υπόβαθρο για την πιο τυπική και αφαιρετική προσέγγιση της Γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επίσης, η δευτεροβάθμια εκπαίδευση οφείλει να καλλιεργήσει στους μαθητές γνώσεις και ικανότητες ανάπτυξης γεωμετρικού συλλογισμού τις οποίες μπορούν να αξιοποιήσουν τόσο στον επαγγελματικό και προσωπικό τους βίο όσο και στις μετέπειτα σπουδές τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Όμως η εκπαιδευτική αξία του πεδίου αναδεικνύεται και στις συνδέσεις του με άλλα γνωστικά πεδία τόσο των μαθηματικών όσο και άλλων επιστημών. Για παράδειγμα, είναι γνωστή η αξιοποίηση γεωμετρικών αναπαραστάσεων προκειμένου να βρεθεί κάποιος αλγεβρικός τύπος, η ανάπτυξη γεωμετρικών μοντέλων για την αναπαράσταση αριθμητικών πράξεων, η αξιοποίηση γεωμετρικών γνώσεων στη Φυσική κ.α.

Η συμβολή της γεωμετρίας στην ανάπτυξη της μαθηματικής συλλογιστικής και της απόδειξης

Η Γεωμετρία ιστορικά αποτέλεσε το πεδίο με βάση το οποίο αναπτύχθηκε κάθε παραγωγική επιστήμη. Είναι αναγνωρισμένη η συμβολή της Γεωμετρίας στην ανάπτυξη της ορθολογικής σκέψης μέσω της ικανότητας διάκρισης αιτιών και αποτελεσμάτων. Η ανάπτυξη των μαθηματικών ως λογικής δομής στην οποία μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα με βάση κάποιες δεδομένες προτάσεις αναπτύχθηκε με βάση το γεωμετρικό μοντέλο από την εποχή του Ευκλείδη.

Η μαθηματική απόδειξη μιας πρότασης που θα δημοσιευθεί σε κάποιο περιοδικό ή βιβλίο αποτελεί το προϊόν μιας ευρύτερης και πολύπλοκης διαδικασίας. Αυτή η διαδικασία μπορεί να παραμένει αδιαφανής για τους μαθητές που διαβάζουν μία απόδειξη. Η απόδειξη είναι μια διαδικασία στην οποία όχι μόνο η αφαιρετική συλλογιστική αλλά και η εξερεύνηση διαδραματίζει κυρίαρχο ρόλο (Ρόlya, 1957). Η αποδεικτική διαδικασία είναι μία σύνθετη γνωστική δραστηριότητα η οποία δεν χαρακτηρίζεται αποκλειστικά από τη λογική επιχειρηματολογία αλλά περιλαμβάνει πλούτο διερευνητικών, επαγωγικών και απαγωγικών διεργασιών. Η απόδειξη είναι μία σημαντική πτυχή της διδασκαλίας των μαθηματικών αλλά δεν αποτελεί αυτοσκοπό

(Schoenfeld, 1994). Η ικανότητα διερεύνησης μιας προβληματικής κατάστασης, η ανταλλαγή επιχειρημάτων και η οργάνωσή τους σε μια λογική σειρά είναι επίσης σημαντικές ενέργειες για τη μάθηση των μαθητών.

Η αποδεικτική διαδικασία μπορεί να χωριστεί σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση γίνεται διερεύνηση της προβληματικής κατάστασης με στόχο την παραγωγή μιας εικασίας, στη συνέχεια μορφοποιείται μία εικασία σύμφωνα με τις συμβάσεις του περιεχομένου η οποία στην προσπάθεια τεκμηρίωσής της μπορεί να αναθεωρηθεί. Στο τέλος της πρώτης φάσης η εικασία ελέγχεται και διερευνώνται επιχειρήματα για την τεκμηρίωσή της. Η πρώτη φάση είναι μία «κρυφή» διαδικασία και δεν υπόκειται σε δημόσια επικοινωνία σε αντίθεση με τη δεύτερη φάση η οποία περιλαμβάνει την επιλογή και τον συνδυασμό συνεκτικών επιχειρημάτων σε μια αφαιρετική αλυσίδα, την οργάνωση αυτών των επιχειρημάτων σύμφωνα με τα μαθηματικά πρότυπα και την τελική διατύπωση της τυπικής απόδειξης (Boero, 1999).

Η ενίσχυση των ικανοτήτων των μαθητών να σκέφτονται λογικά και να επιχειρηματολογούν με συνέπεια θεωρείται σημαντικός στόχος της διδασκαλίας στο σχολείο. Η ανάπτυξη ικανοτήτων λογικής συλλογιστικής και επιχειρηματολογίας είναι σημαντικές για πολλούς και διαφορετικούς τομείς με ειδικό ρόλο στα μαθηματικά. Κατά συνέπεια, η συλλογιστική, η επιχειρηματολογία και η μαθηματική απόδειξη έχουν ενσωματωθεί στην τάξη των μαθηματικών σε όλα τα προγράμματα σπουδών μαθηματικών αλλά με διαφορετική εμφατικότητα και προσεγγίσεις. Ωστόσο, πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες με τη συνεπή συλλογιστική και επιχειρηματολογία, και ιδίως με τη μαθηματική απόδειξη (Harel & Sowder, 1998; Healy & Hoyles, 1998; Reiss, Klieme, & Heinze, 2001).

Λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω ερευνητικά αποτελέσματα στο πρόγραμμα σπουδών προκρίνεται η διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας όπου δίνεται ιδιαίτερη έμφαση και στην πρώτη προπαρασκευαστική της φάση σε σχέση με την παραδοσιακή διδασκαλία που περιοριζόταν στη δεύτερη φάση της. Στόχος είναι η πρώτη φάση της αποδεικτικής διαδικασίας να αποτελέσει πεδίο διδακτικής διαπραγμάτευσης αναγνωρίζοντας τη σημαντικότητά της στη μάθηση των μαθηματικών. Είναι σημαντικό ότι η πρώτη φάση της αποδεικτικής διαδικασίας μπορεί να συμβάλλει σημαντικά στην ενεργοποίηση, τη συμμετοχή των μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών και στην απόδοση νοήματος από τους ίδιους στην αποδεικτική διαδικασία.

Ενώ είναι σημαντικό για την ανάπτυξη της λογικής επιχειρηματολογίας και συλλογιστικής των μαθητών αυτοί να εμπλέκονται σε μαθησιακά περιβάλλοντα επίλυσης προβλήματος και διερευνήσεων εντούτοις έρευνες υποδηλώνουν ότι οι διαδικασίες αυτές δεν οδηγούν απαραίτητα τους μαθητές σε ανάπτυξη ιδεών για μαθηματική απόδειξη. Το μαθηματικό περιβάλλον δεν οφείλει μόνο να επιτρέπει εξερευνήσεις και υποθέσεις αλλά είναι σημαντικό να παρέχει συγκεκριμένη υποστήριξη σε σχέση με την αποδεικτική διαδικασία.

Το θεματικό πεδίο στο Λύκειο υποδιαιρείται σε : α) Γεωμετρία, β) Μετρήσεις και γ) Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Στη **Γεωμετρία** η ανάπτυξη της γνώσης στο Λύκειο οργανώνεται με βάση απλές αρχές και προχωρά στη μελέτη και ανάλυση των συνεπειών τους. Επιπλέον οι γεωμετρικές έννοιες οργανώνονται στο πλαίσιο ενός συστήματος, μιας δομής όπου διερευνώνται χαρακτηριστικά και ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων.

Η μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων από τους μαθητές συχνά συνδέται με προσωπικά νοήματα και εμπειρικές προσεγγίσεις. Σε αντίθεση με τους αριθμούς που αναφέρονται μόνο έμμεσα σε κάποια μεγέθη και έτσι δεν συμπεριλαμβάνουν την ποσότητα στην οποία αναφέρονται, τα γεωμετρικά σχήματα συχνά παραμένουν για τους μαθητές χωρικά αντικείμενα και ως τέτοια έχουν χωρικές ιδιότητες όπως μορφή, θέση, μέγεθος και προσανατολισμό. Όμως στο πλαίσιο μιας τυπικής μαθηματικής θεώρησης τα γεωμετρικά σχήματα αποτελούν νοητικές κατασκευές που προσδιορίζονται με βάση τους ορισμούς και τις ιδιότητές τους. Αυτές οι δύο προσεγγίσεις συχνά φέρουν σε νοητική σύγκρουση τους μαθητές η οποία έχει ληφθεί υπόψη στην ανάπτυξη του προγράμματος σπουδών. Κάθε σχήμα έχει ταυτόχρονα εννοιολογικές και χωρικές ιδιότητες. Ο γεωμετρικός συλλογισμός χαρακτηρίζεται από την αλληλεπίδραση ανάμεσα στη χωρική και εννοιολογική πτυχή των γεωμετρικών εννοιών, εξετάζει αφενός αφηρημένες ιδέες (έννοιες) και αφετέρου, αναπαραστάσεις με συγκεκριμένες σχηματικές πληροφορίες και διαδικασίες. Οι λανθασμένες εκφάνσεις του συλλογισμού μπορούν να ερμηνευτούν ως δυσαρμονία μεταξύ της χωρικής και της εννοιολογικής λειτουργίας των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων (Fischbein, 1993).

Βασικός στόχος της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στο Λύκειο είναι οι μαθητές να κατοχυρώσουν την αντίληψη τους για τα γεωμετρικά σχήματα με βάση τις ιδιότητες τους και όχι με τον προσανατολισμό τους και τις πρωτοτυπικές μορφές τους. Στην προσπάθεια αυτή οι ιδιότητες των σχημάτων οργανώνονται σε λογικές δομές και αναπτύσσονται λογικοί συλλογισμοί και αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων.

Η **Μέτρηση** είναι ιδιαίτερα σημαντική για τα μαθηματικά και έχει σπουδαία παιδευτική αξία για τους μαθητές, επειδή συνδυάζει θεωρητικά ζητήματα με την εφαρμογή τους στην επίλυση προβλημάτων. Παρόλο που είναι γνωστό ότι η έννοια της μέτρησης στη Γεωμετρία συνδέεται με την Άλγεβρα και την Ανάλυση, στο πρόγραμμα σπουδών του Λυκείου μελετάται με στόχο την ανάδειξη των γεωμετρικών ιδιοτήτων των σχημάτων και των διαδικασιών μετασχηματισμού τους και δεν περιορίζεται σε υπολογιστικές ασκήσεις εφαρμογής των τύπων.

Οι μαθητές στο Λύκειο σε κάποιες περιπτώσεις αξιοποιούν άμεσες μετρήσεις γεωμετρικών μεγεθών χρησιμοποιώντας εργαλεία μέτρησης προκειμένου να κάνουν εικασίες για τους τρόπους υπολογισμού τους. Κυρίως όμως εμπλέκονται σε αποδεικτικές διαδικασίες για την εγκυροποίηση τύπων υπολογισμού των γεωμετρικών μεγεθών και αξιοποίησης των τύπων αυτών στην επίλυση προβλημάτων. Θεωρούν το μέτρο ενός γεωμετρικού μεγέθους ως το λόγο του προς μία κατάλληλη μονάδα μέτρησης. Συνδέουν τους τύπους υπολογισμού των γεωμετρικών μεγεθών με τις μονάδες μέτρησης. Διακρίνουν την ισότητα δύο γεωμετρικών μεγεθών από την ισότητα των μέτρων τους. Συσχετίζουν την ανάλυση και σύνθεση γεωμετρικών μεγεθών με τις αντίστοιχες πράξεις των μέτρων τους.

Οι μαθητές στην ανώτερη σχολική βαθμίδα αναγνωρίζουν ενιαία χαρακτηριστικά στην έννοια της μέτρησης όπως η καθιέρωση μονάδας μέτρησης. Διακρίνουν την ισότητα των γεωμετρικών μεγεθών από την ισότητα των μέτρων τους. Αποδίδουν στην ανάλυση και σύνθεση των σχημάτων τις αντίστοιχες ιδιότητες των μέτρων τους. Για παράδειγμα μετασχηματίζουν ένα παραλληλόγραμμο σε ένα ισεμβαδικό ορθογώνιο. Αξιοποιούν αυτή τη διεργασία για την ανακάλυψη και απόδειξη τύπων για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων βασικών σχημάτων. Συνδέουν τους τύπους για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων με τη μονάδα μέτρησης και αξιοποιούν τους τύπους αυτούς για την επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων.

Στην **Αναλυτική Γεωμετρία** χρησιμοποιούνται αλγεβρικοί συμβολισμοί και μέθοδοι για την αναπαράσταση και την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Η σημασία της Αναλυτικής Γεωμετρίας στο πρόγραμμα σπουδών έγκειται στην θεώρηση συστήματος συντεταγμένων προκειμένου να προσδιοριστούν οι θέσεις των σημείων στο επίπεδο με διατεταγμένα ζεύγη και οι γραμμές με αλγεβρικές εξισώσεις. Αυτή η προσέγγιση δίνει τη δυνατότητα διαπραγμάτευσης γεωμετρικών προβλημάτων με αντίστοιχα προβλήματα στην Άλγεβρα και αντίστροφα αξιοποιώντας με τον τρόπο αυτό τις μεθόδους του κάθε πεδίου στην επίλυση προβλημάτων του άλλου. Επιπλέον έμφαση δίνεται στην αξιοποίηση της Αναλυτικής γεωμετρίας για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων και την ερμηνεία φαινομένων του φυσικού κόσμου.

2. Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης/σκέψης και δυσκολίες των μαθητών

Γεωμετρία

Η μελέτη της Γεωμετρίας στο πρόγραμμα σπουδών αποφεύγει μια εξαντλητική τυπική αξιωματική θεμελίωση στο πρώιμο στάδιο εισαγωγής των μαθητών στο Λύκειο. Άλλωστε έρευνες (π.χ. van Hiele 1986) έχουν δείξει ότι οι μαθητές στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δυσκολεύονται ιδιαίτερα να κατανοήσουν το νόημα μιας τέτοιας θεμελίωσης. Σκοπός του προγράμματος είναι να δοθεί η δυνατότητα στους μαθητές να διαπραγματευτούν γεωμετρικές έννοιες και προβλήματα με πραγματικό νόημα για τους ίδιους και έχοντας προχωρήσει σε περιεχόμενο και διαδικασίες να διαμορφωθεί το υπόβαθρο για την αναγκαιότητα της αξιωματικής θεμελίωσης.

Η Γεωμετρία στο Λύκειο αναπτύσσεται στις εξής θεματικές ενότητες: (α) Γεωμετρία του επιπέδου και (β) Γεωμετρία του Χώρου

- Η πρώτη θεματική ενότητα «Γεωμετρία του επιπέδου» αναφέρεται στη μελέτη (i) γραμμών και γωνιών, (ii) πολυγώνων, (iii) κύκλου και (iv) γεωμετρικών τόπων.

Η μελέτη των γραμμών και γωνιών, των πολυγώνων, του κύκλου και των γεωμετρικών τόπων που συνιστούν την θεματική ενότητα της γεωμετρίας του επιπέδου αναπύσσεται με βάση: (α) την αναγνώριση, (β) τις ιδιότητες, (γ) τη σχεδίαση και τις κατασκευές και (δ) τις σχέσεις τους. (van Hiele 1986; Clements, & Battista, 1992). Οι διεργασίες αυτές ειδικά για την διδακτική διαπραγμάτευση στο Λύκειο αποτελούν ένα ενιαίο πλέγμα νοητικής προσέγγισης των γεωμετρικών αντικειμένων.

Η αναγνώριση των γεωμετρικών αντικειμένων στο Λύκειο επιδιώκεται να γίνεται αποκλειστικά με βάση τις ιδιότητες τους. Για παράδειγμα, ένα τετράπλευρο που μορφολογικά φαίνεται ορθογώνιο, αναγνωρίζεται ως τέτοιο, μόνο στην περίπτωση που είναι γνωστό ότι έχει εκείνες τις ιδιότητες που προσδιορίζουν ένα ορθογώνιο. Στο πλαίσιο αυτό οι μετρήσεις δεν θεωρούνται αποδεκτή μέθοδος τεκμηρίωσης των ιδιοτήτων των σχημάτων. Στην κατεύθυνση αυτή δίνεται ιδιαίτερη σημασία στο πρόγραμμα σπουδών στη μελέτη των γεωμετρικών τόπων, όπου ουσιαστικά οι μαθητές ανακαλύπτουν και προσδιορίζουν ένα γεωμετρικό σχήμα μόνο από τις ιδιότητες του.

Οι μαθητές, ακόμα και στο Λύκειο, δυσκολεύονται να αποδεχθούν τις ιδιότητες των σχημάτων ως μοναδικό κριτήριο προσδιορισμού τους και καταφεύγουν σε εμπειρικές προσεγγίσεις επηρεαζόμενοι σε σημαντικό βαθμό από τις μορφές πρωτοτυπικών σχημάτων και τον προσανατολισμό τους. Για το σκοπό αυτό είναι σημαντικό να αναπτύσσονται διδακτικές πρακτικές με τις οποίες θα αναδεικνύονται οι αδυναμίες των εμπειρικών προσεγγίσεων και οι δυνατότητες εγκυροποίησης των συμπερασμάτων που βασίζονται σε αποδεικτικές διαδικασίες.

Οι ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων είναι σε σημαντικό βαθμό γνωστές στους μαθητές από τις προηγούμενες τάξεις. Στο Λύκειο αποδεικνύονται οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τον ορισμό τους και επιπλέον διαμορφώνονται εκείνες οι ιδιότητες που προσδιορίζουν τα γεωμετρικά αντικείμενα και λειτουργούν ως κριτήρια συγκρότησης ευρύτερων κλάσεων. Έτσι, για παράδειγμα ορίζουμε ως παραλληλόγραμμο το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και αποδεικνύουμε ότι οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι κάθε τετράπλευρο στο οποίο και τα δύο ζεύγη των απέναντι γωνιών είναι ίσα είναι παραλληλόγραμμο. Μπορεί όμως να αποδειχθεί με κατάλληλο αντιπαράδειγμα ότι η ισότητα μόνο του ενός ζεύγους των απέναντι γωνιών δεν προσδιορίζει μονοσήμαντα ένα παραλληλόγραμμο. Στο ίδιο πλαίσιο μία ενδιαφέρουσα δραστηριότητα είναι να ζητείται η απόδειξη μίας ιδιότητας ενός γεωμετρικού σχήματος καθώς και η διατύπωση και ο έλεγχος της αντίστροφης της συγκεκριμένης πρότασης. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορούν να αποδείξουν ότι οι διαγώνιοι ενός ρόμβου τέμνονται κάθετα και να ελέγξουν αν είναι ρόμβος το τετράπλευρο του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα. Επίσης, μπορούν να ανακαλύψουν τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου προκειμένου αυτό να είναι ρόμβος.

Οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων είναι το καθοριστικό κριτήριο για την ταξινόμηση τους. Με τον τρόπο αυτό τα γεωμετρικά σχήματα μπορούν να οργανώνουν και να ταξινομούν τα γεωμετρικά σχήματα σε λογικές δομές. Η οργάνωση των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τις ιδιοτητές τους επιτρέπει στους μαθητές να θεωρούν τα σχήματα που ανήκουν σε μια κατηγορία ότι ανήκουν επίσης σε όλες τις υποκατηγορίες αυτής της κατηγορίας. Έτσι τα ειδικά παραλληλόγραμμα (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) έχουν όλες τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και επιπλέον κάποια ή κάποιες επιπλέον ιδιότητες που τα προσδιορίζουν. Η ταξινόμηση των τετραπλεύρων με βάση τις χαρακτηριστικές τους ιδιότητες μπορεί να συμβάλλει ουσιαστικά στη απόρριψη της μορφολογικής τους προσέγγισης και την ένταξή τους στο πλαίσιο μιας λογικής δομής. Με αφορμή την ταξινόμηση των παραλληλογράμμων αναπτύσσεται ένας σημαντικός ευρύτερος στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης που είναι η διαμόρφωση ενός πλαισίου παραγωγής λογικών επιχειρημάτων. Ο στόχος αυτός ξεπερνά την ενασχόληση με τα ίδια τα γεωμετρικά αντικείμενα συμβάλλοντας ουσιαστικά στη θεώρησή τους στο πλαίσιο λογικών δομών που αποτελεί σημαντική πτυχή ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης.

Ιδιαίτερη σημασία αποδίδεται από το πρόγραμμα σπουδών στο Λύκειο στη διαμόρφωση των **ορισμών** των γεωμετρικών εννοιών και σχημάτων. Εξηγούνται οι όροι που χρησιμοποιούνται στους ορισμούς, η αναγκαιότητα της ύπαρξης κάθε όρου καθώς και η σημασία τους στην ανάπτυξη της γεωμετρίας. Για παράδειγμα, όταν ζητείται να αποδειχθεί ότι ένα τετράπλευρο είναι τραπέζιο θα πρέπει να αποδειχθεί όχι μόνο ότι οι δύο του πλευρές είναι παράλληλες αλλά και ότι οι άλλες δύο τέμνονται. Οι μαθητές αναγνωρίζουν τον ορισμό μιας κλάσης σχημάτων (π.χ. παραλληλόγραμμα) ως πρόταση που καθορίζει μονοσήμαντα την κλάση αυτή και αποτελεί το σημείο αναφοράς για τη διαμόρφωση κριτηρίων για την ένταξη ενός σχήματος στη συγκεκριμένη κλάση. Οι ορισμοί ενσωματώνουν σημαντικά επιστημολογικά στοιχεία διαμόρφωσης της έννοιας τα οποία σε αρκετές περιπτώσεις δεν αναφέρονται ρητά και έχουν ξεχωριστή αξία για τα μαθηματικά. Για παράδειγμα, ενώ η ισότητα των γεωμετρικών σχημάτων αναφέρεται στη δυνατότητα ταύτισής τους μετά από κατάλληλους μετασχηματισμούς, συχνά αποδίδεται μέσω της ισότητας των στοιχείων που τα αποτελούν χωρίς να ελέγχεται η δυνατότητα ταύτισής τους. Συχνά οι ορισμοί περιλαμβάνουν τις ελάχιστες ιδιότητες που προσδιορίζουν μία κλάση σχημάτων και οι μαθητές καλούνται να αποδείξουν τις υπόλοιπες ιδιότητες τους. Όμως αυτή η προσέγγιση δεν ακολουθείται σε κάθε περίπτωση. Για παράδειγμα, δεν ορίζουμε ως ίσα τα τρίγωνα που έχουν μόνο τις πλευρές τους ίσες, το οποίο θα ήταν αρκετό, αλλά θεωρούμε ίσα τα τρίγωνα που έχουν τις πλευρές και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Οι μαθητές στις προηγούμενες τάξεις έχουν σχεδιάσει αρκετά γεωμετρικά αντικείμενα με δεδομένα χαρακτηριστικά αξιοποιώντας διάφορα όργανα σχεδίασης. Οι διαδικασίες που ακολουθούνται στις γεωμετρικές κατασκευές στην ανώτερη σχολική βαθμίδα είναι κυρίως νοητικές υπερβαίνοντας το χειραπτικό και εργαλειακό χαρακτήρα που έχουν στις προηγούμενες βαθμίδες και στοχεύουν στην ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού και την απόδειξη με την αξιοποίηση κατάλληλων εργαλείων.

Για τις ανάγκες της απόδειξης μιας γεωμετρικής πρότασης συχνά σχεδιάζεται ένα σκαρίφημα που λειτουργεί ως οπτικό ερέθισμα για το μαθητή στο οποίο όμως ενσωματώνονται νοητικά όλες οι ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το συγκεκριμένο σχήμα. Στο πλαίσιο αυτό οι άμεσες μετρήσεις με γεωμετρικά όργανα δεν υιοθετούνται ως αποδεκτή μέθοδος τεκμηρίωσης των ιδιοτήτων των σχημάτων. Αξιοποιούνται θεωρήματα για να τεκμηριώσουν συγκεκριμένες γεωμετρικές κατασκευές. Σχεδιάζονται σχήματα σε προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας που «αντέχουν στο σύρσιμο», δηλαδή, σχήματα που διατηρούν τη δομή τους αν μετακινηθεί κάποια κορυφή τους. Σε ένα δυναμικό γεωμετρικό περιβάλλον οι αλλαγές μέσω του «συρσίματος» δίνουν στους μαθητές την ευκαιρία για μια μορφή γεωμετρικού συλλογισμού που «οι ιδιότητες και οι σχέσεις ενός γεωμετρικού συστήματος ή σχήματος, είτε είναι μετρικές, είτε περιγραφικές, παραμένουν έγκυρες σε όλα τα διαδοχικά στάδια μετασχηματισμού κατά τη διάρκεια της κίνησης που διατηρεί τις ιδιότητες ορισμού αυτού του σχήματος ή συστήματος» (Sinclair & Yurita, 2005, σ. 5). Για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει ο σχεδιασμός του σχήματος να γίνει με βάση τις γεωμετρικές του ιδιότητες και με όχι με βάση τη μορφή του. Τέτοιες κατασκευές προσδίδουν στο σχήμα δυναμικά χαρακτηριστικά δίνοντας τη δυνατότητα παρατήρησης μεταβλητών και αναλλοίωτων στοιχείων του.

Οι μαθητές στο Λύκειο αρχικά διαπραγματεύονται γεωμετρικές κατασκευές (με κανόνα και διαβήτη) οι οποίες μπορεί να είναι γνωστές από το Γυμνάσιο αλλά τεκμηριώνονται με βάση τις προτάσεις που διδάσκονται. Αρχικά εκπονούν απλές γεωμετρικές κατασκευές και στη συνέχεια πιο σύνθετες αιτιολογώντας το συλλογισμό τους. Για παράδειγμα, μπορούν βρουν διαφορετικές γεωμετρικές κατασκευές της διχοτόμου μιας γωνίας. Στη συνέχεια αξιοποιούν νέες προτάσεις για να πραγματοποιήσουν νέες συναφείς γεωμετρικές κατασκευές. Για παράδειγμα, μπορεί να αξιοποιηθεί ότι η εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή για να κατασκευαστεί γεωμετρικά η εφαπτομένη ενός κύκλου που διέρχεται από σημείο εκτός αυτού.

Η μελέτη προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών έρχεται να συμβάλλει στην ανάπτυξη δημιουργικής σκέψης των μαθητών μέσω της διαπραγμάτευσης πρωτόγνωρων προβλημάτων τα οποία δεν κατηγοριοποιούνται με ευκολία και συνεπώς η επίλυσή τους δεν ανάγεται στην εφαρμογή μιας γνωστής μεθοδολογίας.

Η διαπραγμάτευση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών στη Γ΄ Λυκείου αξιοποιεί τις γνώσεις που οι μαθητές έχουν διδαχθεί στις προηγούμενες τάξεις και εξελίσσεται με την Αναλυτική – Συνθετική μέθοδο η οποία περιλαμβάνει τα εξής βήματα: (α) Ανάλυση, (β) Σύνθεση, (γ) Απόδειξη και (γ) Διερεύνηση.

Το πρώτο βήμα της Ανάλυσης το εφαρμόζουμε όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή. Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο σχήμα έχει κατασκευαστεί και προσπαθούμε να εντοπίσουμε εκείνες τις ιδιότητές του που ανάγουν τον προσδιορισμό του σε ήδη γνωστές γεωμετρικές κατασκευές. Στη Σύνθεση πραγματοποιούμε τις επιμέρους γεωμετρικές κατασκευές που ανακαλύψαμε στην Ανάλυση και κατασκευάζουμε το σχήμα. Με το βήμα της Απόδειξης επιβεβαιώνουμε ότι το σχήμα που κατασκευάστηκε ικανοποιεί τα δεδομένα στοιχεία του προβλήματος. Τέλος στο βήμα της Διερεύνησης, διερευνούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα ώστε το πρόβλημα να έχει λύση καθώς και το πλήθος των λύσεων. Επιπλέον στη Διερεύνηση εξετάζεται και το πλήθος των λύσεων του προβλήματος. Η Αναλυτική - Συνθετική μέθοδος χρησιμοποιείται τόσο σε προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών αλλά σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών.

Στη Γεωμετρία του επιπέδου διακρίνουμε τις εξής βασικές σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων: (α) σχέση ισότητας, (β) ανισοτικές σχέσεις και (γ) σχέση ομοιότητας.

Δύο γεωμετρικά αντικείμενα θεωρούνται ίσα όταν εφαρμόζεται το ένα επί του άλλου και όλα τα στοιχεία τους ταυτίζονται. Έτσι η ισότητα των γεωμετρικών σχημάτων ανάγεται στην ισότητα των επιμέρους στοιχείων τους. Ειδικά για τα πολύγωνα η ισότητά τους ανάγεται στην ισότητα των πλευρών και των αντίστοιχων γωνιών. Έτσι προκύπτει και η αναγκαιότητα διαμόρφωσης κριτηρίων ισότητας των γεωμετρικών αντικειμένων δηλαδή των ελάχιστων ίσων στοιχείων που πρέπει να έχουν δύο σχήματα ώστε να είναι ίσα.

Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δοθεί στη διάκριση ανάμεσα στα σχήματα όπου η ισότητα των μέτρων τους συνεπάγεται την ισότητα των ίδιων των σχημάτων όπως το ευθύγραμμο τμήμα και η γωνία σε σχέση με σχήματα όπως τα πολύγωνα όπου η ισότητα των εμβαδών τους δεν συνεπάγεται την ισότητα των αντίστοιχων σχημάτων.

Στην προσπάθεια σύγκρισης δύο γεωμετρικών αντικειμένων ιδιαίτερα στο Λύκειο προκρίνονται οι γεωμετρικές ιδιότητες και μέθοδοι από τις διαδικασίες μέτρησης.

Με την έννοια αυτή η σύγκριση των βασικών γεωμετρικών αντικειμένων (ευθυγράμμων τμημάτων, γωνιών, τόξων) δεν προϋποθέτει τη μέτρηση. Η σύγκριση δεν επεκτείνεται σε άλλα γεωμετρικά αντικείμενα πέρα από τα βασικά μέσω της σύγκρισης των μέτρων τους. Δηλαδή, για δύο τρίγωνα που δεν είναι ίσα δεν έχει νόημα η αναζήτηση μιας συγκεκριμένης σχέσης διάταξης μεταξύ τους.

Η ομοιότητα με τη γενική έννοια αποτελεί ένα χαρακτηριστικό του αντιληπτικού μας συστήματος μέσω του οποίου ταξινομούμε τα φαινόμενα (Lakoff & Johnson 1980). Η ομοιότητα είναι ένας όρος ο οποίος έχει και καθημερινή χρήση η οποία έχει διαφορές με τη μαθηματική του σημασία και για το λόγο αυτό μπορεί να προκαλέσει παρανοήσεις στους μαθητές. Έτσι ενώ με την κοινή χρήση του όρου δύο αντικείμενα χαρακτηρίζονται όμοια όταν έχουν «μικρές διαφορές» ή «έχουν την ίδια μορφή» στα μαθηματικά δύο αντικείμενα είναι όμοια όταν μπορούν να ταυτιστούν μετά από σμίκρυνση ή μεγέθυνση ή αλλιώς όταν μπορούν να γίνουν ομοιόθετα μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών.

Οι μαθητές στο Γυμνάσιο έχουν μελετήσει τόσο την έννοια της ομοιότητας όσο και την έννοια της ομοιοθεσίας. Στο λύκειο περιορίζονται στην αξιοποίηση της ομοιότητας πολυγώνων για την επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων μετρικών σχέσεων.

Παρουσίαση των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων της Γεωμετρίας του επιπέδου

Οι μαθητές στην υποχρεωτική εκπαίδευση έχουν ασχοληθεί (συζητήσει, μελετήσει) τα βασικά γεωμετρικά αντικείμενα. Στο Λύκειο επικεντρώνονται στη μελέτη των ιδιοτήτων τους και του προσδιορισμού τους μέσω αυτών, των σχέσεών, του σχεδιασμού τους και των γεωμετρικών τους κατασκευών.

(i) Οι **γραμμές** (ευθείες, ημιευθείες, ευθύγραμμα τμήματα) και οι **γωνίες** και οι σχέσεις έχουν μελετηθεί και στις προηγούμενες τάξεις. Στην Α΄ Λυκείου αναγνωρίζουν το ρόλο του 5^{ου} ευκλείδειου αιτήματος στη γεωμετρία. Αποδεικνύουν τις σχέσεις γωνιών που σχηματίζουν παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη ευθεία και διατυπώνουν κριτήρια για την παραλληλία δύο ευθειών του επιπέδου. Διερευνούν και αποδεικνύουν τις σχέσεις γωνιών με κάθετες και παράλληλες πλευρές.

(ii) Η μελέτη των **πολυγώνων** διακρίνεται στη μελέτη τριγώνων, τετραπλεύρων και πολυγώνων με περισσότερες από 4 πλευρές.

Κατά τη μελέτη των τριγώνων, στην Α΄ Λυκείου, αποδεικνύονται ιδιότητες των στοιχείων τριγώνου προσδιορίζονται ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο και αξιοποιείται η σύγκριση τριγώνων στην απόδειξη γεωμετρικών προτάσεων. Στη Β΄ Λυκείου αξιοποιείται η ομοιότητα τριγώνων στην επίλυση γεωμετρικών και ρεαλιστικών προβλημάτων και αποδεικνύονται μετρικές σχέσεις στοιχείων τριγώνων.

Η μελέτη των τετραπλεύρων στην Α΄ Λυκείου επικεντρώνεται στη μελέτη των παραλληλογράμμων και των τραπεζίων.

Για το παραλληλόγραμμο αποδεικνύονται ιδιότητες και κριτήρια. Στη συνέχεια μελετώνται τα ειδικά παραλληλόγραμμα (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) και αποδεικνύονται οι αντίστοιχες ιδιότητες και τα κριτήρια. Ιδιαίτερη σημασία αποδίδεται στην ταξινόμηση των παραλληλογράμμων βάση των ιδιοτήτων τους και στην αξιοποίησή τους στην απόδειξη προτάσεων και στην επίλυση προβλημάτων.

Στη Β΄ Λυκείου μελετώνται τα κανονικά πολύγωνα, όπου διαμορφώνονται κριτήρια εγγραφής τους σε κύκλο και αξιοποιούνται οι ιδιότητές τους στην επίλυση προβλημάτων. Επίσης, μέσω της ανάλυσης και ανασύνθεσης των σχημάτων διαμορφώνονται και αποδεικνύονται οι τύποι για τα εμβαδά των βασικών σχημάτων και κατασκευάζονται ισεμβαδικά σχήματα.

(iii) Η μελέτη του **κύκλου** και των στοιχείων του έχει πραγματοποιηθεί σε σημαντικό βαθμό και στο Γυμνάσιο. Στο Λύκειο αξιοποιούνται γνωστές ιδιότητες στην απόδειξη προτάσεων και σε γεωμετρικές κατασκευές τόσο στην Α΄ όσο και στη Γ΄ Λυκείου. Στη Β΄ Λυκείου μελετώνται εγγεγραμμένες και επίκεντρες γωνίες σε κύκλο καθώς και η σχέση μεταξύ τους όταν βαίνουν στο ίδιο τόξο. Επίσης, διερευνώνται ιδιότητες εγγεγραμμένων πολυγώνων σε κύκλο και διαμορφώνονται κριτήρια εγγραψιμότητας τετραπλεύρων και πολυγώνων σε κύκλο.

(iv) **Γεωμετρικός τόπος** θεωρείται το σύνολο των σημείων τα οποία έχουν μία χαρακτηριστική ιδιότητα. Για να διαπιστώσουμε ότι ένα γεωμετρικό σχήμα αποτελεί γεωμετρικό τόπο σημείων με μία ιδιότητα αρκεί να αποδείξουμε ότι:
α) Όλα τα σημεία του γεωμετρικού σχήματος έχουν τη συγκεκριμένη ιδιότητα.
β) Κάθε σημείο που έχει την ιδιότητα ανήκει στο συγκεκριμένο σχήμα.

Οι γεωμετρικοί τόποι που θα διαπραγματευτούν οι μαθητές στη Γεωμετρία του Λυκείου είναι ευθείες ή τμήματα αυτών και κύκλοι ή τμήματά τους και προσδιορίζονται γεωμετρικά. Η παιδευτική αξία της διαπραγμάτευσης των γεωμετρικών τόπων είναι ιδιαίτερα σημαντική επειδή οι μαθητές προσδιορίζουν ένα σχήμα το οποίο δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων αλλά με βάση τις ιδιότητές του και στη συνέχεια αποδεικνύουν τον ισχυρισμό τους.

Μέσω της μελέτης των γεωμετρικών τόπων δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να εμπλακούν σε διερευνητικές διαδικασίες, να κάνουν εικασίες τις οποίες να ελέγξουν, να αναπτύξουν συλλογισμούς εγκυροποίησης τους και να αναζητήσουν περιορισμούς στα δεδομένα ενός γεωμετρικού προβλήματος όπως και το πλήθος διαφορετικών λύσεων ενός προβλήματος. Επίσης, μέσω της διερεύνησης των γεωμετρικών τόπων εμπλέκονται για πρώτη φορά σε διαδικασίες όπου το γεωμετρικό σχήμα γίνεται δυναμικό, μεταβάλλεται και προσδιορίζονται οι γραμμές στις οποίες διαγράφουν τα κινούμενα μέρη του.

Οι μαθητές δεν έχουν πρότερες γνώσεις με την έννοια του γεωμετρικού τόπου όμως έχουν αρκετές γνώσεις σε σχέση με τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων τις οποίες οφείλουν να αξιοποιήσουν για τον προσδιορισμό γεωμετρικών τόπων. Η διαπραγμάτευση των γεωμετρικών τόπων ειδικά στη Γ΄ Λυκείου μπορεί να συμβάλλει σημαντικά στην αξιοποίηση γεωμετρικών γνώσεων από τις προηγούμενες τάξεις του Λυκείου με μια ενιαία μέθοδο σε μία νοητική διαδικασία υψηλού επιπέδου.

Βασική δυσκολία των μαθητών στα προβλήματα των γεωμετρικών τόπων είναι ο προσδιορισμός τους. Ο εκπαιδευτικός είναι σημαντικό να γνωρίζει τη δυσκολία που συναντούν οι μαθητές στην αναγνώριση ενός σχήματος μόνο από κάποια χαρακτηριστική του ιδιότητα. Ενδεχομένως οι μαθητές να δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν την αναγκαιότητα απόδειξης ότι κάθε σημείο της γραμμής που βρήκαν έχει τη χαρακτηριστική ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου. Συχνά οι μαθητές αποφεύγουν να ελέγξουν αν όλα τα σημεία μιας γραμμής που έχουν προσδιορίσει ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του προβλήματος.

Με βάση τις γνωστές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τους γεωμετρικούς τόπους πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή τόσο στη δυσκολία των θεμάτων που θα κληθούν οι μαθητές να διαπραγματευτούν όσο και στη διαδικασία μετάβασης από πιο απλά σε πιο σύνθετα θέματα. Σε κάθε περίπτωση είναι εκτός των απαιτήσεων του προγράμματος εξεζητημένα προβλήματα γεωμετρικών τόπων που παραδοσιακά διδάσκονταν για την προετοιμασία υποψηφίων στις πολυτεχνικές και σχολές θετικών επιστημών.

Στην Α Λυκείου οι μαθητές αρχικά προσδιορίζουν γνωστά γεωμετρικά αντικείμενα όπως η μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος και η διχοτόμος γωνίας ως γεωμετρικούς τόπους. Στη συνέχεια αξιοποιούν τις γνώσεις τους για τους γεωμετρικούς τόπους και σε συναφείς περιπτώσεις. Για παράδειγμα προσδιορίζουν τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας και στη συνέχεια βρίσκουν τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες. Στη Α' Λυκείου οι μαθητές μπορούν να βρουν το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που απέχουν δεδομένη απόσταση από μία ευθεία και στη Β΄ Λυκείου να βρουν το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που σχηματίζουν με δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα τρίγωνο με γνωστό εμβαδόν.

Για την εύρεση των γεωμετρικών τόπων ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Αρχικά θεωρούμε ένα σημείο του επιπέδου το οποίο έχει την χαρακτηριστική ιδιότητα του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου και αποδεικνύουμε ότι το σημείο αυτό ανήκει σε μία συγκεκριμένη γραμμή C την οποία προσδιορίζουμε γεωμετρικά. Στη συνέχεια εξετάζουμε ποια από τα σημεία της γραμμής C ικανοποιούν την ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου και συμπεραίνουμε ότι τα σημεία αυτά αποτελούν το ζητούμενο γεωμετρικό τόπο. Επίσης, εξετάζουμε ειδικές περιπτώσεις του γεωμετρικού τόπου όταν τα δεδομένα στοιχεία ικανοποιούν συγκεκριμένες σχέσεις μεταξύ τους.

Για την ανακάλυψη ενός γεωμετρικού τόπου οι μαθητές μπορούν να αξιοποιούν και λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας με τα οποία δίνεται η δυνατότητα σχεδιασμού ενός σχήματος με βάση τις ιδιότητές του και ταυτόχρονα έχουν τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού του σχήματος και αποτύπωσης του ίχνους κινούμενων μερών του.

Στη Γ΄ Λυκείου βασικοί γεωμετρικοί τόποι που έχουν διδαχθεί στις προηγούμενες τάξεις θεωρούνται γνωστοί και μελετώνται πιο σύνθετοι εφαρμόζοντας πιο τυπικές προσεγγίσεις. Οι μαθητές ανακαλύπτουν και αποδεικνύουν γεωμετρικούς τόπους αξιοποιώντας τόσο τις γνωστές γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων όσο και τις γνώσεις τους από την Αναλυτική Γεωμετρία χωρίς να αυξάνεται σημαντικά ο βαθμός δυσκολίας. Επιπλέον αξιοποιούνται γνωστοί γεωμετρικοί τόποι στις γεωμετρικές κατασκευές.

Ενδεικτικά έργα και οδηγίες διδακτικής διαχείρισης στη Γεωμετρία του επιπέδου

Α΄ Λυκειου: **Ειδικά παραλληλόγραμμα**

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Γεωμετρία & Μέτρηση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Επίλυση προβλήματος (διατύπωση εικασίας, τεκμηρίωση)</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Διερευνητική μάθηση</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Α΄ Λυκείου/Γεωμετρία του επιπέδου</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Απόδειξη</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Συλλογισμού και επιχειρηματολογίας</td><td rowspan="2">Γενικά</td><td rowspan="2">Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td></tr>
<tr><td>Προτεινόμενοι πόροι</td><td>Λογισμικό δυναμική</td></tr>
</table>

Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Επιχειρηματολογία και λήψη αποφάσεων που στηρίζονται στο διάλογο				ς γεωμετρίας
		Συγκείμενο	Επιστημονικό		

Σε συνεργασία με έναν συμμαθητή σου να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε μία πρόταση για το είδος του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ και να την αποδείξετε.

β) Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΚΛΜΝ με κορυφές Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ του ΑΒΓΔ και να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ αποδεικνύοντας τους ισχυρισμούς σας. Αντίστοιχα αν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος ή τετράγωνο ποιο είναι το είδος του ΚΛΜΝ;

γ) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

i) Αν το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος και οι κορυφές του Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τότε το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

ii) Αν το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο και οι κορυφές του Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

Να εξετάσετε την ορθότητα των προηγούμενων ισχυρισμών αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Διδακτική διαχείριση

Το έργο αυτό προσφέρεται, σε περίπτωση που υπάρχει η δυνατότητα, η διαπραγμάτευσή του να γίνει και σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας όπου φαίνεται ότι το σύρσιμο μιας κορυφής ενός τετραπλεύρου αφήνει αναλλοίωτο το είδος του τετραπλεύρου που ορίζουν τα μέσα των πλευρών του. Επίσης, δίνεται η δυνατότητα διατύπωσης εικασιών και ελέγχου τους, τόσο μέσω του δυναμικού χειρισμού του σχήματος όσο και ανάπτυξης αποδεικτικών συλλογισμών. Με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα δίνεται επίσης η ευκαιρία στους μαθητές να θεωρήσουν ότι αν ένα σχήμα ανήκει σε μία κατηγορία παραλληλογράμμων τότε ανήκει και σε οποιαδήποτε υποκατηγορία. Επιπλέον οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες ελέγχου της αντίστροφης μιας πρότασης και διαμόρφωσης των προϋποθέσεων και του συμπεράσματος μιας πρότασης.

***Β΄Λυκείου*: Κάλυψη επιπέδου με πολύγωνα**

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ	ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ

<table>
<tr><th colspan="2">ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Γεωμετρία & Μέτρηση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Επίλυση προβλήματος (διατύπωση, υπόθεσης, συμβολισμός, μοντελοποίηση, τεκμηρίωση)</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία - πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους.</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Β΄ Λυκείου/ Γεωμετρία του επιπέδου</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Απόδειξη</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Συλλογισμού και επιχειρηματολογίας</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Μαθηματική επικοινωνία
Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού
Τα μαθηματικά ως πολιτισμικό διακύβευμα</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2">Λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Εκτιμούν την ομορφιά και την κομψότητα των μαθηματικών</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Επιστημονικό – Προσωπικό</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Εργαστείτε σε μικρές ομάδες ώστε:

α) Να προτείνετε κανονικά πολύγωνα με ίδιο πλήθος πλευρών με τα οποία καλύπτεται το επίπεδο χωρίς κενά και επικαλύψεις αιτιολογώντας την απάντησή σας.

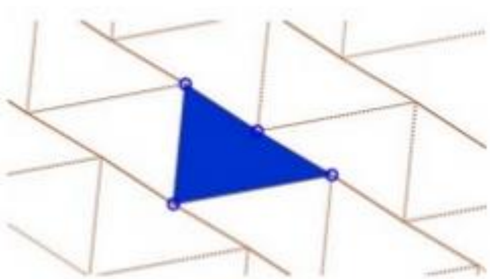
β) Καλύπτεται το επίπεδο με ίσα κανονικά πεντάγωνα ή ίσα κανονικά δεκάγωνα;

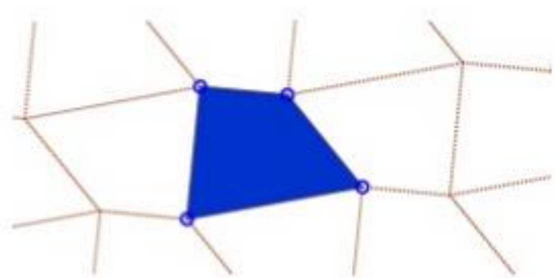
γ) Με βρείτε με ποια κανονικά πολύγωνα καλύπτεται το επίπεδο και να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

δ) Να προτείνετε τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να καλυφθεί το επίπεδο με συνδυασμό κανονικών πολυγώνων που δεν είναι του ίδιου είδους.

Σχεδιάστε τις προτάσεις σε χαρτί ή περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας και χρωματίστε τα σχέδιά σας.

ε) Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται ότι ένα τυχαίο τρίγωνο ή τετράπλευρο μπορούν να καλύψουν το επίπεδο. Μπορείτε να προτείνετε με ποια διαδικασία μπορεί να καλυφθεί το επίπεδο με δεδομένο ένα τρίγωνο ή τετράπλευρο;





Διδακτική διαχείριση

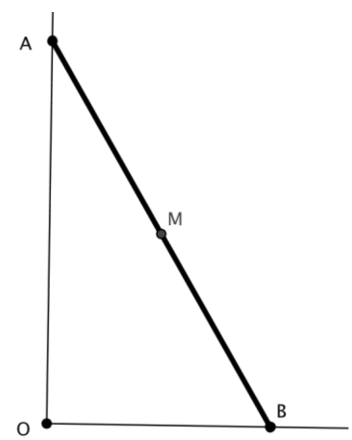
Οι μαθητές με το συγκεκριμένο έργο μπορούν να εμπλακούν σε μια διερευνητική διαδικασία όπου κάνουν εικασίες σχετικά με την κάλυψη του επιπέδου από κανονικά και μη κανονικά πολύγωνα και τεκμηριώνουν τις προτάσεις που διατυπώνουν με αποδεικτικές διαδικασίες. Επιπλέον δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να εμπλακούν με εικαστικό τρόπο με τα μαθηματικά εκτιμώντας την ομορφιά και την κομψότητα τους. Τέλος οι μαθητές μπορούν να αξιοποιήσουν τους μετασχηματισμούς που έχουν μελετήσει στις προηγούμενες βαθμίδες προκειμένου να απαντήσουν σχετικά ζητήματα.

***Γ΄ Λυκείου:* Το γλίστρημα της σκάλας**

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ**		**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ**	
Πεδίο	Γεωμετρία & Μέτρηση	***Ειδικά***	Επίλυση προβλήματος (Διατύπωση	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής***	ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών
Ενότητα	Γ΄ Λυκείου/Γεωμετρία του				

<table>
<tr><td></td><td>επιπέδου</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">εικασίας, τεκμηρίωση</td><td rowspan="3">προσέγγισης</td><td rowspan="3">επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους)</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Απόδειξη</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Επίλυση προβλήματος</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2">Λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Επιχειρηματολογία και λήψη αποφάσεων που στηρίζονται στο διάλογο</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Επιστημονικό</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Η όψη μίας σκάλας μήκους 3 m έχει το ένα άκρο της Α σ’ ένα τοίχο ΟΑ και το άλλο άκρο της Β στο πάτωμα (ΟΑ κάθετη στην ΟΒ). Ξεκινώντας από όρθια θέση η σκάλα γλιστράει ώστε το Α να κινείται προς το πάτωμα και το Β να απομακρύνεται από τον τοίχο.



α) Να βρείτε τις θέσεις του Μ όταν το Β ταυτίζεται με το Ο και όταν το Α ταυτίζεται με το Ο. Να διατυπώσετε εικασίες για το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του ΑΒ και να τις συζητήσετε με τους συμμαθητές σας.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του Μ αποδεικνύοντας τους ισχυρισμούς σας.

Διδακτική διαχείριση

Το συγκεκριμένο έργο μπορεί να υλοποιηθεί με δύο διαφορετικές προσεγγίσεις, γεωμετρική και αναλυτική. Με γεωμετρική προσέγγιση αξιοποιείται η γνωστή πρόταση από την γεωμετρία της Α΄ Λυκείου η οποία συνδέει τη διάμεσο που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα. Με την αναλυτική προσέγγιση προσφέρεται η δυνατότητα θεώρησης κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων ώστε να βρεθεί η εξίσωση του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Επίσης, προτείνονται μέθοδοι διερεύνησης της μεταβλητής κατάστασης όπως ο έλεγχος των ακραίων θέσεων που συμβάλλουν στη διατύπωση εικασιών για το ζητούμενο γεωμετρικό τόπο. Σε περίπτωση που οι μαθητές δυσκολεύονται να προσδιορίσουν το ζητούμενο γεωμετρικό τόπο, μπορούν να σχεδιάσουν κατάλληλο σχήμα σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας όπου προσφέρεται η δυνατότητα δυναμικού χειρισμού του σχήματος και έτσι ενεργοποιώντας το ίχνος του σημείου του οποίου ζητείται ο γεωμετρικός τόπος μπορούν να διευκολυνθούν στον προσδιορισμό του.

***Γ΄ Λυκείου:* Γεωμετρική κατασκευή**

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Γεωμετρία & Μέτρηση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Επίλυση προβλήματος (υπόθεση, πρόβλεψη, τεκμηρίωση)</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Επίλυση προβλήματος, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Γ΄ Λυκείου/Γεωμετρία του επιπέδου</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Απόδειξη</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Επίλυση προβλήματος</td><td rowspan="2">Γενικά</td><td rowspan="2">Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td></tr>
<tr><td>Προτεινόμενοι πόροι</td><td></td></tr>
<tr><td>Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td></td><td>Συγκείμενο</td><td>Επιστημονικό</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Συνεργάσου με ένα συμμαθητή σου για την επίλυση του παρακάτω προβλήματος.

Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα $BG = a$, υ και μ.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Α ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να έχει εμβαδόν $(ABG) = \frac{1}{2}au$.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Α ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να έχει διάμεσο ΑΜ = μ .

γ) Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά $BG = a$, ύψος $AD = u$ και διάμεσο ΑΜ = μ. Πόσα διαφορετικά σημεία Α αποτελούν κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ που κατασκευάσατε;

δ) Να βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα α, υ και μ ώστε να έχει λύση το πρόβλημα (γ) καθώς και το πλήθος των λύσεων του προβλήματος (γ).

Διδακτική διαχείριση

Οι μαθητές με το συγκεκριμένο έργο τους δίνεται η δυνατότητα να εμπλακούν στη διαδικασία επίλυσης δύο προβλημάτων γεωμετρικών τόπων και τον προσδιορισμό σημείων ως τομή δύο γραμμών. Το ερώτημα (α) εναλλακτικά θα μπορούσε να ζητείται να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν από μία ευθεία απόσταση ίση με το μήκος του τμήματος υ. Με αφορμή αυτό το ερώτημα μπορεί να συζητηθεί η διάκριση των ίσων τριγώνων από τα ισεμβαδικά τρίγωνα για την οποία υπάρχει σύγχυση ακόμα και στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη που χρησιμοποιείται ο όρος ίσα τρίγωνα τόσο στην πρόταση Ι.4 που είναι το γνωστό κριτήριο ισότητα τριγώνων ΠΓΠ όσο και στην πρόταση Ι.37 όπου αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα με κοινή πλευρά και κορυφή σε ευθεία παράλληλη στην πλευρά αυτή είναι 'ίσα' ενώ εννοείται ισεμβαδικά. Στο ερώτημα (β) υπάρχει ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού για τον γεωμετρικό τόπο χρειάζεται να εξαιρεθούν τα σημεία της ευθείας ΒΓ που τέμνουν τον κύκλο με κέντρο το μέσο του ΒΓ και ακτίνα μ. Επιπλέον οι μαθητές μπορούν να διερευνήσουν τις σχέσεις των τμημάτων α και μ ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι (i) οξυγώνιο, (ii) ορθογώνιο ή (iii) αμβλυγώνιο. Τα ερωτήματα (γ) και (δ) έχουν διερευνητικό χαρακτήρα επειδή θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή τόσο για τις συνθήκες με τις οποίες έχει λύση το πρόβλημα όσο και για τη σχέση των συνθηκών αυτών με το πλήθος των λύσεων.

- Η δεύτερη θεματική ενότητα «**Γεωμετρία του Χώρου**» αναφέρεται στη μελέτη (i) επιπέδων, ευθειών και δίεδρων γωνιών στο χώρο (ii) πρισμάτων και πυραμίδων και (iii) στερεών εκ περιστροφής.

Στο πρόγραμμα σπουδών αξιοποιούνται οι γνώσεις των μαθητών για τα γεωμετρικά σχήματα στο χώρο τα οποία έχουν μελετηθεί στις προηγούμενες τάξεις και η έμφαση δίνεται σε προσεγγίσεις που μπορούν να συμβάλλουν στην ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης των μαθητών και στην αντίστοιχη νοηματοδότηση των προβλημάτων. Στην κατεύθυνση αυτή μπορεί να συμβάλλει και η μελέτη του εμβαδού της επιφάνειας και του όγκου των στερών σωμάτων η οποία αναπτύσσεται στις Μετρήσεις.

Έτσι, η μελέτη της Γεωμετρίας του χώρου περιορίζεται στην Α΄ Λυκείου όπου οι μαθητές διαπραγματεύονται τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο αξιοποιώντας και ψηφιακά εργαλεία. Επίσης, διερευνούν αναλογικά ιδιότητες και χαρακτηριστικά σε επίπεδα σχήματα και σε σχήματα στο χώρο και αντίστροφα. Για παράδειγμα, μπορούν να επεκτείνουν τη θεμελιώδη πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ότι «από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική ευθεία παράλληλη σε αυτή» στην εξής: «από σημείο εκτός επιπέδου διέρχεται μοναδικό επίπεδο παράλληλο σε αυτό».

Μετρήσεις

Οι Μετρήσεις αναπτύσσονται αναπτύσσονται στις εξής θεματικές ενότητες: (α) μήκος, (β) μέτρο γωνίας , (γ) εμβαδόν και (δ) όγκος.

Οι μαθητές στο Λύκειο ενθαρρύνονται να αποδεσμευθούν από προηγούμενα χαρακτηριστικά ανάπτυξης της γεωμετρικής τους σκέψης όπως ο προσανατολισμός. Έτσι στην περίπτωση των μετρήσεων μπορούν να εφαρμόζουν για παράδειγμα τους τύπους των εμβαδών του τριγώνου και του παραλληλογράμμου χωρίς να αναφέρονται σε «βάσεις» αλλά σε πλευρές και σε αντίστοιχα ύψη. Στο Λύκειο είναι σημαντικό οι μαθητές να αναγνωρίσουν τον προσεγγιστικό και υποκειμενικό χαρακτήρα της μέτρησης. Αξιοποιούν τη μέτρηση κυρίως για τη διατύπωση εικασιών οι οποίες οφείλουν να εγκυροποιηθούν με αποδεικτικές διαδικασίες. Σε κάποιες περιπτώσεις δυσκολεύονται να διακρίνουν γεωμετρικά μεγέθη όπως τα ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες που η ισότητα των μέτρων τους είναι ισοδύναμη με την ισότητα των αντίστοιχων μεγεθών από άλλα γεωμετρικά μεγέθη όπως τα τόξα όπου η ισότητα των μέτρων τους δεν εξασφαλίζει την ισότητα των αντίστοιχων τόξων ή τα πολυγωνικά χωρία όπου η ισότητα των εμβαδών τους δεν συνεπάγεται την ισότητα των αντίστοιχων χωρίων. Ειδικά για τη μέτρηση χαρακτηριστικών στερεών σχημάτων οι μαθητές μπορούν να αξιοποιήσουν αναλογικά ιδιότητες σε επίπεδα σχήματα και αντίστροφα.

Ως προς τη μέτρηση της επιφάνειας και του όγκου οι μαθητές ακόμη και στην ανώτερη σχολική βαθμίδα επηρεάζονται σημαντικά από τον προσανατολισμό του σχήματος. Έτσι δυσκολεύονται να εφαρμόσουν τον τύπο για το εμβαδόν τριγώνου ή παραλληλογράμμου σε περιπτώσεις που οι πλευρές δεν έχουν οριζόντιο προσανατολισμό και τα ύψη δεν έχουν κατακόρυφο προσανατολισμό. Επίσης δυσκολεύονται να δουν ως ισεμβαδικά όλα τα τρίγωνα με την ίδια βάση και ίσα ύψη ιδιαίτερα όταν τα ύψη είναι εκτός των τριγώνων. Επίσης οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να βρουν το λόγο των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων και το λόγο των όγκων δύο όμοιων στερεών όταν είναι γνωστός ο λόγος ομοιότητάς τους. Επιπλέον οι μαθητές συχνά δεν συνδέουν τους τύπους υπολογισμού των εμβαδών και των όγκων με τη μονάδα μέτρησης.

Παρουσίαση των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων στις Μετρήσεις

- Η πρώτη θεματική ενότητα, «μήκος» αναφέρεται στο μήκος ευθυγράμμου τμήματος το οποίο ορίζεται ως ο λόγος του τμήματος προς ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο θεωρείται ως μονάδα μέτρησης. Αντίστοιχα ορίζονται και τα υπόλοιπα μέτρα γεωμετρικών μεγεθών (μέτρο γωνίας, εμβαδόν επιφάνειας, όγκος στερεού). Η μέτρηση μήκους στην ανώτερη σχολική βαθμίδα περιορίζεται στη μέτρηση του μήκους κύκλου και τόξου (Β΄ Λυκείου). Το μήκος κύκλου υπολογίζεται από την προσέγγιση του κύκλου με εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σε αυτόν πολύγωνα. Η μέτρηση τόξου υπολογίζεται αναλογικά από το μήκος κύκλου διαμορφώντας έτσι τους σχετικούς τύπους.

- Η δεύτερη θεματική ενότητα «μέτρο γωνίας» αναφέρεται στη μέτρηση γωνίας με διαφορετικές μονάδες μέτρησης, η οποία έχει μελετηθεί σε προηγούμενες τάξεις.
- Η τρίτη θεματική ενότητα «εμβαδόν» αναφέρεται στον υπολογισμό εμβαδού επίπεδων χωρίων.

Βασικός στόχος της διδασκαλίας της μέτρησης της επιφάνειας είναι οι αποδείξεις των τύπων που δίνουν τα εμβαδά των βασικών σχημάτων (ορθογώνιο, ορθογώνιο τρίγωνο, τρίγωνο, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο) οι οποίοι είναι γνωστοί από προηγούμενες βαθμίδες. Επίσης, είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι οι γνωστοί τύποι εμβαδών ισχύουν στην περίπτωση που η μονάδα μέτρησης είναι το τετράγωνο πλευράς με μοναδιαίο μήκος και διαφοροποιούνται αν αλλάξει η μονάδα μέτρησης. Σημαντικό στόχο της διδασκαλίας αποτελεί και η εφαρμογή των τύπων εμβαδού βασικών σχημάτων για την επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων. Τα εμβαδά σχημάτων μπορούν να αξιοποιηθούν και στην απόδειξη μετρικών σχέσεων που αναφέρονται σε γινόμενα ή λόγους τμημάτων.

Στη Β΄ Λυκείου οι μαθητές αποδεικνύουν τύπους υπολογισμού των βασικών επίπεδων πολυγωνικών χωρίων μέσω αναδιατάξεων σχημάτων γνωστού εμβαδού ξεκινώντας από το εμβαδόν τετραγώνου γνωστής πλευράς. Αξιοποιούν τις γνώσεις αυτές για τον προσδιορισμό του εμβαδού της επιφάνειας πρισμάτων. Υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με το εμβαδόν εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων στον κύκλο πολυγώνων και αναλογικά υπολογίζουν και το εμβαδόν κυκλικού τομέα. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας εγγεγραμμένων πρισμάτων.

Στη Γ΄ Λυκείου οι μαθητές υπολογίζουν το εμβαδόν επιφανειών στερεών που έχουν προκύψει από την πλήρη περιστροφή κυρτών πολυγώνων γύρω από άξονα ο οποίος ταυτίζεται ή είναι παράλληλος με μία πλευρά τους. Επίσης αξιοποιούν σχετικούς τύπους του ολοκληρωτικού λογισμού για τους υπολογισμούς αυτούς.

- Η τέταρτη θεματική ενότητα «όγκος» αναφέρεται στον υπολογισμό του όγκου πρισμάτων, πυραμίδων και στερεών από περιστροφή. Στη Β΄ Λυκείου οι μαθητές εξηγούν τη διαδικασία διαμερισμού και ανασύνθεσης ορθού πρίσματος και πυραμίδας για την εύρεση του τύπου του όγκου τους και υπολογίζουν τον όγκο κυλίνδρου με τον όγκο εγγεγραμμένων πρισμάτων που εγγράφονται σε αυτόν.

Σε κάθε περίπτωση οι τύποι υπολογισμού εμβαδών και όγκων βασικών σχημάτων χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό εμβαδών και όγκων σύνθετων σχημάτων.

Ενδεικτικά έργα και οδηγίες διδακτικής διαχείρισης στις Μετρήσεις

***Β΄Λυκείου:* Σημείο ισορροπίας τριγώνου**

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ	ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ		ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ	
Πεδίο	Γεωμετρία & Μέτρηση	***Ειδικά***	Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (βαρύκεντρο)/ συσχέτιση με οικείες και διαισθητικές ιδέες. Επίλυση προβλήματος/ μοντελοποίηση (πρόβλεψη, τεκμηρίωση) Διεπιστημονική προσέγγιση	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	Επίλυση προβλήματος, πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Β΄ Λυκείου/ Μετρήσεις				
Μεγάλες Ιδέες	Ισοδυναμία, Απόδειξη				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Συλλογισμού και επιχειρηματολογίας/ Μοντελοποίηση	***Γενικά***	Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Μαθηματικός γραμματισμός (τα μαθηματικά ως εργαλείο οργάνωσης φυσικών φαινομένων)	***Συγκείμενο***	Διεπιστημονικό (Φυσική – Μαθηματικά)		

α) Να προσδιορίσετε την ευθεία που διέρχεται από μία κορυφή ενός τριγώνου και το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα. Να εξηγήσετε τον τρόπο που σκεφτήκατε σε ένα συμμαθητή σας και να εξηγήσετε γιατί η ευθεία που προσδιορίσατε είναι λύση του προβλήματος. Να συμπληρώσετε την πρόταση: Αν μία τριγωνική ομοιογενής πλάκα δεθεί με ένα σχοινί από μία κορυφή της και κρεμαστεί τότε η ευθεία του σχοινιού διέρχεται από το ………………………………………………………………………………………………. .
Να εξηγήσετε τη γνώμη σας.

β) Συζητήστε στην τάξη για το σημείο στο οποίο ισορροπεί μία τριγωνική ομοιογενής πλάκα. Διατυπώστε με μαθηματικούς όρους την υπόθεσή σας με τη βοήθεια του καθηγητή σας και προσπαθήστε να αποδείξετε την μαθηματική πρόταση που διατυπώσατε.
γ) Να προσδιορίσετε το σημείο ισορροπίας μιας πλάκας σχήματος παραλληλογράμμου αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Διδακτική διαχείριση
Βασικός στόχος του συγκεκριμένου έργου είναι να συνδέσουν οι μαθητές την έννοια του βαρύκεντρου ενός τριγώνου με τη φυσική του σημασία δηλαδή το σημείο ισορροπίας του τριγώνου με το μαθηματικό του προσδιορισμό δηλαδή το σημείο τομής των διαμέσων τριγώνου. Καθοριστικό ρόλο στην προσπάθεια αυτή έχει η ιδέα ότι ισεμβαδικές ομοιογενείς τριγωνικές πλάκες έχουν το ίδιο βάρος. Με την έννοια αυτή μπορεί να αποδειχθεί αντίστροφα ότι το σημείο ισορροπίας ενός τριγώνου δηλαδή το σημείο το οποίο σχηματίζει με τις πλευρές του τριγώνου ισεμβαδικά τρίγωνα είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου.

Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας

Η Αναλυτική Γεωμετρία αναπτύσσεται στις εξής θεματικές ενότητες: (α) διανύσματα, (β) ευθεία και (γ) κωνικές τομές και (δ) Μετασχηματισμοί.

Η πρώτη θεματική ενότητα «**διανύσματα**»

Η έννοια του διανύσματος αναπτύχθηκε από την αλληλεπίδραση των μαθηματικών και της Φυσικής. Στο πλαίσιο της Φυσικής ο διανυσματικός λογισμός αξιοποιείται στη μελέτη διανυσματικών μεγεθών όπως η ταχύτητα, η δύναμη κ.λπ. Όμως η μελέτη διανυσματικών λογισμού αναπτύχθηκε και αυτόνομα στα μαθηματικά συμβάλλοντας στην εξέλιξη ολόκληρων μαθηματικών κλάδων όπως η Γραμμική Άλγεβρα με ευρύτερες εφαρμογές. Έτσι η μελέτη των διανυσματικού λογισμού στο λύκειο έχει να εκπληρώσει ένα διπλό στόχο. Από τη μία προσφέρει θεωρητική θεμελίωση και υποστήριξη των γνώσεων των μαθητών στη μελέτη των φυσικών μεγεθών και από την άλλη εμπλέκοντας τους μαθητές με τις ιδιότητες και ιδιαιτερότητες του διανυσματικού λογισμού και τους τροφοδοτεί με νέα θεωρητικά εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων. Σημειώνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αξιοποιήσουν τις γνώσεις τους από το πεδίο των μαθηματικών στο πεδίο της Φυσικής και αντίστροφα και για το λόγο αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία η συσχέτιση των δύο πεδίων κατά τη διδασκαλία. Οι δυσκολίες μετάβασης από το ένα πεδίο στο άλλο εδράζονται σε επιστημολογικά ζητήματα των δύο πεδίων τα οποία θα πρέπει να επισημανθούν. Στη φυσική το διάνυσμα της δύναμης έχει κάποιο σημείο εφαρμογής ενώ στα μαθηματικά το διάνυσμα μελετάται με την έννοια του ελεύθερου διανύσματος, δηλαδή χωρίς να καθορίζεται η αρχή του. Η θεώρηση του διανύσματος με καθορισμένη αρχή δυσκολεύει τους μαθητές στην ευέλικτη θεώρηση των διανυσμάτων και από την άλλη η εκδοχή του ελεύθερου διανύσματος παρασύρει τους μαθητές να το συνδέουν με μία συγκεκριμένη θέση. Έτσι για παράδειγμα οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να μεταφέρουν ένα διάνυσμα σε κατάλληλη θέση ή θεωρούν ότι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων συνδέονται με τη θέση που αυτά σχεδιάζονται στο σύστημα συντεταγμένων. Οι δυσκολίες αυτές σχετίζονται και με τους διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης ενός διανύσματος. Ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (γεωμετρικά) και αλγεβρικά μέσω των συντεταγμένων του.

Βασική δυσκολία των μαθητών σε σχέση με τα διανύσματα έγκειται στην τρισυπόσταση θεώρηση τους που περιλαμβάνει μέτρο διεύθυνση και φορά. Συχνά δυσκολεύονται να διακρίνουν το μέτρο ενός διανύσματος από το ίδιο το διάνυσμα και την αλγεβρική τιμή του. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι δυσκολίες των μαθητών στη διάκριση της μετατόπισης ενός κινητού από την αλγεβρική τιμή της, το μέτρο της και την απόσταση που διανύει το κινητό. Σε αρκετές περιπτώσεις οι συμβολισμοί δεν είναι πλήρως διευκρινισμένοι και χρησιμοποιούνται χωρίς ιδιαίτερη προσοχή.

Έτσι συχνά οι μαθητές αντιμετωπίζουν το διάνυσμα ως αριθμητική οντότητα σε ένα αλγεβρικό πλαίσιο με μια ιδιόμορφη λειτουργία συμβόλων και πράξεων (Δημητριάδου & Τζανάκης, 2003). Για παράδειγμα, προσθέτουν τα μέτρα δύο διανυσμάτων για να βρουν το μέτρο του αθροίσματος τους χωρίς να ελέγχουν αν αυτά είναι ομόρροπα. Επίσης, συχνά θεωρούν ότι το άθροισμα δύο διανυσμάτων έχει μέτρο μεγαλύτερο από τα μέτρα των διανυσμάτων που προστίθενται.

Ο διανυσματικός λογισμός μπορεί να αξιοποιηθεί ως δομημένο μαθηματικό πλαίσιο όπου συζητούνται κοινά και μη κοινά στοιχεία μεταξύ των ιδιοτήτων των διανυσμάτων και των ιδιοτήτων των αριθμών. Δίνεται λοιπόν η ευκαιρία στους μαθητές να μελετήσουν μαθηματικές δομές που δεν ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες ενός αριθμητικού συστήματος. Στο πλαίσιο αυτό είναι σημαντικό να συζητηθούν οι λόγοι για τους οποίους δεν ισχύουν σχέσεις όπως (α) η προσεταιριστική ιδιότητα στο εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$, (β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$, (γ) $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί ο διανυσματικός λογισμός μπορεί να αποτελέσει το υπόβαθρο για την ανάπτυξη εννοιών των ανώτερων μαθηματικών όπως αυτή του διανυσματικού χώρου την οποία μελετάται σε πολλές σχολές θετικών σπουδών στη Γραμμική Άλγεβρα. Στο πλαίσιο αυτό είναι σημαντικό να γνωρίζουν ότι κάθε διάνυσμα του επιπέδου μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός δύο μη συγγραμμικών διανυσμάτων ή αντίστροφα ότι κάθε δύο μη συγγραμμικά διανύσματα του επιπέδου παράγουν κάθε διάνυσμά του και με την έννοια αυτή αποτελούν μία βάση του.

Επιπλέον η μελέτη του διανυσματικού λογισμού είναι σημαντική επειδή αξιοποιείται τόσο στη θεμελίωση εννοιών όσο και στην επίλυση προβλημάτων που θα συναντήσουν οι μαθητές στη συνέχεια των σπουδών τους στην Αναλυτική Γεωμετρία και στα Μαθηματικά γενικότερα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η δυνατότητα επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων με την αξιοποίηση του διανυσματικού λογισμού.

Η δεύτερη θεματική ενότητα «**ευθεία**»
Οι μαθητές έχουν μελετήσει την εξίσωση ευθείας σε αρκετές από τις προηγούμενες τάξεις. Στο πλαίσιο της αναλυτικής γεωμετρίας στη Β΄ Λυκείου μελετούν τη γενική της μορφή και τις ειδικές της περιπτώσεις. Συχνά οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα με τα χαρακτηριστικά της ευθείας που είναι παράλληλη στους άξονες και τη διαχείρισή της στην επίλυση προβλημάτων. Επίσης οι μαθητές πραγματεύονται παραμετρικές γραμμικές εξισώσεις εξετάζοντας τις περιπτώσεις που αυτές είναι εξίσωση ευθείας. Με τον τρόπο αυτό δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να μελετήσουν «οικογένειες» ευθειών με κοινά χαρακτηριστικά μέσα από την παραμετρική τους εξίσωση, προσδίδοντας έναν δυναμικό χαρακτήρα στην προσέγγιση της ευθείας, η οποία μπορεί να αναδειχθεί ιδιαίτερα αξιοποιώντας προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας.
Στην ενότητα αυτή επιπλέον οι μαθητές προσδιορίζουν εξισώσεις ευθειών με δεδομένα χαρακτηριστικά, μελετούν τις σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο με τη μέθοδο των οριζουσών, βρίσκουν τη γωνία δύο ευθειών, γεωμετρικούς τόπους σημείων που είναι ευθείες και εξετάζουν αν τρία σημεία είναι συνευθειακά. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν προβλήματα που για την επίλυσή τους απαιτείται να θεωρηθεί κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων.

Η τρίτη θεματική ενότητα «**κωνικές τομές**»
Η μελέτη των κωνικών τομών γίνεται στη Γ΄ Λυκείου και μπορεί να ξεκινήσει με την παρατήρηση των τομών ενός κώνου από ένα επίπεδο σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν μία πρώτη εικόνα για τις κωνικές τομές και την αιτιολόγηση του αντίστοιχου ονόματός τους. Στη συνέχεια οι κωνικές τομές ορίζονται ως γεωμετρικοί τόποι σημείων του επιπέδου και περιορίζονται στις περιπτώσεις που έχουν άξονες συμμετρίας τους άξονες x΄x και y΄y και κέντρο ή κορυφή την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση στη σχετική θέση της ευθείας με τις κωνικές τομές που η διαπραγμάτευσή της βασίζεται στην επίλυση του συτήματος (Σ) της εξίσωσης της κωνικής και της εξίσωσης της ευθείας και ανάγεται στην επίλυση εξίσωσης (Ε) δευτέρου βαθμού. Σύμφωνα με το πρόγραμμα η εφαπτομένη κάθε κωνικής τομής θα βρεθεί μέσω του διαφορικού λογισμού. Είναι ωφέλιμο όμως να συζητηθεί ότι μία ευθεία που έχει μοναδικό κοινό σημείο με μία παραβολή δεν εξασφαλίζει ότι η ευθεία είναι εφαπτόμενη της παραβολής. Οι μαθητές μπορούν να ανακαλύψουν και να αποδείξουν ιδιότητες των κωνικών τομών και να βρουν γεωμετρικούς τόπους σημείων που είναι κωνικές τομές.

Ιδιαίτερη έμφαση αξίζει να δοθεί στην εφαρμογή των κωνικών τομών στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων μέσω της ανακλαστικής τους ιδιότητας αλλά και την ερμηνεία φυσικών φαινομένων όπως οι τροχιές των πλανητών.

Η τέταρτη θεματική ενότητα «**μετασχηματισμοί**»
Οι μαθητές πραγματεύονται έργα αναγνώρισης ιδιοτήτων συγκεκριμένων μετασχηματισμών καθώς και έργα εύρεσης εξισώσεων μιας γραμμής η οποία έχει προκύψει από το μετασχηματισμό μιας άλλης. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορούν να βρούν την εξίσωση της καμπύλης που θα προκύψει από τη στροφή της υπερβολής με εξίσωση $y=\frac{1}{x}$ γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία $\frac{p}{4}$ και να τη συνδέσουν με τις γνώσεις τους από τις κωνικές τομές.

Παρουσίαση των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων στην Αναλυτική Γεωμετρία

Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας μελετώνται κυρίως στο μάθημα του προσανατολισμού θετικών σπουδών της Β΄ Λυκείου και αξιοποιούνται οι ευθείες και οι κωνικές τομές ως γεωμετρικοί τόποι στη Γ΄ Λυκείου.

- Η πρώτη θεματική ενότητα «διανύσματα» αναφέρεται στη μελέτη στοιχείων των διανυσμάτων. Ορίζονται οι πράξεις με διανύσματα (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα και εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων) κάνοντας συνδέσεις με γνωστά διανυσματικά φυσικά μεγέθη και μελετώνται οι βασικές τους ιδιότητες. Τα διανύσματα και οι σχέσεις τους μελετώνται και σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.
- Η δεύτερη θεματική ενότητα «ευθεία» αναφέρεται στη μελέτη της ευθείας μέσω της εξίσωσής της σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης ευθείας και μέσω αυτού προκύπτει η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από δεδομένο σημείο και έχει γνωστό συντελεστή διέυθυνσης. Διερευνώνται διαφορετικές μορφές της γενικής εξίσωσης ευθείας και εξετάζονται οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο.
- Στην τρίτη θεματική ενότητα «κωνικές τομές» αναπτύσσεται ο κύκλος, η παραβολή η έλλειψη και η υπερβολή. Ορίζονται οι κωνικές τομές ως γεωμετρικοί τόποι σημείων του επιπέδου. Μελετώνται εξισώσεις κωνικών τομών με άξονες συμμετρίας τους άξονες ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων και κέντρο ή κορυφή την αρχή του. Επιπλέον μελετάται η εξίσωση κύκλου με κέντρο οποιοδήποτε σημείο του συστήματος συντεταγμένων. Προσδιορίζονται βασικές ιδιότητες των κωνικών τομών και διερευνώνται οι σχετικές τους θέσεις με την ευθεία.
- Στην τέταρτη θεματική ενότητα «μετασχηματισμοί» μελετάται η έννοια του Γεωμετρικού μετασχηματισμού στο καρτεσιανό επίπεδο, μέσω πινάκων, και γίνεται εξειδίκευση στους Γραμμικούς Μετασχηματισμούς. Συγκεκριμένα υπολογίζονται οι πίνακες μετασχηματισμού για την ανάκλαση ως προς τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων, τη στροφή ως προς την αρχή των αξόνων και την ομοιοθεσία διαπιστώνοντας ότι είναι γραμμικοί

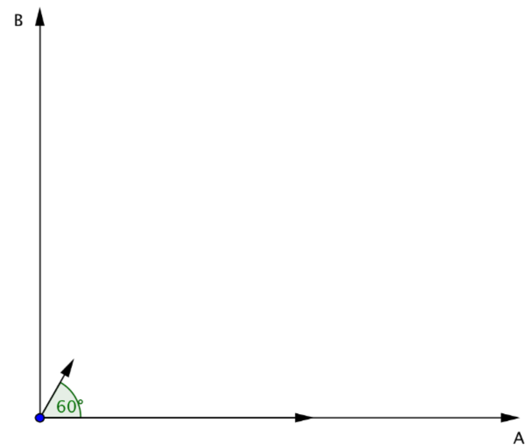
μετασχηματισμοί. Επιπλέον ορίζεται η μεταφορά κατά διάνυσμα και διαπιστώνεται ότι δεν είναι γραμμικός μετασχηματισμός. Συνδέεται η έννοια του αντίστροφου ενός γραμμικού μετασχηματισμού με την έννοια του αντίστροφου πίνακα του μετασχηματισμού και ελέγχεται αν ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι ισομετρία. Επιπρόσθετα ορίζεται η σύνθεση δύο γραμμικών μετασχηματισμών και συνδέεται με το γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων των μετασχηματισμών συσχετίζοντας τις ιδιότητές τους.

Ενδεικτικά έργα και οδηγίες διδακτικής διαχείρισης στην Αναλυτική Γεωμετρία

Β΄Λυκείου: Υπολογισμός ταχύτητας αεροπλάνου

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Γεωμετρία & Μέτρηση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Μετασχηματιστικές δράσεις (Οργάνωση, αναπαράσταση)</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Επίλυση προβλήματος, πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Β΄ Λυκείου/ Διανύσματα</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μετασχηματισμοί</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Επίλυση προβλήματος</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Μαθηματικός γραμματισμός (τα μαθηματικά ως εργαλείο οργάνωσης φυσικών φαινομένων)</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Διεπιστημονικό (Φυσική-Μαθηματικά)</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Ένα αεροπλάνο πετά ανατολικά με ταχύτητα 500 km/h και για κάποια περίοδο συναντά άνεμο ταχύτητας 70 km/h που πνέει βορειοανατολικά σχηματίζοντας γωνία 60^0 με την κατεύθυνση του αεροπλάνου. Να βρείτε την νέα κατεύθυνση του αεροπλάνου προσδιορίζοντας τη γωνίας της με την αρχική του κατεύθυνση και το μέτρο της ταχύτητάς του μετά την επίδραση του ανέμου.



Διδακτική διαχείριση

Με το συγκεκριμένο έργο δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να νοηματοδοτήσουν τις γνώσεις τους για τα διανύσματα μέσα από ένα πραγματικό πρόβλημα και να τις αξιοποιήσουν στην επίλυση του προβλήματος. Συγκεκριμένα φαίνεται η σημασία της εύρεσης της γωνίας δύο διανυσμάτων και της κατεύθυνσης ενός διανύσματος για την ερμηνεία και την εξέλιξη ενός φαινομένου. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέξει το βαθμό μοντελοποίησης του προβλήματος που θα ζητήσει από τους μαθητές είτε καλώντας να δημιουργήσουν ένα μοντέλο από τη λεκτική περιγραφή του προβλήματος. Είτε με τη μορφή που παρουσιάζεται στον οδηγό του εκπαιδευτικού είτε με τον πλήρη σχεδιασμό των διανυσμάτων.

Β΄Λυκείου: Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμών και εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Γεωμετρία & Μέτρηση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (περιορισμός, γενίκευση, σύγκριση, εξειδίκευση)</td><td rowspan="3">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="3">πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνί</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Β΄Λυκείου/ Διανύσματα</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μαθηματική δομή</td></tr>
</table>

					ας προσβάσιμο σε όλους
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων	***Γενικά***	Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Επιχειρηματολογία και λήψη αποφάσεων που στηρίζονται στο διάλογο	***Συγκείμενο***	Επιστημονικό		

Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποιες γνωστές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών και ζητείται να εξετάσουμε αν επεκτείνονται στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Εργαζόμενοι ανα δύο, αν θεωρείτε ότι κάποια από τις σχέσεις στα παρακάτω ερωτήματα (β) ισχύει να την αποδείξετε. Αν θεωρείτε ότι δεν ισχύει να βρείτε αντιπαράδειγμα. Μπορείτε να βρείτε προϋποθέσεις ώστε να ισχύει; Μπορείτε να προσαρμόσετε τη σχέση ώστε να ισχύει;

1. Ιδιότητες του μέτρου

α) Αν α, β πραγματικοί αριθμοί τότε:

β) Ισχύει ότι $\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$;

2. Ιδιότητες των δυνάμεων

α) Αν α, β πραγματικοί αριθμοί τότε $(\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2$

β) Ισχύει ότι: $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$;

3. Προσεταιριστική ιδιότητα

α) Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί τότε: (αβ)γ = α(βγ),

β) Ισχύει ότι $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$;

4. Ο νόμος της διαγραφής

α) Αν α, β, γ αριθμοί και α γ = β γ με γ $\neq 0$ τότε α = β

β) Ισχύει ότι αν $\vec{a}\,\vec{\gamma} = \vec{\beta}\,\vec{\gamma}$ και $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$ τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$;

5. Γινόμενο ίσο με μηδέν

α) Αν α, β αριθμοί τότε αβ=0 $\Leftrightarrow$ α = 0 ή β = 0

β) Ισχύει ότι: αν $\vec{a}\,\vec{\beta}$ = 0 τότε $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$;

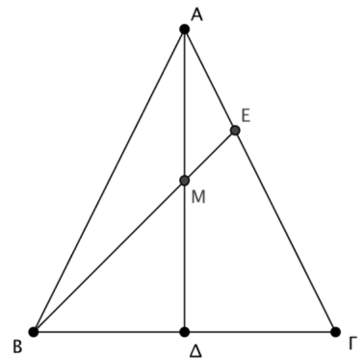
Διδακτική διαχείριση
Είναι συχνό φαινόμενο στους μαθητές να μεταφέρουν τις γνώσεις τους από ένα πλαίσιο στο άλλο χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους τις απαραίτητες προϋποθέσεις. Με το συγκεκριμένο έργο οι δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να αντιληφθούν ότι το σύνολο των διανυσμάτων εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο έχει διαφορετικές ιδιότητες και ως εκ τούτου διαφορετική δομή από το σύνολο των αριθμών εφοδιασμένο με τον πολλαπλασιασμό. Επιπλέον με το συγκεκριμένο έργο δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να εμπλακούν με σημαντικά βήματα της μαθηματικής δραστηριότητας όπως ο έλεγχος ενός ισχυρισμού, η αναθεώρηση ενός αρχικού ισχυρισμού, η διατύπωση μιας υπόθεσης και η απόδειξη μιας πρότασης.

Β΄Λυκείου: Συνευθειακά σημεία

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Γεωμετρία & Μέτρηση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Επίλυση προβλήματος (συμβολισμός, τεκμηρίωση)</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Επίλυση προβλήματος, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους.</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Β΄ Λυκείου/Διανύσματα/Ευθεία</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Απόδειξη</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Μοντελοποίηση</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτι</td><td rowspan="2">Επιχειρηματολογία και λήψη αποφάσεων που στηρίζονται στο διάλογο</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Επιστημονικό</td><td></td><td></td></tr>
</table>

κές					

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ , το ύψος του ΑΔ και Μ το μέσο του ΑΔ. Αν Ε σημείο της ΑΓ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ να αποδειχθεί ότι τα σημεία Β, Μ και Ε είναι συνευθειακά. Εργαζόμενοι ανά δύο:



α) Να θεωρήσετε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και να ορίσετε σε αυτό τις συντεταγμένες σημείων Α, Β και μέσω αυτών τις συντεταγμένες των σημείων Β, Μ και Ε καθώς και των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ και στη συνέχεια να λύσετε το πρόβλημα.

β) Να λύσετε το πρόβλημα χωρίς τη χρήση συστήματος συντεταγμένων και να συγκρίνετε τις δύο μεθόδους.

γ) Να ορίσετε σημείο Κ στην ΑΔ και Λ στην ΑΓ ώστε τα Β, Κ και Λ να είναι συνευθειακά. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

Διδακτική διαχείριση
Με το έργο αυτό δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να αναγνωρίσουν την αξία της υιοθέτησης ενός συστήματος συντεταγμένων για την επίλυση ενός προβλήματος. Επιπλέον οι μαθητές μπορούν να εξηγήσουν τα κριτήρια επιλογής ενός συστήματος συντεταγμένων, τις αυθαίρετες επιλογές για τις συντεταγμένες κάποιων σημείων και εξαρτώμενων στοιχείων από τις επιλογές τους. Στο ερώτημα (β) ζητείται η προσέγγιση του προβλήματος στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και σύγκριση με την προσέγγιση στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας που ακολούθησαν στο ερώτημα (α).

Γ΄ Λυκείου: Μετασχηματισμοί

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ	
Πεδίο	Γεωμετρία & Μέτρηση	*Ειδικά*	Μετασχηματιστικές δράσεις	***Προτεινόμενα χαρακτηρι***	πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’,
Ενότητα	Γ΄Λυκείου/				

<table>
<tr><td></td><td>Μετασχηματισμοί</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">(Οργάνωση, αναπαράσταση)</td><td rowspan="3">στικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="3">ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μετασχηματισμοί</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Δημιουργία συνδέσεων</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Επιστημονικό</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Δίνονται οι μετασχηματισμοί Τ : συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x, R1: στροφή με κέντρο Ο και γωνία θ = - π/4 και R2: στροφή με κέντρο Ο και γωνία ω = π/4.

α) Να σχεδιάσετε την υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ καθώς και την εικόνα της ως προς τον μετασχηματισμό R1. Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εικόνας αυτής.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εικόνων της υπερβολής $y = \frac{1}{x}$ ως προς τους μετασχηματισμούς R1 ∘Τ και Τ ∘ R1 και να εξετάσετε αν ταυτίζονται.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εικόνας της υπερβολής $y = \frac{1}{x}$ ως προς τον μετασχηματισμό R2 και να αποδείξετε ότι ταυτίζεται με την εξίσωση της εικόνας της ως προς τον μετασχηματισμό R1 ∘Τ.

δ) Να εξετάσετε αν οι μετασχηματισμοί R2 και R1 ∘Τ είναι ίσοι.

Διδακτική διαχείριση

Με το έργο αυτό δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να βρούν την εξίσωση μιας καμπύλης η οποία έχει προκύψει ως είκόνα καμπύλης με κάποιο μετασχηματισμό . Η αρχική καμπύλη είναι γνωστή από την άλγεβρα και η εικόνας της είναι γνωστή ως κωνική τομή συμβάλλοντας με τον τρόπο αυτό στην ανάπτυξη συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών κλάδων των μαθηματικών. Επιπλέον δίνεται η δυνατότητα να μελετηθεί η αντιμεταθετική ιδιότητα στη σύνθεση δύο μετασχηματισμών και να συνδεθεί η σύνθεση δύο μετασχηματισμών με το γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων. Επιπρόσθετα εμφανίζεται μία καμπύλη ως εικόνα της ίδιας καμπύλης μέσω δύο καμπύλης μέσω δύο διαφορετικών μετασχηματισμών. Συνίσταται οι εικόνες των καμπυλών που προκύπτουν να σχεδιάζονται σε σύστημα συντεταγμένων ώστε να φαίνεται η σύνδεση της αλγεβρικής επεξεργασίας με τις αντίστοιχες γραφικές αναπαραστάσεις.

3. Ενδεικτικό Παράδειγμα εξέλιξης των ΠΜΑ σε όλες τις βαθμίδες

Στη συνέχεια παρατίθεται ένα παράδειγμα που αναδεικνύει την εξέλιξη των ΠΜΑ στις διάφορες βαθμίδες και τάξεις στην υποενότητα «σχεδιασμός – κατασκευές» της θεματικής ενότητας «Γεωμετρία του επιπέδου».

Σχεδιάζουν τρίγωνα με τη βοήθεια μοιρογνωμονίου: Στην Ε΄ Δημοτικού μπορεί να δοθεί ένα τρίγωνο ΑΒΓ στους μαθητές και να τους ζητηθεί να μετρήσουν τις γωνίες του Β και Γ και το τμήμα ΒΓ. Στη συνέχεια μπορεί να τους ζητηθεί να σχεδιάσουν ένα τμήμα ΓΔ ίσο με το ΒΓ και γωνίες με πλευρά τη ΓΔ ίσες με τις γωνίες Β και Γ ώστε να σχηματίζεται ένα τρίγωνο. Στο τέλος οι μαθητές μπορούν να συγκρίνουν το τρίγωνο ΑΒΓ με το τρίγωνο που σχεδίασαν και να συζητήσουν στην τάξη για τη διαδικασία της μέτρησης.

Κατασκευάζουν και σχεδιάζουν πολύγωνα (φυσικά υλικά, ψηφιακό περιβάλλον): Στους μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού μπορεί να δοθεί σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και δύο γωνίες φ και θ και να τους ζητηθεί αξιοποιώντας τα εργαλεία του προγράμματος να σχεδιάσουν τρίγωνο ΑΒΓ όπου οι γωνίες Β και Γ να είναι ίσες με τις γωνίες φ και θ. Στη συνέχεια μπορούν να διερευνήσουν τους περιορισμούς του προβλήματος και να συζητήσουν για τις λύσεις του.

- Σχεδιάζουν με γεωμετρικά όργανα τρίγωνα και παραλληλόγραμμα με δεδομένα χαρακτηριστικά και περιγράφουν τα βήματα της σχεδίασης: Οι μαθητές της Α΄ γυμνασίου μαθαίνουν να σχεδιάζουν με κανόνα και διαβήτη γωνία ίση με δεδομένη γωνία και αξιοποιούν αυτή τη γνώση για την κατασκευή τριγώνου ΑΒΓ όπου δίνεται η πλευρά ΒΓ και γωνίες ίσες με τις Β και Γ. Στη συνέχεια συζητούν για τους περιορισμούς και τις λύσεις του προβλήματος.

- Κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη τρίγωνα για τα οποία δίνονται βασικά τους στοιχεία (γωνίες, πλευρές)

Οι μαθητές της Α΄ Λυκείου κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ίσες με δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα και αξιοποιούν την τριγωνική ανισότητα για να προσδιορίσουν τη συνθήκη ώστε η κατασκευή αυτή να είναι εφικτή. Επίσης, χρησιμοποιούν το κατάλληλο κριτήριο ισότητας τριγώνων για να βρουν το πλήθος των διαφορετικών λύσεων του προβλήματος.

- Χρησιμοποιούν τις μετρικές σχέσεις ορθογωνίων τριγώνων στην επίλυση προβλημάτων κατασκευών: Στους μαθητές της Β΄ Λυκείου μπορούν να δοθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα α και β και να τους ζητηθεί να κατασκευάσουν τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου με πλευρές α και β.

- Ορίζουν και κατασκευάζουν τρίγωνα που ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες χρησιμοποιώντας Ανάλυση – Σύνθεση – Διερεύνηση: Στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου μπορούν να δοθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα α και β και να τους ζητηθεί να κατασκευαστεί γεωμετρικά ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο 2α και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά β.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7/8.*

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.

Δημητριάδου, Ε. & Τζανάκης, Κ. (2003). Οι δυσκολίες κατανόησης της γλώσσας του διανυσματικού λογισμού από μαθητές Γ' γυμνασίου. *2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139–162.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), Research in collegiate mathematics education III (pp. 234–283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Healy, L., & Hoyles, C. (1998). Justifying and proving in school mathematics. University of London, Institute of Education: Technical report on the nationwide survey. London.

Lakoff G. & Johnson M. (1980), ''Metaphors We Live By'', The university Press. Chicago.

Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (Eds.). (2005). *Developing thinking in geometry*. Sage.

Pierre M. van Hiele P. (1986) *Structure and Insight*, Orlando: Academic Press.

Po΄lya, G. (1957). How to solve it. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Reiss, K., Klieme, E., & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 4, pp. 97–104). Utrecht: Utrecht University.

Sinclair, N., & Yurita, V. (2005). Characteristic features of discourse in a sketchpad classroom. Paper presented at the 27th Annual Meeting ofthe North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Virginia Tech.

Stroup, W. (2005). Learning the basics with calculus. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 24(2), 179-197.
Schoenfeld Schoenfeld, A.H. (1994). Mathematical thinking and problem solving. Hillsdale, NJ: Erlbaum
Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education. Orlando. FL: Academic Press.

c. Στοχαστικά Μαθηματικά

1. Σημασία του Πεδίου

Τα ***Στοχαστικά Μαθηματικά*** (***Πιθανότητες και Στατιστική***) είναι μια ιδιαίτερη περιοχή των Μαθηματικών που στην εποχή μας γίνεται όλο και πιο επίκαιρη. Ένας βασικός λόγος που αυτό συμβαίνει είναι γιατί τα προβλήματα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε με μαθηματικά εργαλεία γίνονται πιο πολύπλοκα και **η πολυπλοκότητα εμφανίζεται ως τυχαιότητα.** Για να κατανοήσει κανείς αυτό, αρκεί να φανταστεί το στρίψιμο ενός κέρματος. Παρότι η κίνηση του κέρματος υπακούει στους νόμους της κλασικής μηχανικής, το να βρει κανείς πώς εξαρτάται το αποτέλεσμα από τον τρόπο που στρίβουμε το κέρμα είναι μια διαδικασία τόσο πολύπλοκη που πρακτικά είναι αδύνατη, γι' αυτό και φανταζόμαστε συχνά το αποτέλεσμα ως τυχαίο. Σε ένα ακόμα παράδειγμα, ας φανταστούμε ένα πείραμα που το αποτέλεσμά του είναι συνάρτηση πολλών παραμέτρων, από τις οποίες εμείς γνωρίζουμε μόνο ένα μέρος. Ας φανταστούμε ακόμα ότι επαναλαμβάνουμε το πείραμα, κρατώντας τις παραμέτρους που γνωρίζουμε σταθερές. Το αποτέλεσμα του πειράματος μπορεί να αλλάζει σε κάθε επανάληψη, παρότι εμείς κρατάμε τις παραμέτρους που γνωρίζουμε σταθερές, επειδή αλλάζουν οι παράμετροι που δεν μπορούμε να ελέγξουμε. Αυτός ο μηχανισμός ***μεταβλητότητας*** κάνει το αποτέλεσμα του πειράματος να *φαίνεται σε εμάς* τυχαίο.

Η καθημερινότητά μας κατακλύζεται από τέτοια παραδείγματα. Φανταστείτε για παράδειγμα μια γιατρό που προσπαθεί να αποφασίσει αν ένας ασθενής που προσέρχεται στο Τμήμα Επειγόντων Περιστατικών θα χρειαστεί να διασωληνωθεί, βασιζόμενη μόνο στις παραμέτρους που αποτυπώνονται στις εξετάσεις του ασθενούς. Προκειμένου να κατανοήσουμε πολύπλοκα φαινόμενα και να λάβουμε **ορθολογικές αποφάσεις μέσα στις συνθήκες αβεβαιότητας** που αυτή η πολυπλοκότητα συνεπάγεται, είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε **μαθηματικά μοντέλα που ποσοτικοποιούν την αβεβαιότητα** και να αναπτύξουμε εργαλεία για την ανάλυση αυτών των μοντέλων. Αυτός ακριβώς είναι και ο σκοπός των Στοχαστικών Μαθηματικών.

Ένας ακόμα λόγος που τα Στοχαστικά Μαθηματικά είναι επίκαιρα είναι ότι παρέχουν τα εργαλεία για την **ανάλυση δεδομένων** και την ***εξαγωγή πληροφοριών*** από αυτά. Εκτιμάται ότι από τα δεδομένα που έχουν παραχθεί από ανθρώπινη δραστηριότητα από την αρχή της ιστορίας το 90% έχει παραχθεί τα τελευταία 2 χρόνια. Ο πολίτης κατακλύζεται καθημερινά από στατιστικές πληροφορίες. Στις δημοσκοπήσεις, στις οικονομικές αναλύσεις, στις επιστημονικές ανακοινώσεις, στις κοινωνικές μελέτες χρησιμοποιούνται στατιστικά διαγράμματα και δείκτες ώστε να παρουσιαστούν, να αναλυθούν και να ερμηνευτούν τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί με σκοπό την λήψη αποφάσεων. Τις στατιστικές μεθόδους τις χρησιμοποιεί σχεδόν το σύνολο των επιστημονικών κλάδων, με σκοπό να εξαχθούν συμπεράσματα, να ανακαλυφθούν σχέσεις εξάρτησης και να θεμελιωθούν προβλέψεις με ***επαγωγικό*** τρόπο· με βάση την πληροφορία που διαθέτουμε από ένα υποσύνολο του υπό μελέτη πληθυσμού εξάγουμε συμπεράσματα για όλον τον πληθυσμό. Συνήθως ο εν λόγω πληθυσμός αποτελείται από ένα τεράστιο το πλήθος μονάδες (τις οποίες μπορεί και να μην έχουμε μηχανισμούς καταγραφής τους), οπότε η ***ολική απογραφή*** είναι είτε χρονοβόρα είτε αδύνατον να επιτευχθεί. Τα ερευνητικά μας ερωτήματα αφορούν ένα ή περισσότερα ***χαρακτηριστικά*** του εν λόγω πληθυσμού, τα οποία εμπλέκονται στο πρόβλημα που θέλουμε να επιλύσουμε.

Η ***στατιστική επίλυση προβλημάτων*** είναι μια διαδικασία η οποία περιλαμβάνει τέσσερα βασικά στάδια με την ακόλουθη σειρά:

1. Διευκρίνηση του ερευνητικού προβλήματος και διατύπωση ερωτήσεων που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα.
2. Σχεδιασμός και συλλογή δεδομένων.
3. Ανάλυση των δεδομένων με χρήση κατάλληλα επιλεγμένων γραφικών αναπαραστάσεων, στατιστικών δεικτών και εν συνεχεία πιθανοθεωρητικών μοντέλων.
4. Ερμηνεία των αποτελεσμάτων και απάντηση των αρχικών ερευνητικών ερωτημάτων.

Οι ερωτήσεις που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα, συνήθως αφορούν πολύπλοκους φυσικούς μηχανισμούς, στους οποίους είναι σχεδόν αδύνατη μια αιτιοκρατική προσέγγιση. Για την εξαγωγή έγκυρης γνώσης χρησιμοποιούνται ***εμπειρικά δεδομένα παρατήρησης***, τα οποία πρέπει να ***συλλεχθούν ορθώς***, ώστε να «μιμούνται» κατάλληλα τον φυσικό μηχανισμό που μελετάμε, και εν συνεχεία να αναλυθούν, να παρουσιαστούν συνοπτικά, και να μοντελοποιηθούν κατάλληλα, ώστε να προκύψουν από αυτά χρήσιμες πληροφορίες και ασφαλή συμπεράσματα για λήψη ορθών αποφάσεων.

Η ύπαρξη της ***μεταβλητότητας*** είναι αυτή που διαφοροποιεί ένα ***ντεντερμινιστικό*** από ένα ***στατιστικό*** ερώτημα. Η ερώτηση, για παράδειγμα, πόσο ψηλός είμαι, μπορεί να απαντηθεί με έναν μόνο αριθμό και δεν αποτελεί στατιστικό ερώτημα, μιας και όσες φορές καταγράψουμε (σε ένα μικρό χρονικό διάστημα) την ζητούμενη τιμή, αυτή θα είναι πάντα η ίδια. Αντίθετα η ερώτηση πόσο ψηλοί είναι οι ενήλικοι άνδρες στην Ελλάδα, θα αποτελούσε μια ντεντερμινιστική ερώτηση μόνο αν όλοι οι ενήλικοι άνδρες στην Ελλάδα είχαν το ίδιο ύψος. Το γεγονός πως υπάρχουν διαφορετικά ύψη, σημαίνει πως αναμένουμε μια απάντηση που στηρίζεται σε μετρήσεις ύψους που μεταβάλλονται, οπότε έχουμε ένα στατιστικό ερώτημα. Είναι εύλογο τότε αυτές τις μεταβαλλόμενες τιμές να τις περιγράψουμε κατάλληλα, δίνοντας πληροφορία για ένα ή περισσότερα ***μέτρα θέσης*** αυτών (αντιπροσωπευτικές τιμές), όπως και πληροφορία για το βαθμό ***μεταβλητότητας*** αυτών.

Στη **Στατιστική**, τα εμπειρικά δεδομένα που συλλέγουμε, είναι σημαντικό να τα ***περιγράψουμε*** με κάποιον συνοπτικό τρόπο, χωρίς όμως έτσι να χάσουμε την πληροφορία που μας παρέχουν, ώστε να εξάγουμε την απαιτούμενη πληροφορία που αναζητάμε από αυτά. Η συνοπτική αυτή παρουσίαση μπορεί να στηρίζεται σε ***γραφικές μεθόδους***, όπου κατάλληλα επιλεγμένα ***διαγράμματα*** δημιουργούνται, καθώς και σε ***αριθμητικές μεθόδους***, όπου στατιστικοί δείκτες υπολογίζονται με σκοπό τον προσδιορισμό ***μέτρων θέσης και μεταβλητότητας*** των δεδομένων αυτών. Για την ορθή επιλογή διαγραμμάτων και στατιστικών δεικτών, πρέπει αρχικά να είμαστε σε θέση να αναγνωρίσουμε αν τα δεδομένα προέρχονται από ***κατηγορικά*** ή ***ποσοτικά*** χαρακτηριστικά του υπό μελέτη πληθυσμού. Επιπλέον τα ποσοτικά χαρακτηριστικά, μπορούμε να τα διαχωρίσουμε σε ***διακριτά*** και ***συνεχή***. Τα διαγράμματα καθώς και οι κατάλληλα επιλεγμένοι αριθμητικοί δείκτες, μπορούν να χρησιμοποιηθούν, επιπλέον, για να ανακαλυφθούν **σχέσεις εξάρτησης** που διέπουν τα δεδομένα. Η ***ερμηνεία*** των αποτελεσμάτων είναι πολύ σημαντική. Από τα παραγόμενα διαγράμματα και τους στατιστικούς δείκτες πρέπει να εξάγουμε κάποια πρώτα συμπεράσματα, τα οποία σε ένα αρχικό στάδιο να απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα που έχουν τεθεί. Εν συνεχεία, με χρήση κατάλληλων (***στοχαστικών) μοντέλων*** θα προσπαθήσουμε να αποφανθούμε αν τα αρχικά αυτά συμπεράσματα που καταλήξαμε, με βάση τα δεδομένα που διαθέτουμε, οφείλονται στην τύχη ή μπορούν να γενικευτούν σε όλο τον πληθυσμό.

Η **Θεωρία των Πιθανοτήτων** παρέχει το μαθηματικό πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε στοχαστικά μοντέλα για πολύπλοκα φαινόμενα του πραγματικού κόσμου και να αναλύσουμε αυτά τα μοντέλα για να εξερευνήσουμε τις συνέπειές τους. Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου, η πεποίθησή μας για το πόσο βέβαιο θεωρούμε να συμβεί το ενδεχόμενο, αποκτά συγκεκριμένο μαθηματικό νόημα και αναπτύσσεται σε ένα σύνολο από κανόνες λογισμού που συνδέουν τις πιθανότητες ενδεχομένων και μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε πιθανότητες σύνθετων ενδεχομένων από εκείνες απλούστερων. Ταυτόχρονα αναπτύσσουμε μεθόδους που επιτρέπουν να αξιοποιούμε πληροφορίες που λαμβάνουμε για το φαινόμενο που μάς ενδιαφέρει ώστε να επικαιροποιούμε τις πεποιθήσεις μας με βάση αυτές τις πληροφορίες (**δεσμευμένη πιθανότητα**). Έννοιες του πραγματικού κόσμου όπως η **ανεξαρτησία,** το να μην επηρεάζει δηλαδή η εμφάνιση ενός ενδεχομένου την εμφάνιση ενός άλλου, αποκτούν συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο και μας επιτρέπουν να χρησιμοποιούμε απλά πιθανοθεωρητικά μοντέλα, όπως το στρίψιμο ενός κέρματος, ως δομικούς λίθους για να κατασκευάσουμε πολύπλοκα ρεαλιστικά μοντέλα για προβλήματα του πραγματικού κόσμου και να κατανοήσουμε τις βαθιές και συχνά απρόβλεπτες συνέπειές τους. Έτσι, η Θεωρία Πιθανοτήτων δεν παρέχει απλά τη μαθηματική θεμελίωση των στατιστικών μεθόδων αλλά έχει εξελιχθεί σε έναν κεντρικό κλάδο των σύγχρονων Μαθηματικών με συνδέσεις και προβολές σε πολλά πεδία των Θεωρητικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

Ο στόχος της σχολικής εκπαίδευσης στα Στοχαστικά Μαθηματικά είναι να διδάξει τους αυριανούς πολίτες

- να οργανώνουν και να παρουσιάζουν δεδομένα με σκοπό να επικοινωνήσουν πληροφορίες με εύληπτο και έγκυρο τρόπο, αξιοποιώντας και ψηφιακά εργαλεία,
- να είναι ικανοί και κριτικοί χρήστες των στατιστικών πληροφοριών που μας κατακλύζουν και των συμπερασμάτων που συχνά εξάγονται,
- να κατανοούν ποσοτικά την εγγενή αβεβαιότητα πολύπλοκων καταστάσεων και να μπορούν να κάνουν ορθολογικά δικαιολογημένες προσωπικές επιλογές σε καταστάσεις που εμπεριέχουν ρίσκο.

Η Στατιστική, στο Λύκειο, αναπτύσσεται σε τρεις θεματικές ενότητες: (α) την ενότητα «διαχείριση δεδομένων», (β) την ενότητα «μέτρα θέσης -μεταβλητότητα» και (γ) την ενότητα «σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών». Οι Πιθανότητες, στο Λύκειο, αναπτύσσονται σε δύο θεματικές ενότητες: (α) την ενότητα «πειράματα τύχης και πιθανότητες» και (β) την ενότητα «συσχέτιση».

Στο **Λύκειο, όσον αφορά τη διδασκαλία της Στατιστικής,** οι μαθητές καλούνται από τα δεδομένα να ανακαλύψουν ***σχέσεις εξάρτησης*** μεταξύ δύο χαρακτηριστικών του πληθυσμού. Τα δεδομένα πλέον απαρτίζουν ένα δείγμα, δύο χαρακτηριστικών των μονάδων του πληθυσμού, και σκοπός των μαθητών είναι με χρήση διαγραμματικών αναπαραστάσεων, ποσοτικών χαρακτηριστικών και πιθανοθεωρητικών μοντέλων, να ανακαλύψουν σχέσεις εξάρτησης που διέπουν τα δεδομένα και να αναρωτηθούν αν αυτές μπορούν να αποτελούν σχέσεις αιτίας-αιτιατού στον πληθυσμό. Διατυπώνουν λοιπόν ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ: (α) ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού, (β) δύο κατηγορικών χαρακτηριστικών και (γ) δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών. Κατασκευάζουν πολλαπλά θηκογράμματα για να περιγράψουν τις τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού στις στάθμες του κατηγορικού χαρακτηριστικού, πίνακες συνάφειας συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων και δεσμευμένων σχετικών συχνοτήτων σε περιπτώσεις δεδομένων από δύο κατηγορικές μεταβλητές και διαγράμματα διασποράς σε περιπτώσεις δεδομένων προερχόμενα από δύο ποσοτικά χαρακτηριστικά. Με την βοήθεια των πινάκων συνάφειας κατασκευάζουν στοιβαγμένα ραβδογράμματα συχνοτήτων και ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων ώστε εποπτικά να αναπαραστήσουν τις διαφοροποιήσεις. Ως ένα επιπλέον μέτρο μεταβλητότητας για ποσοτικά δεδομένα υπολογίζουν την τυπική απόκλιση (και τη διασπορά) χρησιμοποιώντας τετραγωνικές και απόλυτες αποκλίσεις από τον δειγματικό μέσο. Διερευνούν πώς επηρεάζεται η διασπορά (εκφρασμένη με τετραγωνικές ή απόλυτες αποκλίσεις) και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος από την ύπαρξη απόμακρων τιμών. Επιπλέον περιγράφουν και προσδιορίζουν τον συντελεστή μεταβλητότητας ώστε να συγκρίνουν τη μεταβλητότητα ποσοτικών δεδομένων διαφορετικών μονάδων μέτρησης σε διαφορετικούς πληθυσμούς. Τέλος, προσδιορίζουν την ευθεία παλινδρόμησης για το απλό γραμμικό μοντέλο, με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, και σχολιάζουν εποπτικά την προσαρμογή της, ενώ με τη βοήθεια της τιμής του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του *Pearson* σχολιάζουν την ύπαρξη και το είδος (θετική – αρνητική) της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού. Προτείνεται η χρήση **ψηφιακών εργαλείων,** ώστε να είναι σε θέση να κατασκευάσουν διαγράμματα, να υπολογίσουν στατιστικούς δείκτες και να προσαρμόσουν απλά γραμμικά μοντέλα και σε δεδομένα μεγάλης κλίμακας από τον πραγματικό κόσμο.

Σε ό,τι αφορά τη διδασκαλία των Πιθανοτήτων, οι μαθητές γνωρίζουν ήδη από το Γυμνάσιο να χρησιμοποιούν τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας σε πειράματα τύχης με ισοπίθανες εκβάσεις και να χρησιμοποιούν τη βασική αρχή απαρίθμησης. Εδώ οι μαθητές αντιλαμβάνονται την πιθανότητα ως ένα **υποκειμενικό** μέτρο που εκφράζει τις πεποιθήσεις μας και τον χώρο πιθανότητας ως ένα **μαθηματικό μοντέλο** για ένα πείραμα τύχης: ο δειγματικός χώρος περιγράφει τι μπορεί να συμβεί και η πιθανότητα εκφράζει πόσο πιθανό θεωρούμε οτιδήποτε μπορεί να συμβεί. Με αυτή την οπτική, οι μαθητές διατυπώνουν υποθέσεις για τις ιδιότητες που πρέπει να έχει η πιθανότητα (κανόνες λογισμού) και αποδεικνύουν αυτές τις ιδιότητες από τα αξιώματα. Με την κατανόηση αρχών απαρίθμησης για διατάξεις με/χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις, και συνδυασμούς οι μαθητές λύνουν πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο. Οι μαθητές υπολογίζουν δεσμευμένες πιθανότητες, τις ερμηνεύουν ως επικαιροποιημένες πεποιθήσεις και εισάγονται στην έννοια της στοχαστικής ανεξαρτησίας. Με τη βοήθεια των θεωρημάτων ολικής πιθανότητας και Bayes και με τη μελέτη των βασικότερων διακριτών κατανομών οι μαθητές μοντελοποιούν μαθηματικά και λύνουν ακόμα περισσότερα πραγματικά προβλήματα.

2. Περιεχόμενο-Παρουσίαση της ανάπτυξης των θεματικών ενοτήτων

(1) Στατιστική

Η Στατιστική στο Λύκειο αναπτύσσεται σε τρεις ενότητες: (α) διαχείριση *δεδομένων,* (β) *μέτρα θέσης και μεταβλητότητας* και (γ) *σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών.*

➢ Η πρώτη ενότητα «διαχείριση *δεδομένων*» περιλαμβάνει τις υποενότητες: α) διατύπωση ερωτημάτων, β) συλλογή, γ) αναπαράσταση και δ) ερμηνεία.

Στο Λύκειο η υπο-ενότητα «διατύπωση ερωτημάτων» εξελίσσεται ως εξής:

- ερωτήματα που αφορούν **σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού** (Α’ Λυκείου),
- ερωτήματα που αφορούν **σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο κατηγορικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού** (Β’ Λυκείου),

— ερωτήματα που αφορούν **σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού** (Γ’ Λυκείου).

Η συλλογή των δεδομένων, στο Λύκειο, πραγματοποιείται μέσω ερευνών και μελετών, όπου αντιπροσωπευτικά δείγματα χρησιμοποιούνται για την επαγωγική εξαγωγή συμπερασμάτων στον πληθυσμό.

Οι τρόποι αναπαράστασης των δεδομένων που χρησιμοποιούν οι μαθητές εξελίσσονται ως εξής:

— κατασκευή πολλαπλών θηκογραμμάτων, υπολογίζοντας πλέον και **οριακές τιμές**, για την περιγραφή των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού (Α’ Λυκείου),
— κατασκευή πινάκων συνάφειας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων διπλής εισόδου, για την περιγραφή δεδομένων προερχόμενα από δύο διαφορετικά κατηγορικά χαρακτηριστικά του υπό μελέτη πληθυσμού (Β’ Λυκείου),
— κατασκευή στοιβαγμένων ραβδογραμμάτων συχνοτήτων και ομαδοποιημένων ραβδογραμμάτων σχετικών συχνοτήτων (Β’ Λυκείου),
— κατασκευή του διαγράμματος διασποράς των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών (Γ’ Λυκείου).

➢ Η δεύτερη ενότητα «μέτρα θέσης και μεταβλητότητας» αφορά στη χρήση αριθμητικών εκφράσεων θέσης και μεταβλητότητας, οι οποίες επιτρέπουν τη συνοπτική περιγραφή δεδομένων, προερχόμενα από ποσοτικά χαρακτηριστικά, καθώς και τη σύγκριση ομάδων δεδομένων με βάση αυτά. Πιο συγκεκριμένα:

— Στην Α’ Λυκείου περιγράφουν και προσδιορίζουν τη διασπορά και την τυπική απόκλιση ποσοτικών δεδομένων χρησιμοποιώντας τετραγωνικές και απόλυτες αποκλίσεις. Επιπλέον, περιγράφουν και προσδιορίζουν μέτρα θέσης (μέση τιμή και διάμεσος) και μέτρα μεταβλητότητας (διασπορά, τυπική απόκλιση, ενδοτεταρτημοριακό εύρος) των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού και τα συγκρίνουν.
— Στην Α’ Λυκείου περιγράφουν και προσδιορίζουν τον συντελεστή μεταβλητότητας των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού και αναγνωρίζουν τη χρησιμότητά του στη σύγκριση μεταβλητότητας ποσοτικών δεδομένων διαφορετικών μονάδων μέτρησης.
— Στην Γ΄ Λυκείου χρησιμοποιούν πιο σύντομες μορφές, με χρήση του συμβόλου του αθροίσματος, για να αναπαραστήσουν τη μέση τιμή και διασπορά των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού.

➢ Η τρίτη ενότητα «σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών» αφορά στη χρήση αριθμητικών μέτρων, πινάκων, διαγραμμάτων και στοχαστικών μοντέλων για τον εντοπισμό σχέσεων εξάρτησης μεταξύ δύο χαρακτηριστικών. Πιο συγκεκριμένα:

— Στην Α' Λυκείου με τη βοήθεια των θηκογραμμάτων κάνουν συγκρίσεις και εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.
— Στην Β' Λυκείου με τη βοήθεια στοιβαγμένων ραβδογραμμάτων συχνοτήτων και ομαδοποιημένων ραβδογραμμάτων σχετικών συχνοτήτων εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με την εξάρτηση των δύο κατηγορικών μεταβλητών.
— Στην Γ΄ Λυκείου με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς διερευνούν την ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού και διακρίνουν τη θετική από την αρνητική γραμμική συσχέτιση. Επιπλέον, με τη βοήθεια της τιμής του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson σχολιάζουν την ύπαρξη και το είδος (θετική ή αρνητική) της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού.
— Στην Γ' Λυκείου προσδιορίζουν την ευθεία παλινδρόμησης για το απλό γραμμικό μοντέλο, με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων και σχολιάζουν εποπτικά την προσαρμογή της. Επιπλέον ερμηνεύουν με απλά λόγια τις τιμές των συντελεστών της ευθείας παλινδρόμησης και εξοικειώνονται με την έννοια της πρόβλεψης.

(2) Πιθανότητες

Οι Πιθανότητες στο Λύκειο αναπτύσσονται σε δύο ενότητες: (α) Πειράματα τύχης και πιθανότητες και (β) Συσχέτιση.

➢ Όπως και στο Γυμνάσιο, η ενότητα «Πειράματα τύχης και πιθανότητες» συγκροτείται από δύο υποενότητες: «Δειγματικοί χώροι» και «Πιθανότητες ενδεχομένων»

— Στην υποενότητα «Δειγματικοί χώροι» οι μαθητές αναγνωρίζουν τη χρησιμότητα πιθανοθεωρητικών μοντέλων στη μελέτη πολύπλοκων φαινομένων, αντιλαμβάνονται τον δειγματικό χώρο ως σύνολο, και χρησιμοποιούν τη γλώσσα της θεωρίας συνόλων για να αναπαραστήσουν ενδεχόμενα που περιγράφονται στη φυσική γλώσσα και αντίστροφα. Χρησιμοποιούν έννοιες από τη συνδυαστική ανάλυση όπως οι διατάξεις με/χωρίς επαναλήψεις, οι μεταθέσεις και οι συνδυασμοί για να υπολογίσουν το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου. Στη Γ' Λυκείου αναγνωρίζουν το σύνολο τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής ως έναν δειγματικό χώρο.

— Στην υποενότητα «Πιθανότητες ενδεχομένων» οι μαθητές περιγράφουν πειράματα τύχης με μη ισοπίθανα ενδεχόμενα και διατυπώνουν υποθέσεις για τους κανόνες λογισμού που θα πρέπει να συνδέουν τις πιθανότητες ενδεχομένων. Διατυπώνουν τον αξιωματικό ορισμό και αναγνωρίζουν τις συνδέσεις του με τον κλασικό ορισμό που χρησιμοποιούσαν στο Γυμνάσιο. Αποδεικνύουν τους κανόνες λογισμού των Πιθανοτήτων από τα αξιώματα και τους χρησιμοποιούν για να λύσουν πραγματικά προβλήματα. Στη Β΄ Λυκείου οι μαθητές αξιοποιούν τη συνδυαστική ανάλυση για να μοντελοποιήσουν και να επιλύσουν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο. Επιπλέον, αναγνωρίζουν ότι η κανονική κατανομή είναι ένα χρήσιμο μοντέλο σε πολλές πραγματικές καταστάσεις και αξιοποιούν τις ιδιότητές της για να λύσουν προβλήματα. Στη Γ΄ Λυκείου οι μαθητές ορίζουν τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας (σ.μ.π.) μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής, την αναπαριστούν με τη βοήθεια διαγραμμάτων και την αντιλαμβάνονται ως ένα μέτρο πιθανότητας στο σύνολο τιμών της μεταβλητής. Υπολογίζουν τη σ.μ.π. κάποιων συνηθισμένων τυχαίων μεταβλητών και τη χρησιμοποιούν στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

➢ Στην ενότητα «Συσχέτιση» οι μαθητές ορίζουν τη δεσμευμένη πιθανότητα και την ερμηνεύουν ως ένα επικαιροποιημένο μοντέλο. Ορίζουν τη στοχαστική ανεξαρτησία και χρησιμοποιούν τον πολλαπλασιαστικό κανόνα και τη στοχαστική ανεξαρτησία στην κατασκευή πιθανοθεωρητικών μοντέλων και στην επίλυση προβλημάτων. Τέλος, χρησιμοποιούν το θεώρημα ολικής πιθανότητας και το θεώρημα του Bayes για να λύσουν πραγματικά προβλήματα.

3. Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης και δυσκολίες των μαθητών

Η βασική έννοια που είναι συνυφασμένη με τα Στοχαστικά Μαθηματικά είναι αυτή της ***μεταβλητότητας.*** Η προσέγγιση της μεταβλητότητας από μαθητές έχει μελετηθεί εκτενώς στα πλαίσια της έρευνας στη Μαθηματική Εκπαίδευση (Watson, 2006, Reading & Reid, 2007). Η ανάδειξη της μεταβλητότητας είναι σημαντική για την ανάπτυξη του ***στατιστικού συλλογισμού***, δηλαδή του συλλογισμού που χρησιμοποιεί ιδέες από τη Στατιστική, σχετικές πληροφορίες και στατιστικά διαγράμματα (Wild & Pfannkuch, 1999, Garfield, 2002)**.** Ωστόσο, διαφορετικοί συλλογισμοί μπορούν να προκληθούν ανάλογα με το περικείμενο των έργων (Reading & Reid, 2007), με τα διαθέσιμα εργαλεία, π.χ. διαγράμματα, που έχουν τα παιδιά στην διάθεσή τους (Pfannkuch, 2005), και με τον βαθμό στον οποίο αναδεικνύεται από τον/την εκπαιδευτικό η μεταβλητότητα (Watson, 2006). Ατυχώς, συχνά αυτή υπονοείται και δεν υπογραμμίζεται, είτε επειδή κυριαρχεί, ενδεχομένως παραπλανητικά, η αντίληψη ότι είναι προφανής, όπως στην μεταβλητότητα που εμφανίζεται στα μεγέθη παπουτσιών, είτε επειδή εκλαμβάνεται ως εύκολη να την συλλάβει κανείς (π.χ. στα αποτελέσματα από το στρίψιμο ενός νομίσματος).

Ενώ οι υπόλοιποι κλάδοι των Μαθηματικών αναζητούν και μελετούν μοτίβα, στα Στοχαστικά Μαθηματικά τα μοτίβα είτε απουσιάζουν είτε είναι πολύ δύσκολο να ανακαλυφθούν. Επιπλέον, ο ανθρώπινος νους αναζητά τα μοτίβα και δυσκολεύεται να αναπτύξει σωστά τη διαίσθησή του για την τυχαιότητα. Αυτό, σε επίπεδο επιστημολογίας των Στοχαστικών Μαθηματικών, καταδεικνύεται και από τα πολλά απλά πιθανοθεωρητικά παράδοξα, όπως π.χ. το πρόβλημα των γενεθλίων και το πρόβλημα του Monty Hall. Όπως έχει φανεί από εμπειρικές έρευνες (Watson, 2006) ο τρόπος συλλογισμού που χρησιμοποιούν τα παιδιά για να απαντήσουν σε ερωτήματα που χρειάζονται στοχαστική επιχειρηματολογία, αλλάζει και αναπτύσσεται. Τα επιχειρήματά τους μπορεί αρχικά να βασίζονται στην υποκειμενικότητα, στη συνέχεια να αναζητούν κανονικότητες και μοτίβα και στη συνέχεια να χρησιμοποιούν στοχαστικά επιχειρήματα τα οποία δεν "εγκλωβίζονται" στην αναζήτηση κανονικότητας και αιτιοκρατικών σχέσεων.

Τα αποτελέσματα της έρευνας στη διδακτική των Στοχαστικών Μαθηματικών δεν είναι τόσο πυκνά όσο σε κλάδους που αποτελούσαν μέρος των σχολικών Μαθηματικών σε μεγαλύτερη έκταση και σε μεγαλύτερο βάθος χρόνου. Έχει φανεί, από έρευνες στην τάξη -όχι στην Ελλάδα- ότι η δυνατότητα χρήσης προσομοιώσεων, ψηφιακών εργαλείων (Pratt, 2005) και εκτέλεσης μεγάλου πλήθους δοκιμών υποστηρίζει τη δημιουργία νοημάτων από τα παιδιά για τις έννοιες των Στοχαστικών Μαθηματικών. Θα ήταν επομένως χρήσιμο για τη σωστή ανάπτυξη του στατιστικού συλλογισμού να εισαχθούν στην σχολική τάξη εργαλεία όπως οι προσομοιώσεις και τα μεγάλα σύνολα δεδομένων.

Στον αντίποδα αυτών των δυσκολιών, τα Στοχαστικά Μαθηματικά αποτελούν μια περιοχή η οποία δεν χρησιμοποιεί δύσκολο φορμαλισμό στο επίπεδο του σχολείου. Έτσι, μπορεί να είναι ένα αρκετά συμπεριληπτικό κομμάτι των σχολικών Μαθηματικών που κινεί το ενδιαφέρον περισσότερων μαθητών.

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει ομοφωνία (Franklin et al, 2007, Bargagliotti et al, 2020) στο ότι η ενασχόληση με τα Στοχαστικά Μαθηματικά από τις πολύ μικρές σχολικές τάξεις βοηθάει στη συμφιλίωση με τη μεταβλητότητα και στην ανάπτυξη ενός σωστού ποιοτικά και ποσοτικά τρόπου σκέψης για την τυχαιότητα. Επειδή τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα του Προγράμματος Σπουδών είναι εξελισσόμενα, είναι χρήσιμο να θυμηθούμε ποια Στοχαστικά Μαθηματικά μελέτησαν οι μαθητές στις προηγούμενες βαθμίδες.

(1) Στατιστική

Στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο, οι μαθητές έχουν εμπλακεί με έννοιες της στατιστικής. Έχουν ασχοληθεί με:

- τα είδη των δεδομένων (κατηγορικά, διακριτά ποσοτικά, συνεχή ποσοτικά και χρονικά)
- τρόπους οργάνωσης δεδομένων (πίνακες συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, ομαδοποιήσεις)
- τρόπους αναπαράστασης δεδομένων (εικονογράμματα, ραβδογράμματα, σημειογράμματα, φυλλογράμματα, διαγράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, κυκλικά διαγράμματα, ιστογράμματα συχνοτήτων, απλά θηκογράμματα - χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι οριακές τιμές - και

χρονοδιαγράμματα), ορθής επιλογής αυτών, ανάλογα με το είδος των δεδομένων που διαθέτουν, καθώς και ερμηνείας τους

- τα μέτρα θέσης (επικρατούσα τιμή, μέση τιμή, διάμεσος) καθώς και τα τεταρτημόρια
- μέτρα μεταβλητότητας (εύρος και ενδοτεταρτημοριακό εύρος).

Επίσης έχουν διερευνήσει ιδιότητες της μέσης τιμής (πως θα μεταβληθεί η μέση τιμή λόγου χάρη αν σε όλα τα δεδομένα προσθέσουμε ή πολλαπλασιάσουμε μια σταθερά) και πως επηρεάζεται η μέση τιμή και η διάμεσος από την ύπαρξη απόμακρων τιμών. Παράλληλα έχουν αρχίσει να εντοπίζουν παραδείγματα χρήσης στατιστικών διαγραμμάτων που μπορούν να οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα και να παραπλανήσουν. Τέλος έχουν προβεί σε διατύπωση ερωτημάτων που μπορούν να απαντηθούν από συλλογή δεδομένων (κατηγορικών, διακριτών ή συνεχών ποσοτικών) μέσω μικρών ερευνών ή από το οικείο περιβάλλον τους, ερωτημάτων που αφορούν συγκρίσεις κατηγορικών ή διακριτών ποσοτικών δεδομένων σε δύο μικρές ομάδες ίσου πλήθους και ερωτημάτων που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά χρονικά δεδομένα. Τέλος στην Γ' Γυμνασίου οι μαθητές διατυπώνουν για πρώτη φορά ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους και έρχονται για πρώτοι φορά αντιμέτωποι με την έννοια του δείγματος. Με χρήση απλής τυχαίας δειγματοληψίας, επιλέγουν ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα και αναγνωρίζουν τη μεταβλητότητα στατιστικών δεικτών μεταξύ δειγμάτων καθώς και τη δυνατότητα επαγωγικής εξαγωγής συμπερασμάτων για ένα πληθυσμό από ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα.

Στο Λύκειο οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι για πρώτη φορά με σχέσεις εξάρτησης. Σε κάθε τάξη του Λυκείου είναι σημαντικό, μέσω παραδειγμάτων να ανακαλύπτουν ότι δύο χαρακτηριστικά που φαίνεται πως εξαρτώνται δεν διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας-αιτιατού. Επίσης οι παρατηρούμενες σχέσεις εξάρτησης που προκύπτουν από τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί, δεν είναι αναγκαστικό να χαρακτηρίζουν και τον πληθυσμό. Στατιστικά μοντέλα, καθώς και στατιστικοί έλεγχοι υπόθεσης θα πρέπει (μελλοντικά) να χρησιμοποιηθούν για την επαγωγική διεξαγωγή των συμπερασμάτων στο πληθυσμό. Επιπλέον, είναι σημαντικό το δείγμα το οποίο μελετάται να είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού όπως επίσης να είναι και μεγάλης κλίμακας. Για τον λόγο αυτόν προτείνεται η χρήση πραγματικών δεδομένων, από διάφορους επιστημονικούς κλάδους, κατάλληλα επιλεγμένων, μεγάλου όγκου, τα οποία να αναλυθούν με χρήση ψηφιακών εργαλείων.

Στην Α΄ Λυκείου οι μαθητές θα διατυπώσουν ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού. Κατασκευάζουν πολλαπλά θηκογράμματα, υπολογίζοντας πλέον και οριακές τιμές, για να περιγράψουν τις τιμές ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού. Για τη κατασκευή των θηκογραμμάτων δημιουργείται ένα ορθογώνιο πλαίσιο με βάσεις το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο. Ενδιάμεσα τοποθετείται με τη βοήθεια ενός ευθύγραμμου τμήματος η διάμεσος. Από τα μέσα των βάσεων αναπτύσσονται γραμμές οι οποίες συνδέουν τις **οριακές τιμές** των παρατηρήσεων. Οι δύο οριακές τιμές ορίζονται ως το τρίτο (αντίστοιχα το πρώτο) τεταρτημόριο συν (αντίστοιχα μείον) 1.5 φορές το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Αν δεν υπάρχουν παρατηρήσεις τόσο απομακρυσμένες, οι οριακές τιμές είναι η μέγιστη (αντίστοιχα η ελάχιστη παρατήρηση). Σε αντίθετη περίπτωση, οι έκτροπες τιμές που υπερβαίνουν τις δύο οριακές τιμές (αν υπάρχουν) παριστάνονται με κουκκίδες στο θηκόγραμμα. Με τη βοήθεια των θηκογραμμάτων οι μαθητές κάνουν συγκρίσεις και εξάγουν κάποια πρώτα συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού. Αναφορικά με τα μέτρα μεταβλητότητας πλέον προσδιορίζουν και τη διασπορά και την τυπική απόκλιση ποσοτικών δεδομένων χρησιμοποιώντας τετραγωνικές και απόλυτες αποκλίσεις. Επιπλέον, προσδιορίζουν τον συντελεστή μεταβλητότητας των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού και αναγνωρίζουν τη χρησιμότητά του σε περιπτώσεις σύγκρισης μεταβλητότητας ποσοτικών δεδομένων διαφορετικών μονάδων μέτρησης. Έχοντας πλέον διδαχθεί οι μαθητές αρκετά «εργαλεία» για υπολογισμό μέτρων θέσης και μεταβλητότητας είναι σημαντικό να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν ποια από αυτά επηρεάζονται από απόμακρες τιμές και να επιλέγουν κατάλληλα.

Στην Β΄ Λυκείου οι μαθητές θα διατυπώσουν ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο κατηγορικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού. Οργανώνουν τα δεδομένα σε πίνακες συνάφειας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων διπλής εισόδου και ερμηνεύουν τις τελευταίες ως πιθανότητες τομής δύο ενδεχομένων. Από τον πίνακα συνάφειας διπλής εισόδου, αθροίζοντας ως προς τις γραμμές ή τις στήλες, υπολογίζουν τις περιθώριες συχνότητες και εν συνεχεία τις αντίστοιχες περιθώριες σχετικές συχνότητες. Εν συνεχεία, υπολογίζουν τις σχετικές συχνότητες για κάθε πιθανή στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού δεσμεύοντας κάθε φορά ως προς μία στάθμη του άλλου κατηγορικού χαρακτηριστικού και τις ερμηνεύουν ως δεσμευμένες πιθανότητες. Τέλος, κατασκευάζουν στοιβαγμένα ραβδογράμματα συχνοτήτων και ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων, από τα οποία εξάγουν κάποια πρώτα συμπεράσματα σχετικά με την εξάρτηση των δύο κατηγορικών μεταβλητών.

Στην Γ΄ Λυκείου οι μαθητές θα διατυπώσουν ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού. Με βάση το ερευνητικό ερώτημα που διαθέτουν, ονομάζουν το ένα ποσοτικό χαρακτηριστικό σε μεταβλητή απόκρισης και το άλλο σε επεξηγηματική μεταβλητή και αντιλαμβάνονται τη διαφοροποίησή τους στο υπό μελέτη πρόβλημα. Επιπλέον, κατασκευάζουν το διάγραμμα διασποράς των τιμών των δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών, τοποθετώντας στον yy΄ άξονα τις τιμές της μεταβλητής απόκρισης και στον xx΄ άξονα τις τιμές της επεξηγηματικής μεταβλητής. Με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς διερευνούν την ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού και διακρίνουν τη θετική από την αρνητική γραμμική συσχέτιση. Επιπρόσθετα, ως ένα ποσοτικό μέτρο υπολογισμού γραμμικής συσχέτισης, υπολογίζουν την τιμή του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson και σχολιάζουν την ύπαρξη και το είδος (θετική ή αρνητική) της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών των δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών ανάλογα με την τιμή του. Τιμές κοντά στη μονάδα υποδηλώνουν θετική γραμμική συσχέτιση, τιμές κοντά στο μείον ένα υποδηλώνουν αρνητική γραμμική συσχέτιση, ενώ τέλος τιμές κοντά στο μηδέν υποδηλώνουν έλλειψη γραμμικής συσχέτισης. Οι μαθητές, επίσης, προσδιορίζουν την ευθεία παλινδρόμησης για το απλό γραμμικό μοντέλο, με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων και σχολιάζουν εποπτικά την προσαρμογή της. Ερμηνεύουν με απλά λόγια τις τιμές των συντελεστών της ευθείας παλινδρόμησης και εξοικειώνονται με την έννοια της πρόβλεψης της τιμής της μεταβλητής απόκρισης για δοσμένη τιμή της επεξηγηματικής μεταβλητής, με βάση το απλό γραμμικό μοντέλο, και αναγνωρίζουν τυχόν περιορισμούς. Τέλος, οι μαθητές για πρώτη φορά χρησιμοποιούν πιο σύντομες μορφές, με χρήση του συμβόλου του αθροίσματος, για να αναπαραστήσουν τη μέση τιμή και διασπορά των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού. Οι εν λόγω αναπαραστάσεις είναι χρήσιμες σε περιπτώσεις όπου το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο.

Όπως και στο Γυμνάσιο, είναι σημαντικό να μην δίνεται έμφαση στον υπολογισμό στατιστικών δεικτών από μαθηματικούς τύπους. Αντίθετα, θα πρέπει να δίνεται βάρος στην ερμηνεία των στατιστικών δεικτών ή στην εξαγωγή συμπερασμάτων για τους στατιστικούς δείκτες από γραφικές αναπαραστάσεις των δεδομένων. Όταν απαιτείται ο υπολογισμός στατιστικών δεικτών, συνιστάται η χρήση ψηφιακών εργαλείων.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι δυσκολίες των μαθητών σε σχέση με την στατιστική μπορεί να σχετίζονται με:

- *Ενότητα «Διαχείριση δεδομένων»*
    - **Α' Λυκείου:** Με την βοήθεια των θηκογραμμάτων οι μαθητές να είναι σε θέση να κάνουν συγκρίσεις και να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού. Στα θηκογράμματα πλέον γίνεται χρήση και των οριακών τιμών ώστε να είναι εμφανείς οι έκτροπες τιμές που ίσως υπάρχουν.
    - **Β' Λυκείου:** Οι μαθητές να ερμηνεύουν τις σχετικές συχνότητες ενός πίνακα συνάφειας διπλής εισόδου ως πιθανότητες τομής δύο ενδεχομένων. Επιπλέον, να κατανοούν τον μηχανισμό υπολογισμού των **περιθωρίων συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.** Είναι σημαντικό να κατανοήσουν πως από τον πίνακα συνάφειας διπλής εισόδου εύκολα μπορούν να υπολογίσουν περιθώριες συχνότητες και σχετικές συχνότητες, ενώ το αντίστροφο δεν είναι εφικτό, παρά μόνο αν τα δύο χαρακτηριστικά είναι ανεξάρτητα. Τέλος να είναι σε θέση να υπολογίσουν **τις σχετικές συχνότητες για κάθε πιθανή στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού** δεσμεύοντας κάθε φορά ως προς μία

στάθμη του άλλου κατηγορικού χαρακτηριστικού και να τις ερμηνεύουν ως δεσμευμένες πιθανότητες.

- **Γ' Λυκείου:** Με βάση το ερευνητικό ερώτημα που διαθέτουν, στο οποίο εμπλέκονται δύο ποσοτικά χαρακτηριστικά, οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τη διαφοροποίησή της μεταβλητής απόκρισης από την επεξηγηματική μεταβλητή στο υπό μελέτη πρόβλημα.

➢ *Ενότητα «Μέτρα θέσης-μεταβλητότητα»*

- **Α' Λυκείου:** Οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα του συντελεστή μεταβλητότητας στη σύγκριση μεταβλητότητας ποσοτικών δεδομένων διαφορετικών μονάδων μέτρησης. Επιπλέον να αναγνωρίζουν πως επηρεάζονται τα μέτρα μεταβλητότητας (διασπορά και ενδοτεταρτημοριακό εύρος) από την ύπαρξη απόμακρων τιμών.
- **Α' Λυκείου:** Οι μαθητές να *επιλέγουν* ***κατάλληλα μέτρα θέσης και μέτρα μεταβλητότητας*** *ποσοτικών δεδομένων ανάλογα με την ύπαρξη απόμακρων τιμών.*
- **Α' Λυκείου:** Οι μαθητές προσδιορίζουν τη **διασπορά** και την **τυπική απόκλιση** ποσοτικών δεδομένων χρησιμοποιώντας τετραγωνικές και απόλυτες αποκλίσεις. Επιπλέον να μπορούν να αντιληφθούν τη διαφορά της διασποράς υπολογισμένης ως απόλυτης απόκλισης από τη διασπορά υπολογισμένης ως τετραγωνική απόκλιση και την επίδραση που έχουν στις δύο αυτές μορφές οι απόμακρες τιμές. Οι εν λόγω διασπορές μπορούν πλέον να ερμηνευτούν ως μέσες τετραγωνικές ή μέσες απόλυτες αποκλίσεις των παρατηρήσεων από την μέση τιμή.
- **Γ' Λυκείου:** Οι μαθητές να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν πιο σύντομες μορφές, με χρήση του συμβόλου του αθροίσματος, για να αναπαραστήσουν τη μέση τιμή και διασπορά των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού.

➢ *Ενότητα «Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών»*

- **Α' - Γ' Λυκείου:** Οι μαθητές να μπορούν να ανακαλύπτουν και να εξηγούν με παραδείγματα ότι δύο χαρακτηριστικά δεν διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας-αιτιατού αν σχετίζονται.
- **Β' Λυκείου:** Οι μαθητές να ερμηνεύουν τις τιμές των πινάκων συνάφειας σχετικών συχνοτήτων και υπό δέσμευση σχετικών συχνοτήτων διπλής εισόδου ως πιθανότητες τομής δύο ενδεχομένων και δεσμευμένες πιθανότητες αντίστοιχα. Με την βοήθεια των στοιβαγμένων ραβδογραμμάτων συχνοτήτων και ομαδοποιημένων ραβδογραμμάτων σχετικών συχνοτήτων να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με την εξάρτηση των δύο κατηγορικών μεταβλητών. Το παράδοξο του *Simpson*

μπορεί να παρουσιάσει στους μαθητές τι είδους προβλήματα προκύπτουν από το συνδυασμό δεδομένων από διάφορες ομάδες.

- **Γ' Λυκείου:** Οι μαθητές να αντιλαμβάνονται διαισθητικά την έννοια της γραμμικής συσχέτισης δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού καθώς και τη χρησιμότητά της. Με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς να αποφαίνονται εποπτικά αν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού και να διακρίνουν τη θετική από την αρνητική γραμμική συσχέτιση.
- **Γ' Λυκείου:** Οι μαθητές να μπορούν να ερμηνεύσουν με απλά λόγια τις τιμές των συντελεστών της ευθείας παλινδρόμησης στο υπό μελέτη πρόβλημα. Στις ερμηνείες τους είναι σημαντικό να δίνουν την πλήρη περιγραφή των δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών και να χρησιμοποιούν τις μονάδες μέτρησης αυτών, απαντώντας εν τέλει στο αρχικό ερευνητικό τους ερώτημα.
- **Γ' Λυκείου:** Οι μαθητές να εξοικειωθούν με την έννοια της πρόβλεψης, με βάση το απλό γραμμικό μοντέλο, της τιμής της μεταβλητής απόκρισης για δοσμένη τιμή της επεξηγηματικής μεταβλητής και να αναγνωρίσουν τυχόν περιορισμούς. Δεν θα πρέπει λόγου χάρη να προβαίνουν σε προβλέψεις για τιμές της επεξηγηματικής μεταβλητής που βρίσκονται εκτός των τιμών που έχουν συλλεχθεί.
- **Α' - Γ' Λυκείου:** Οι ερμηνείες και εδώ πρέπει να παίζουν μείζονα ρόλο. Για παράδειγμα στην ενότητα της απλής γραμμικής παλινδρόμησης, σκοπός δεν είναι οι μαθητές να απομνημονεύσουν τους τύπους που δίνουν τους δύο εκτιμώμενους συντελεστές του μοντέλου και εν συνεχεία αυτούς τους τύπους να τους εφαρμόσουν σε πραγματικά δεδομένα, αλλά να μπορούν να ερμηνεύσουν ορθά τις τιμές που προκύπτουν, να σχολιάσουν με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς την προσαρμογή της ευθείας, και να είναι σε θέση να προβούν σε προβλέψεις στο εύρος των τιμών που έχουν παρατηρηθεί. Για την προσαρμογή του μοντέλου προτείνετε η χρήση ψηφιακών εργαλείων.

(2) Πιθανότητες

Οι μαθητές φτάνουν στο Λύκειο έχοντας εξοικειωθεί στις προηγούμενες βαθμίδες με τον κλασικό ορισμό της Πιθανότητας, με απλούς κανόνες λογισμού, όπως ο απλός προσθετικός νόμος, και με εισαγωγικές έννοιες της συνδυαστικής ανάλυσης, όπως η βασική αρχή απαρίθμησης. Έχουν εξερευνήσει πειραματικά τον νόμο των μεγάλων αριθμών και μπορούν να καταλάβουν ότι η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου μετά από πολλές επαναλήψεις του πειράματος τύχης είναι πολύ κοντά στην πιθανότητα του ενδεχομένου. Το τελευταίο αποτέλεσμα πολύ συχνά χρησιμοποιείται για να ερμηνεύσει κανείς την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως τη σχετική συχνότητα που θα προέκυπτε μετά από άπειρες επαναλήψεις του πειράματος τύχης. Αυτή η ερμηνεία της πιθανότητας είναι περιοριστική αφού ούτε άπειρες φορές μπορούμε να επαναλάβουμε απλά πειράματα τύχης, ούτε μπορούμε όλα τα ενδιαφέροντα πειράματα τύχης να τα εκτελέσουμε στην πράξη. Έτσι για παράδειγμα, δεν μπορούμε να δώσουμε νόημα στην ερώτηση «ποια είναι η πιθανότητα να πλημμυρίσει ο Δούναβης την επόμενη εβδομάδα» ή «ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσετε το δώρο που κληρώνει ο αγαπημένος σας ραδιοφωνικός σταθμός ανάμεσα στους ακροατές του».

Η ερμηνεία που θέλουμε να καλλιεργήσουμε στους μαθητές είναι αυτή της ***υποκειμενικής πιθανότητας***. Για κάθε πείραμα τύχης, πραγματικό ή νοητικό, που μας ενδιαφέρει, θέλουμε να φτιάξουμε ένα ***μαθηματικό μοντέλο***. Το μοντέλο αυτό θα πρέπει να περιγράφει τι μπορεί να συμβεί ως αποτέλεσμα του πειράματος τύχης και πόσο πιθανό θεωρούμε να συμβεί κάθε τι που μπορεί να συμβεί. Τον πρώτο σκοπό επιτελεί ο δειγματικός χώρος και τον δεύτερο η πιθανότητα, μια συνάρτηση που σε κάθε ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου αντιστοιχεί έναν αριθμό στο [0,1] ο οποίος **αντανακλά την πεποίθησή μας** για το πόσο βέβαιο θεωρούμε να συμβεί το ενδεχόμενο.

Διαφορετικοί άνθρωποι μπορεί να αποδίδουν διαφορετική πιθανότητα στο ίδιο ενδεχόμενο. Όπως και αν αποδίδουμε πιθανότητες στα ενδεχόμενα όμως, υπάρχει ένα σύνολο από κανόνες που πρέπει να σεβόμαστε. Αυτοί οι κανόνες λογισμού είναι τόσο απλοί και διαισθητικοί που οι μαθητές μπορούν με μικρή βοήθεια να τους μαντέψουν. Επιπλέον, αν δεχθούμε 3 από αυτούς ως αξιώματα, όλοι οι υπόλοιποι μπορούν να αποδειχθούν.

Αυτός είναι ο αξιωματικός ορισμός των Πιθανοτήτων. Ένας τρόπος απόδοσης πιθανότητας στα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου που σέβεται τα 3 αξιώματα των Πιθανοτήτων.

Στα περισσότερα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν στο σχολείο, το ίδιο το πείραμα τύχης που θέλουμε να μελετήσουμε, σε συνδυασμό με τους κανόνες λογισμού που οφείλουμε να σεβαστούμε, επιβάλλει το πώς θα αποδώσουμε πιθανότητες. Ας πούμε για παράδειγμα ότι θέλουμε να μοντελοποιήσουμε το ρίξιμο ενός συνηθισμένου ζαριού και θεωρούμε ως δειγματικό χώρο το σύνολο $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Αν θεωρούμε ότι το ζάρι είναι αμερόληπτο, στα έξι μονοσύνολα του Ω πρέπει να αποδώσουμε την ίδια πιθανότητα p και από τον προσθετικό νόμο και το γεγονός ότι $P[\Omega]=1$ προκύπτει ότι $p=1/6$. Από τον προσθετικό νόμο προκύπτει ακόμα ότι για οποιοδήποτε A υποσύνολο του Ω θα πρέπει $P[A]=|A|/6$.

Ο αξιωματικός ορισμός γενικεύει τον κλασικό ορισμό που οι μαθητές χρησιμοποιούσαν στο Γυμνάσιο και τους επιτρέπει να θεωρούν δειγματικούς χώρους με εκβάσεις που δεν είναι απαραίτητα ισοπίθανες.

Ένα συνηθισμένο διδακτικό λάθος είναι ο υπερβολικός τονισμός της σημασίας του δειγματικού χώρου και η καλλιέργεια της εσφαλμένης αντίληψης ότι ο δειγματικός χώρος είναι μονοσήμαντα καθορισμένος από το πείραμα τύχης. Η επιλογή του δειγματικού χώρου είναι στην πραγματικότητα σε μεγάλο βαθμό στην ευχέρειά μας. Αν στρίψουμε ένα συνηθισμένο κέρμα 4 φορές και μας ενδιαφέρει το πλήθος των κεφαλών που φέραμε, μπορούμε εξίσου καλά να θεωρήσουμε ως δειγματικό χώρο το σύνολο $Ω_1$={Κ,Γ}^{4} ή το σύνολο $Ω_2$={0,1,2,3,4}. Στην πρώτη περίπτωση θα πρέπει να αποδώσουμε πιθανότητα 1/16 σε κάθε στοιχείο του $Ω_1$. Στη δεύτερη περίπτωση, θα πρέπει να αποδώσουμε πιθανότητα 1/16 στα στοιχεία 0 και 4 του $Ω_2$, πιθανότητα 1/4 στα στοιχεία 1 και 3 και πιθανότητα 3/8 στο στοιχείο 2. Ένα ακόμα παράδειγμα περιγράφεται παρακάτω, στο 1ο έργο Πιθανοτήτων της Α’ Λυκείου.

Στη Β’ Λυκείου οι μαθητές εξελίσσουν τις γνώσεις τους στη συνδυαστική ανάλυση μαθαίνοντας τεχνικές απαρίθμησης για διατάξεις με ή χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις και συνδυασμούς. Οι δεξιότητες αυτές δίνουν στους μαθητές την ευχέρεια να λύνουν προβλήματα του πραγματικού κόσμου και του άμεσου ενδιαφέροντός τους. Τέτοια παραδείγματα δίνονται στα έργα Πιθανοτήτων της Β’ Λυκείου. Τα προβλήματα συνδυαστικής που μπορεί να διατυπώσει κανείς μπορούν εύκολα να ξεφύγουν υπερβολικά σε βαθμό δυσκολίας αλλά κάτι τέτοιο θα πρέπει να αποφεύγεται.

Στη Β’ Λυκείου οι μαθητές εισάγονται στην κανονική κατανομή, η οποία έχει εξέχουσα σημασία στα Στοχαστικά Μαθηματικά γιατί αποτελεί ένα καλό μοντέλο για την περιγραφή πολλών χαρακτηριστικών στον φυσικό κόσμο. Η κανονική κατανομή χαρακτηρίζεται από 2 παραμέτρους, τη μέση της τιμή, μ, και τη διασπορά της $σ^2$. Με βάση αυτές τις παραμέτρους μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα ώστε η τιμή του χαρακτηριστικού να βρίσκεται σε κάποιο διάστημα. Μια συνηθισμένη παρανόηση είναι να συγχέονται οι παράμετροι μ και $σ^2$ της κατανομής με τη δειγματική μέση τιμή, $\overline{x}$, και τη δειγματική διασπορά, $\overline{s}$, αντίστοιχα, σε ένα δείγμα από έναν πληθυσμό με αυτήν την κατανομή. Οι αντίστοιχες ποσότητες είναι κατά προσέγγιση ίσες, με την προϋπόθεση το δείγμα να είναι μεγάλο και αντιπροσωπευτικό. Δεν θα ήταν όμως ακριβές να πούμε ότι σε ένα δείγμα μεγέθους 40, τα 38 άτομα (95%) έχουν τιμή του χαρακτηριστικού στο διάστημα $(\overline{x} - 1{,}96\overline{s}, \overline{x} + 1{,}96\overline{s})$.

Η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας είναι λεπτή και συχνά οι μαθητές τη συγχέουν με την πιθανότητα της τομής. Ο ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας εισάγεται στη Β’ Λυκείου και χρησιμοποιείται στο αντίστοιχο κομμάτι της Στατιστικής. Ένα πρόβλημα που προτείνεται να συζητηθεί στην τάξη είναι το παρακάτω. «Έχετε στρίψει 10 φορές ένα αμερόληπτο κέρμα. Με δεδομένο ότι έχετε φέρει ΚΚΚΓΚΚΚΚΓΚ, να υπολογίσετε την πιθανότητα να φέρετε κεφαλή, αν στρίψετε το κέρμα ακόμα μία φορά». Ενθαρρύνετε τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν για την άποψή τους, θυμίζοντάς τους όμως, αν χρειαστεί, πως γνωρίζουμε ότι το κέρμα είναι αμερόληπτο και αυτό δεν είναι υπό αμφισβήτηση και εξηγώντας ότι οι 8 κεφαλές έτυχε να εμφανιστούν στο πλαίσιο της φυσιολογικής μεταβλητότητας των αποτελεσμάτων. Η σωστή απάντηση προκύπτει με εφαρμογή του ορισμού. Αλλάξτε το αποτέλεσμα στα πρώτα 10 στριψίματα σε οποιοδήποτε άλλο και επαναλάβετε, ώστε οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι η πιθανότητα να φέρουμε κορώνα στο 11ο στρίψιμο είναι ίδια, ανεξαρτήτως αποτελέσματος στα 10 πρώτα στριψίματα. Το παράδειγμα αυτό είναι το αρχέτυπο για την έννοια της ανεξαρτησίας που θα συναντήσουν στη Γ' Λυκείου.

Στη Γ' Λυκείου, η υποκειμενική ερμηνεία της πιθανότητας προσφέρει καλύτερη κατανόηση της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας. Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας P[A|B] ότι ο τρόπος που αποδίδουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες, αντιστοιχίζοντας στο ενδεχόμενο A την P[A|B], ικανοποιεί τα αξιώματα του ορισμού. Αυτή η δεσμευμένη πιθανότητα εκφράζει τον τρόπο με τον οποίον πρέπει να επικαιροποιήσουμε το αρχικό μας μοντέλο, ώστε να ενσωματώσουμε την πληροφορία ότι το ενδεχόμενο B συνέβη.

Με αυτή την ερμηνεία μπορούμε τώρα να μοντελοποιήσουμε μαθηματικά και την έννοια της ανεξαρτησίας ενδεχομένων, όπως την εννοούμε στη φυσική γλώσσα. Συγκεκριμένα λέγοντας ότι το ενδεχόμενο A είναι ανεξάρτητο από το B, εννοούμε ότι το πόσο πιθανό θεωρούμε το A δεν επηρεάζεται από το αν συνέβη το B. Με μαθηματικό φορμαλισμό αυτό σημαίνει ακριβώς ότι P[A|B]=P[A]. Έτσι έχουμε φτάσει σε έναν μαθηματικό ορισμό για την ανεξαρτησία. Είναι συνηθισμένο λάθος να συγχέουν οι μαθητές ανεξάρτητα και ασυμβίβαστα ενδεχόμενα και η διάκριση των όρων θα πρέπει να ξεκαθαρίζεται.

Το θεώρημα της ολικής πιθανότητας και το θεώρημα του Bayes είναι ευέλικτα μαθηματικά εργαλεία που επιτρέπουν να υπολογίζουμε πιθανότητες και δεσμευμένες πιθανότητες ενδεχομένων σε πολύ γενικές καταστάσεις από τον πραγματικό κόσμο. Είναι επομένως σημαντικό οι μαθητές να μπορούν να μοντελοποιούν μαθηματικά προβλήματα διατυπωμένα στη φυσική γλώσσα, έτσι ώστε να μπορούν να αξιοποιήσουν τη μαθηματική τεχνολογία που γνωρίζουν για να τα λύσουν. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα δίνεται στο 2ο έργο Πιθανοτήτων της Γ' Λυκείου.

4. Ενδεικτικά έργα και ενδεικτικές οδηγίες ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας

(1) Στατιστική

Α' Λυκείου

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ **(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ** **(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ** **(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**	
Πεδίο	Στοχαστικά Μαθηματικά	***Ειδικά***	Βασικές δράσεις (υπολογισμός,	***Προτεινόμ ενα***	Πολιτισμικά ευαισθητοποι

Ενότητα	Στατιστική		διαδικασίες εκτέλεσης) Μετασχηματιστικές δράσεις (οργάνωση, συστηματοποίηση) Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (Μεταβολή, Σύγκριση) Επίλυση Προβλήματος/εφαρμογή (εξήγηση, τεκμηρίωση)	***χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	ημένη διδασκαλία (ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους)
Μεγάλες Ιδέες	Μαθηματική δομή, μεταβολή				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων, Συλλογισμός/επιχειρηματολογία	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικά ως μέρος της πολιτειότητας, πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου	***Προτεινόμενοι πόροι***	-
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Ερμηνεία καταστάσεων στον προσωπικό και κοινωνικό βίο, Μαθηματικός γραμματισμός				
		Συγκείμενο	Προσωπικό και Κοινωνικό		

Το Nystagram είναι ένα δημοφιλές μέσο κοινωνικής δικτύωσης. Στον παρακάτω πίνακα καταγράφουμε τον αριθμό των ακόλουθων 11 χρηστών του.

χρήστης	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Αρ. ακολούθων	57	40	103	234	93	53	116	98	108	121	22

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος και να ερμηνεύσετε τις τιμές τους. Στη συνέχεια αφαιρούμε τον $4^{ο}$ χρήστη από το δείγμα μας. Να υπολογίσετε εκ νέου τη μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος και να συγκρίνετε τις νέες τιμές με τις αρχικές των μέτρων. Τι παρατηρείτε;
β) Να συγκρίνετε την τυπική απόκλιση του δείγματος καθώς και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος στα δύο δείγματα (με και χωρίς τον $4^{ο}$ χρήστη).
γ) Να συζητήσετε στο τμήμα σας πώς επηρεάζουν οι απόμακρες τιμές, τα μέτρα θέσης του **α)** ερωτήματος και τα μέτρα μεταβλητότητας του **β)** ερωτήματος.
δ) Αποφασίζετε με τους/τις συμμαθητές/τριες να κάνετε την ακόλουθη μικρή έρευνα στο τμήμα σας. Επιλέξτε το αγαπημένο σας μέσο κοινωνικής δικτύωσης, καταγράψτε φίλους ή ακόλουθους και υπολογίστε τα στατιστικά μέτρα των ερωτημάτων **α)** και **β)**. Στη συνέχεια αφαιρέστε από το δείγμα σας την παρατήρηση με τη μεγαλύτερη τιμή και υπολογίστε εκ νέου τα παραπάνω στατιστικά μέτρα. Παρουσιάστε στο τμήμα μας μια σύντομη έκθεση για τα συμπεράσματα της έρευνας σας.

Διδακτική διαχείριση: Σκοπός των τριών πρώτων ερωτημάτων είναι οι μαθητές/τριες να κατανοήσουν πως οι απόμακρες τιμές επηρεάζουν μέτρα θέσης και μεταβλητότητας και να είναι σε θέση σε τέτοιες περιπτώσεις να επιλέγουν κατάλληλα μέτρα. Παρατηρούν λοιπόν πως ενώ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση επηρεάζονται από τις απόμακρες τιμές, κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τη διάμεσο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Στο ερώτημα δ) χρησιμοποιείται μια περίπτωση δείγματος που έχει αφαιρεθεί η απόμακρη τιμή και μια περίπτωση δείγματος που δεν έχουν αφαιρεθεί οι απόμακρες τιμές. Οι μαθητές/τριες χωρίζονται σε ομάδες και παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της έρευνας στην ολομέλεια του τμήματος τους.

Β' Λυκείου

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ **(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ** **(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ** **(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**	
Πεδίο	Στοχαστικά Μαθηματικά	***Ειδικά***	Βασικές δράσεις (υπολογισμός, διαδικασίες εκτέλεσης)	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής***	Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη Διδασκαλία,
Ενότητα	Στατιστική				

Μεγάλες Ιδέες	Μαθηματική δομή, Μεταβολή, Μετασχηματισμοί		Μετασχηματιστικές δράσεις (οργάνωση, οπτικοποίηση, αναπαράσταση) Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (ομαδοποίηση, Μεταβολή, Σύγκριση) Επίλυση Προβλήματος/εφαρμογή (υπόθεση, αμφισβήτηση, εξήγηση, τεκμηρίωση)	***προσέγγισης***	πολλαπλά σημεία 'εισόδου', ποικιλία προσεγγίσεων/στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Μαθηματική επικοινωνία, οπτικοποίηση, μεταγνωστική ενημερότητα	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικά ως μέρος της πολιτειότητας, πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου, τα μαθηματικά ως ανθρώπινη αξία-κουλτούρα	***Προτεινόμενοι πόροι***	-
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Ερμηνεία καταστάσεων στον ευρύτερα κοινωνικό βίο, Μαθηματικός γραμματισμός, απόδοση αξιών στους άλλους και στα επιχειρήματά τους, λήψη αποφάσεων με διάλογο				
		Συγκειμενο	Κοινωνικό		

Σε μια μελέτη που αφορά τη χρήση ζώνης ασφαλείας από οδηγούς ηλικίας 18 – 24 ετών συλλέχθηκε πληροφορία από 198 οδηγούς αναφορικά με το φύλο (χαρακτηριστικό Α) τους και το αν είχαν ή όχι κάποιο τροχαίο ατύχημα τα τελευταία πέντε χρόνια (χαρακτηριστικό Β). Τα δεδομένα της έρευνας δίνονται στον επόμενο πίνακα συνάφειας συχνοτήτων.

	Τροχαίο Ατύχημα (Β)

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>Ναι</td><td>Όχι</td><td>Σύνολο</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Φύλο
(Α)</td><td>Άνδρες</td><td>69</td><td>58</td><td>127</td></tr>
<tr><td>Γυναίκες</td><td>27</td><td>44</td><td>71</td></tr>
<tr><td>Σύνολο</td><td>96</td><td>102</td><td>198</td></tr>
</table>

α) Να εξετάσετε την ύπαρξη εξάρτησης μεταξύ των δύο χαρακτηριστικών Α και Β του προβλήματος, χρησιμοποιώντας κατάλληλο πίνακα συνάφειας συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων ως προς το σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος ή ως προς το πλήθος των παρατηρήσεων του χαρακτηριστικού Α ή ως προς το πλήθος των παρατηρήσεων του χαρακτηριστικού Β.
β) Να επιλέξετε κατάλληλο διάγραμμα για να αναπαραστήσετε τις σχετικές συχνότητες των πινάκων συνάφειας που χρησιμοποιήσατε στο **α)** ερώτημα.
γ) Συζητήστε στην ομάδα σας και γράψτε ένα μικρό κείμενο με τα συμπεράσματά σας σχετικά με την ύπαρξη ή μη συσχέτισης μεταξύ του φύλου και της εμπλοκής σε τροχαίο ατύχημα. Στη συνέχεια, συζητήστε στην ολομέλεια του τμήματος, τα πλεονεκτήματα των διαφορετικών προτάσεων των ομάδων.

Διδακτική διαχείριση: Για όλο το μαθηματικό έργο, ο εκπαιδευτικός χωρίζει τους/τις μαθητές/τριες του τμήματος σε ολιγομελείς ομάδες και κάθε μια από αυτές χρησιμοποιεί έναν τρόπο από το α) ερώτημα και συνεχίζει στα επόμενα ερωτήματα με βάση τον πίνακα που επέλεξαν. Το ερώτημα (γ) είναι το σημαντικότερο όπου οι μαθητές/τριες συζητούν τα ευρήματά τους και σχολιάζουν αν τα δύο χαρακτηριστικά πράγματι θεωρούν πως διέπονται από μια σχέση αιτίας-αιτιατού.

Γ΄ Λυκείου

<table>
<tr><td colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</td><td colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</td><td colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</td></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Στοχαστικά Μαθηματικά</td><td rowspan="2">Ειδικά</td><td rowspan="2">Βασικές δράσεις (υπολογισμός, διαδικασίες</td><td rowspan="2">Προτεινόμ ενα χαρακτηρι στικά της</td><td rowspan="2">Πολιτισμικά ευαισθητοποι ημένη διδασκαλία</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Στατιστική</td></tr>
</table>

Μεγάλες Ιδέες	Μαθηματική δομή, Μεταβολή		εκτέλεσης) Μετασχηματιστικές δράσεις (οργάνωση) Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (Μεταβολή, συσχέτιση με οικείες και διαισθητικές ιδέες) Επίλυση Προβλήματος / μοντελοποίηση (εξήγηση, τεκμηρίωση)	***διδακτικής προσέγγισης***	(πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους)
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Μοντελοποίηση, συλλογισμός/επιχειρηματολογία, Μαθηματική επικοινωνία, μεταγνωστική ενημερότητα	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικά ως μέρος της πολιτειότητας , πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου, μαθηματικά ως ανθρώπινη αξία	***Προτεινόμενοι πόροι***	Ψηφιακά εργαλεία (χρήση κατάλληλου λογισμικού, πχ Geogebra, excel,…)
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Ερμηνεία καταστάσεων στον ευρύτερα κοινωνικό βίο, Μαθηματικός γραμματισμός, Κατανόηση διαλεκτικής σχέσης ανάμεσα στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του πολιτισμού				
		Συγκείμενο	Κοινωνία		

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται δεδομένα σχετικά με το ποσοστό των ενηλίκων που χρησιμοποιούν το διαδίκτυο (Διαδίκτυο), το ακαθάριστο εγχώριο προϊόν (ΑΕΠ) και το μέσο αριθμό παιδιών ανά ενήλικη γυναίκα (Γονιμότητα), για 39 χωρες.

α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson μεταξύ των μεταβλητών Διαδίκτυο και ΑΕΠ και να τον ερμηνεύσετε.

β) Να βρείτε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης θεωρώντας ως μεταβλητή απόκρισης τη μεταβλητή Διαδίκτυο και ως επεξηγηματική μεταβλητή, τη μεταβλητή Γονιμότητα. Να ερμηνεύσετε τις τιμές των συντελεστών παλινδρόμησης.

γ) Υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών ΑΕΠ και Γονιμότητας; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. Θεωρείτε ότι η πληροφορία από αυτό το ερώτημα επηρεάζει τις απαντήσεις σας στο δεύτερο ερώτημα.

Διαδίκτυο	ΑΕΠ	Γονιμότητα	Διαδίκτυο	ΑΕΠ	Γονιμότητα	Διαδίκτυο	ΑΕΠ	Γονιμότητα
0.65	6.09	2.8	37.36	25.35	1.4	0.34	1.89	5.1
10.08	11.32	2.4	13.21	17.44	1.3	2.56	3.84	3.2
37.14	25.37	1.7	0.68	2.84	3.0	2.93	7.10	1.1
38.7	26.73	1.3	1.56	6.00	2.3	1.34	13.33	4.5
31.04	25.52	1.7	23.31	32.41	1.9	6.49	11.29	2.6
4.66	7.36	2.2	27.66	19.79	2.7	18.27	20.15	1.2
46.66	27.13	1.5	38.42	25.13	1.3	51.63	24.18	1.6
20.14	9.19	2.4	27.31	8.75	2.9	30.70	28.10	1.4
2.57	4.02	1.8	3.62	8.43	2.5	6.04	5.89	2.4
42.95	29.00	1.8	49.05	27.19	1.7	32.96	24.16	1.6
0.93	3.52	3.3	46.12	19.16	2.0	50.15	34.32	2.1
43.03	24.43	1.7	0.10	0.85	5.4	1.24	2.07	2.3
26.38	23.99	1.9	46.38	29.62	1.8	0.09	0.79	7.0

Διδακτική διαχείριση: Σκοπός αυτού του έργου είναι η εμπέδωση του γεγονότος ότι η ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης ανάμεσα σε δύο μεταβλητές δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη αιτιώδη σχέση. Ζητήστε από τους μαθητές να ερμηνεύσουν το αποτέλεσμα στο (β) και προκαλέστε τους να συζητήσουν μεταξύ τους αν υπάρχει κάποιος λόγος για τον οποίον η αύξηση του μέσου αριθμού παιδιών επιφέρει μείωση του ποσοστού των ενηλίκων που χρησιμοποιούν το διαδίκτυο. Η συζήτηση θα πρέπει να καταλήξει στο συμπέρασμα πως η μεταβλητή ΑΕΠ είναι ένας συγχυτικός παράγοντας, μιας και σχετίζεται και με τις δύο άλλες μεταβλητές. Οι μαθητές/τριες μπορούν να χρησιμοποιήσουν κατάλληλο ψηφιακό εργαλείο για να απαντήσουν στα ερωτήματα.

(2) Πιθανότητες

Α΄ Λυκείου

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Στοχαστικά Μαθηματικά</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Βασικές δράσεις (υπολογισμός, διαδικασίες εκτέλεσης)

Μετασχηματιστικές δράσεις (συστηματοποίηση)

Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (Σύγκριση, γενίκευση)

Επίλυση Προβλήματος/εφαρμογή

(εξήγηση, τεκμηρίωση, δοκιμή ειδικών περιπτώσεων)</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη

Διδασκαλία,

ποικιλία προσεγγίσεων/στρατηγικών επίλυσης,

πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Πιθανότητες</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Γενίκευση</td></tr>
<tr><td>Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td>Συλλογισμός/επιχειρηματολογία,

Μοντελοποίηση</td><td rowspan="2">Γενικά</td><td rowspan="2">Μαθηματική επικοινωνία, ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td></tr>
<tr><td>Κοινωνικο-</td><td>Ερμηνεία καταστάσεων</td><td>Προτεινόμενοι πόροι</td><td>-</td></tr>
</table>

πολιτισ μικές πρακτικ ές	στον προσωπικό βίο	***Συγκε ίμενο***	προσωπικό		

Παρακάτω περιγράφεται ένα παιχνίδι με αμερόληπτο κέρμα για δύο παίκτες, την Άννα και το Βασίλη.

α) Η Άννα στρίβει το κέρμα 2 φορές και στη συνέχεια στρίβει το κέρμα 1 φορά ο Βασίλης. Η Άννα κερδίζει αν φέρνει αυστηρά περισσότερες κεφαλές (Κ) από το Βασίλη. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις κερδίζει ο Βασίλης. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Άννα;

β) Αν η Άννα στρίβει το κέρμα 3 φορές και ο Βασίλης 2 με τον ίδιο κανόνα για το νικητή, ποια θα ήταν η πιθανότητα να κερδίσει η Άννα;

γ) Αν η Άννα στρίψει το κέρμα ν+1 φορές και ο Βασίλης ν, διατυπώστε μια εικασία για την απάντηση και προσπαθήστε να την υποστηρίξετε.

Διδακτική διαχείριση: Το έργο αυτό αναδεικνύει ότι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης δεν είναι μονοσήμαντα προσδιορισμένος και ότι η ακριβής περιγραφή του δεν είναι εν τέλει σημαντική για να απαντήσουμε πιθανοθεωρητικά ερωτήματα. Θα μπορούσε π.χ. κανείς να θεωρήσει στο (α) ως δειγματικό χώρο τον $Ω=\{Κ,Γ\}^3$ και να αποδώσει πιθανότητα 1/8 σε κάθε έκβαση. Εξίσου καλά, θα μπορούσε να θεωρήσει ως δειγματικό χώρο το $Ω=\{0,1,2\}x\{0,1\}$, αντιστοιχίζοντας το στοιχείο (μ,ν) στο αποτέλεσμα όπου η Άννα φέρνει μ κεφαλές και ο Βασίλης ν. Με αυτή την επιλογή, θα έπρεπε για παράδειγμα να αποδώσει κανείς στην έκβαση (2,0) πιθανότητα 1/4 x 1/2=1/8, ενώ θα έπρεπε να αποδώσει στην έκβαση (1,1) πιθανότητα 1/2 x 1/2 =1/4. Το αποτέλεσμα είναι φυσικά το ίδιο, ανεξαρτήτως επιλογής. Για το γ) υπάρχουν τρόποι διαχείρισης (π.χ. διωνυμική κατανομή) που μπορούν να οδηγήσουν σε πράξεις οι οποίες δεν είναι διαχειρίσιμες από έναν μαθητή. Αξίζει να ενθαρρύνετε τους μαθητές σας να δοκιμάσουν επιχειρήματα συμμετρίας. Η απλούστερη λύση είναι ότι αν συμβολίσουμε με $Κ_Α$ το πλήθος των κεφαλών της Άννας και αντίστοιχα ορίσουμε τα $Κ_Β$, $Γ_Α$,$Γ_Β$, τότε $Ω=\{Κ_Α>Κ_Β\}U\{Γ_Α>Γ_Β\}$ με τα δύο ενδεχόμενα να είναι ξένα μεταξύ τους και να έχουν την ίδια πιθανότητα αφού το κέρμα είναι αμερόληπτο.

Β' Λυκείου

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ **(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**	**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ** **(Ενδεικτικά και τα πλέον**	**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ** **(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">σημαντικά)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Στοχαστικά Μαθηματικά</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Βασικές δράσεις (υπολογισμός, διαδικασίες εκτέλεσης)
Μετασχηματιστικές δράσεις (οργάνωση)
Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (σύγκριση, επέκταση)
Επίλυση Προβλήματος/εφαρμογή
(εξήγηση, τεκμηρίωση, δοκιμή ειδικών περιπτώσεων)</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη
Διδασκαλία,
πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Πιθανότητες</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μαθηματική δομή</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Συλλογισμός/επιχειρηματολογία,
Μαθηματική επικοινωνία
Δημιουργία συνδέσεων,
Μεταγνωστική ενημερότητα</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Μαθηματική επικοινωνία, ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικά ως μέρος της πολιτειότητας, πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="3">-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Ερμηνεία καταστάσεων στον ευρύτερα κοινωνικό βίο, Μαθηματικός γραμματισμός, ανάπτυξη πνεύματος περιέργειας και αγάπης για τα μαθηματικά</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>προσωπικό</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Τι από τα παρακάτω είναι πιθανότερο;

- να κερδίσετε στο τζόκερ έχοντας συμπληρώσει μία στήλη,
- ή να καλέσετε στο τηλέφωνο έναν φίλο ή μία φίλη σας, γνωρίζοντας μόνο ότι ο κωδικός περιοχής του/της είναι 210 και επιλέγοντας τα υπόλοιπα επτά ψηφία στην τύχη.

Διδακτική διαχείριση: Το έργο αυτό, εκτός από τη σημασία του για την εξοικείωση των μαθητών με τις έννοιες της συνδυαστικής ανάλυσης, έχει σημασία και για να καλλιεργήσει στους μαθητές την ικανότητα να αποκτούν αίσθηση της τάξης μεγέθους της πιθανότητας σπάνιων ενδεχομένων, συνδέοντάς την με αντίστοιχα μικρές πιθανότητες με τις οποίες έχουν περισσότερο βιωματική σχέση. Το ερώτημα είναι άμεσο να απαντηθεί. Ζητήστε από τους μαθητές να χωριστούν σε μικρές ομάδες στην τάξη και να δοκιμάσουν να βρουν αντίστοιχες αναλογίες, π.χ. είναι πιο πιθανό να πιάσει κανείς 4+1 στο τζόκερ ή να πετύχει στην τύχη τον αριθμό του σταθερού τηλεφώνου μιας φίλης του στη Σαντορίνη που έχει κωδικό περιοχής 22860 και στη συνέχεια πέντε νούμερα; Οι δυνατότητες είναι ανεξάντλητες: π.χ. συγκρίνετε τις πιθανότητες να απαντήσει κανείς ολόσωστα απαντώντας τυχαία σε ένα διαγώνισμα με 35 ερωτήσεις πενταπλής επιλογής και να διαλέξουν δύο άνθρωποι τον ίδιο κόκκο άμμου από την έρημο Σαχάρα.

Γ’ Λυκείου

<table>
<tr>
<th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th>
<th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th>
<th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th>
</tr>
<tr>
<td>Πεδίο</td>
<td>Στοχαστικά Μαθηματικά</td>
<td rowspan="3">Ειδικά</td>
<td rowspan="3">Βασικές δράσεις (υπολογισμός, δήλωση γεγονότων/διαπιστώσεων)

Μετασχηματιστικές δράσεις (οργάνωση)

Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (Δομή, Μεταβολή, Σύγκριση, Επέκταση)

Επίλυση Προβλήματος/ μοντελοποίηση, αποδεικτική διαδικασία, εφαρμογή (Διατύπωση εικασίας, υπόθεση, μοντελοποίηση, τεκμηρίωση)</td>
<td rowspan="3">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td>
<td rowspan="3">Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία - πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td>
</tr>
<tr>
<td>Ενότητα</td>
<td>Πιθανότητες</td>
</tr>
<tr>
<td>Μεγάλες Ιδέες</td>
<td>Μαθηματική δομή, Μεταβολή</td>
</tr>
</table>

Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Συλλογισμός/Επιχειρηματολογία, μαθηματική επικοινωνία, μοντελοποίηση, επίλυση προβλήματος, μεταγνωστική ενημερότητα	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού, τα μαθηματικά ως μέρος της πολιτειότητας αλλά και ως ανθρώπινη αξία	***Προτεινόμενοι πόροι***	-
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Ερμηνεία καταστάσεων στον ευρύτερα κοινωνικό βίο, Μαθηματικός γραμματισμός, Κριτική επίγνωση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στην ιατρική	***Συγκείμενο***	Προσωπικό, επιστημονικό. κοινωνικό		

Μια εργαστηριακή εξέταση έχει σκοπό την ανίχνευση κατά τον προγεννητικό έλεγχο ενός πολύ σοβαρού νοσήματος στα έμβρυα. Το νόσημα είναι σπάνιο και εκτιμάται ότι εμφανίζεται με πιθανότητα p=1/50.000. Όπως συμβαίνει με κάθε εξέταση, το αποτέλεσμα της συγκεκριμένης εξέτασης μπορεί να μην είναι σωστό. Έχει βρεθεί ότι:

- αν ένα έμβρυο νοσεί, το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι αρνητικό (δηλαδή η εξέταση αποτυγχάνει να εντοπίσει το νόσημα) με πιθανότητα 1/10.000. Λέμε τότε ότι το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι *ψευδώς αρνητικό*.
- αν ένα έμβρυο είναι υγιές, το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι θετικό (δηλαδή η εξέταση δείχνει λανθασμένα ότι το έμβρυο νοσεί) με πιθανότητα 1/1.000. Λέμε τότε ότι το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι *ψευδώς θετικό*.

α) Ένα ζευγάρι που περιμένει παιδί κάνει την εξέταση. Αν το αποτέλεσμα είναι θετικό, ποια είναι η πιθανότητα το έμβρυο πραγματικά να νοσεί και ποια είναι η πιθανότητα το αποτέλεσμα να οφείλεται σε σφάλμα της εξέτασης; Τι θα συστήνατε στο ζευγάρι;
β) Το ζευγάρι επαναλαμβάνει την εξέταση. Αν το αποτέλεσμα και της δεύτερης εξέτασης είναι θετικό, ποια είναι τώρα η πιθανότητα το έμβρυο πραγματικά να νοσεί;
γ) Η εξέταση αυτή παρέχεται δωρεάν από τα δημόσια νοσοκομείο και το κόστος της είναι 1 ευρώ ανά εξέταση. Μια εταιρεία έχει κατασκευάσει μια παρόμοια διαγνωστική εξέταση με πιθανότητα ψευδώς αρνητικού αποτελέσματος 1/1.000 και πιθανότητα ψευδώς θετικού αποτελέσματος 1/1.000.000. Η εταιρεία ισχυρίζεται ότι η νέα εξέταση δίνει πολύ σπανιότερα λάθος αποτέλεσμα και την κοστολογεί 100 ευρώ. Ποια εξέταση θα συμβουλεύατε τον/την Υπουργό Υγείας να επιλέξει;"

Διδακτική διαχείριση: Εκτός από τον προφανή στόχο του έργου να αναδείξει πώς μπορεί κανείς χρησιμοποιώντας τα Μαθηματικά να λύσει ενδιαφέροντα πραγματικά προβλήματα, ένας ακόμα βασικός στόχος που υπηρετεί το ερώτημα (β) είναι να αναδείξει τον ρόλο της δεσμευμένης πιθανότητας ως επικαιροποιημένη πεποίθηση. *Είναι χρήσιμο επομένως το ερώτημα (β) να προσεγγιστεί με δύο τρόπους: είτε θεωρώντας ότι για ένα υγιές έμβρυο η πιθανότητα 2 θετικών αποτελεσμάτων είναι $(1/1.000)^2$ είτε θεωρώντας ότι αμέσως πριν τη δεύτερη εξέταση, η πιθανότητα να νοσεί το έμβρυο είναι η δεσμευμένη πιθανότητα να νοσεί με δεδομένο ότι η πρώτη εξέταση έδωσε θετικό αποτέλεσμα. Στο ερώτημα (γ) ενθαρρύνετε τους μαθητές να σκεφτούν και να συζητήσουν μεταξύ τους, υποστηρίζοντας τις απόψεις τους με επιχειρήματα. ʻΕνας καλός σύμβουλος θα πρότεινε τη φθηνότερη εξέταση.*

5. Ενδεικτικό Παράδειγμα εξέλιξης των ΠΜΑ σε όλες τις βαθμίδες

(1) Στατιστική

Στην ενότητα αυτή δίνεται ένα παράδειγμα για την εξέλιξη των ΠΜΑ στην υποενότητα «διατύπωση ερωτημάτων», της ενότητας «διαχείριση δεδομένων», που δείχνει πώς μπορεί να εξελιχθεί στην πορεία όλων των τάξεων τα ΠΜΑ.

Οι μαθητές συζητούν για τους σύγχρονους Ολυμπιακούς αγώνες και πραγματοποιούν μια έρευνα με αφορμή ερωτήματα όπως:

— ***Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με κατηγορικά δεδομένα:*** Ποια είναι τα αγαπημένα αθλήματα των μαθητών της τάξης τους; (Α΄ Δημοτικού)
— ***Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με διακριτά ποσοτικά δεδομένα:*** Πόσες μπάλες ομαδικών αθλημάτων (π.χ. μπάσκετ, ποδοσφαίρου κλπ.) έχουν στο σπίτι τους; (Β΄ Δημοτικού)
— ***Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με διακριτά ποσοτικά ή κατηγορικά δεδομένα:*** Πόσες χώρες κέρδισαν χάλκινα, ασημένια, χρυσά μετάλλια στους τελευταίους Ολυμπιακούς αγώνες; (Γ΄ Δημοτικού)
— ***Ερωτήματα που αφορούν συγκρίσεις κατηγορικών ή διακριτών ποσοτικών δεδομένων σε δύο μικρές ομάδες ίσου πλήθους:*** Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των κοριτσιών και των αγοριών της τάξης τους; (Δ΄ Δημοτικού)
— ***Ερωτήματα που αφορούν ποσοτικά δεδομένα τα οποία ομαδοποιούνται***: Πόσες εύστοχες βολές επιτυγχάνει, σε 100 προσπάθειες, ο κάθε μαθητής της τάξης τους σε ένα διαγωνισμό στο μπάσκετ; (Ε΄ Δημοτικού)
— ***Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνδυασμό διακριτών ποσοτικών και κατηγορικών δεδομένων:*** Πόσες εύστοχες βολές επιτυγχάνει, σε 100 προσπάθειες, ο κάθε μαθητής της Γ΄ Δημοτικού και της ΣΤ΄ Δημοτικού σε ένα διαγωνισμό στο μπάσκετ; (ΣΤ΄ Δημοτικού)
— ***Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνεχή ποσοτικά δεδομένα από το οικείο περιβάλλον τους:*** Ποιες ήταν οι επιδόσεις των μαθητών της τάξης τους στο αγώνισμα του μήκους; (Α’ Γυμνασίου)

— ***Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά χρονικά δεδομένα:*** Πόσες χώρες έλαβαν μέρος στους σύγχρονους Ολυμπιακούς αγώνες (1896-σήμερα) και πόσες κέρδισαν μετάλλια; (Β΄ Γυμνασίου)
— ***Ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους:*** Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των εφήβων; (Γ΄ Γυμνασίου)
— ***Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού:*** Ποιες είναι οι επιδόσεις των εφήβων αγοριών και κοριτσιών αθλητών/τριών στο αγώνισμα του μήκους; (Α΄ Λυκείου)
— ***Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο κατηγορικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού:*** Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των εφήβων αγοριών και κοριτσιών; (Β΄ Λυκείου)
— ***Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού:*** Ποιες είναι οι επιδόσεις των εφήβων στο αγώνισμα του μήκους και στο τριπλούν; (Γ΄ Λυκείου)

(2) Πιθανότητες

Δίνουμε παρακάτω ένα παράδειγμα που αναδεικνύει την εξέλιξη των ΠΜΑ στις διάφορες βαθμίδες και τάξεις στην υποενότητα «Πιθανότητες ενδεχομένων» της ενότητας «Πειράματα τύχης και πιθανότητες».

Οι μαθητές πειραματίζονται με έναν κύβο ο οποίος έχει τρεις κόκκινες, δύο κίτρινες και μία πράσινη έδρα. Μπορούμε π.χ. να βάψουμε κόκκινες τις έδρες ενός ζαριού με ένδειξη 1-3, κίτρινες τις έδρες με ένδειξη 4-5 και πράσινη την έδρα με ένδειξη 6.

— **Περιγράφουν ένα ενδεχόμενο ως βέβαιο, πιθανό, αδύνατο:** Στην Α΄ Δημοτικού οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν ότι το να φέρουν κόκκινο είναι πιθανό αλλά όχι βέβαιο, ενώ το να φέρουν μπλε είναι αδύνατο.
— **Συγκρίνουν ενδεχόμενα ως προς την πιθανότητα εμφάνισής τους:** Στη Β΄ Δημοτικού μπορούν να απαντήσουν ότι το να φέρουν κόκκινο είναι πιο πιθανό από το να φέρουν πράσινο.
— **Συγκρίνουν τις πιθανότητες εμφάνισης ενδεχομένων πραγματοποιώντας πολλές δοκιμές**: Στη Γ΄ Δημοτικού οι μαθητές επιβεβαιώνουν με πειράματα ότι η κόκκινη έδρα εμφανίζεται πιο συχνά, αν επαναλάβουμε το ρίξιμο του κύβου αρκετές φορές.
— **Εκτιμούν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου σε κλίμακα με εύρος από αδύνατο ενδεχόμενο έως βέβαιο ενδεχόμενο:** Στη Δ΄ Δημοτικού οι μαθητές μπορούν να τοποθετήσουν σε μια κλίμακα με εύρος από το αδύνατο ως το βέβαιο τις πιθανότητες να έρθει κόκκινο, κίτρινο ή πράσινο.
— **Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως κλάσμα (πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων) / (πλήθος δυνατών περιπτώσεων) και την αναπαριστούν σε κλίμακα από 0 έως 1:** Στην Ε΄ Δημοτικού οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν ότι η πιθανότητα να φέρουν κίτρινο είναι 2/6=1/3.

— **Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως κλάσμα και τη συγκρίνουν με τη σχετική συχνότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης**: Στη ΣΤ’ Δημοτικού οι μαθητές διαπιστώνουν ότι αν ρίξουν πολλές φορές έναν τέτοιο κύβο οι σχετικές συχνότητες εμφάνισης της κόκκινης, κίτρινης και πράσινης έδρας είναι συγκρίσιμες με το 3/6, 2/6 και 1/6 αντίστοιχα.

— **Χρησιμοποιούν τον κλασικό ορισμό των Πιθανοτήτων για να υπολογίσουν την πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου**: Στην Α’ Γυμνασίου οι μαθητές μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα να φέρουν δύο φορές κίτρινο αν ρίξουν δύο τέτοιους κύβους (4 από τα 36 αποτελέσματα είναι ευνοϊκά) αλλά και την πιθανότητα να φέρουν ίδιο χρώμα (14 από τα 36 αποτελέσματα είναι ευνοϊκά).

— **Χρησιμοποιούν τον απλό προσθετικό νόμο για να υπολογίσουν την πιθανότητα σύνθετων ενδεχομένων:** Στη Β’ Γυμνασίου μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα τα δυο ζάρια να φέρουν το ίδιο χρώμα προσθέτοντας τις πιθανότητες να φέρουν δύο κόκκινες, δύο κίτρινες και δύο πράσινες ενδείξεις (9/36+4/36+1/36).

— **Αναγνωρίζουν μέσα από προσομοιώσεις με χρήση λογισμικού και εκτελώντας π.τ., ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών):** Στη Γ’ Γυμνασίου οι μαθητές μπορούν είτε να εκτελέσουν είτε να προσομοιώσουν με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων έναν μεγάλο αριθμό τέτοιων πειραμάτων και να δουν ότι η σχετική συχνότητα εμφάνισης 2 εδρών ίδιου χρώματος πλησιάζει μετά από πολλές επαναλήψεις το 14/36.

— **Περιγράφουν πειράματα τύχης και με μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα:** Στην Α’ Λυκείου οι μαθητές μπορούν να περιγράψουν το παραπάνω πείραμα σε έναν απλούστερο δειγματικό χώρο με 9 εκβάσεις (το καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου {κόκκινο, κίτρινο, πράσινο} με τον εαυτό του), να αποδώσουν πιθανότητα σε αυτές τις εκβάσεις και να υπολογίσουν π.χ. την πιθανότητα τουλάχιστον μια έδρα να είναι κόκκινη χρησιμοποιώντας λογισμό πιθανοτήτων και όχι απαρίθμηση.

— **Χρησιμοποιούν τις διατάξεις με και χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις και συνδυασμούς στη μοντελοποίηση και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων:** Στη Β’ Λυκείου οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν στο ερώτημα ποια είναι η πιθανότητα να φέρουν 4 διαφορετικά αποτελέσματα αν ρίξουν 4 φορές ένα ζάρι.

— **Αναγνωρίζουν τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τις κατανομές Bernoulli, διακριτή ομοιόμορφη και διωνυμική και υπολογίζουν τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας αυτών:** Στη Γ’ Λυκείου οι μαθητές μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα να φέρουν τουλάχιστον 5 φορές άρτια ένδειξη, αν ρίξουν 10 φορές ένα σύνηθες ζάρι, και να αναγνωρίσουν την αντιστοιχία αυτού του προβλήματος με το να απαντήσουν σωστά σε τουλάχιστον 5 από 10 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με 2 πιθανές απαντήσεις (Σωστό/Λάθος).

Αναφορές

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. (2020). Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) report II. American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) report: A pre-K–12 curriculum framework. American Statistical Association. https://www.amstat.org/asa/education/Guidelines-for-Assessment-and-Instruction-in-Statistics-Education-Reports.aspx

Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, *10*(3).

Pfannkuch, M. (2005). Thinking tools and variation. *Statistics Education Research Journal, 1*(1), 46-52.

Pratt, D. (2005). How do Teachers Foster Students' Understanding of Probability? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 171-190). NY, USA: Springer.

Reading, C., & Reid, J. (2007). Reasoning about Variation: Student Voice. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2*.

Watson, J. (2006). *Statistical Literacy at School: Growth and Goals.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.