Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα

Αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ = 9 cm και ΓΔ = 3 cm, τότε ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = 3$. Ομοίως, αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΖ = 6 cm και ΗΘ = 2 cm, τότε ο λόγος του ΕΖ προς το ΗΘ είναι $\frac{ΕΖ}{ΗΘ} = 3$.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΕΖ}{ΗΘ} = 3$, δηλαδή ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι ίσος με το λόγο του ΕΖ προς το ΗΘ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΕΖ είναι **ανάλογα** προς τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΗΘ.

Γενικά

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ, όταν ισχύει $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$.

Η ισότητα $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, δ. Τα ευθύγραμμα τμήματα **α, δ** ονομάζονται **άκροι όροι**, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα **β, γ** ονομάζονται **μέσοι όροι** της αναλογίας.
Σε μια αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, δ χρησιμοποιούμε τις γνωστές ιδιότητες των αναλογιών που ισχύουν και στους αριθμούς. Στην περίπτωση αυτή ως α, β, γ, δ θεωρούμε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων.

Οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών είναι:

- Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

  Αν $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ τότε $αδ = βγ$

- Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.

  Αν $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ τότε $\frac{α}{γ} = \frac{β}{δ}$ ή $\frac{δ}{β} = \frac{γ}{α}$

- Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

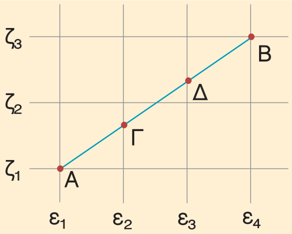
  Αν $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ τότε $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} = \frac{α+γ}{β+δ}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Σε τετραγωνισμένο χαρτί έχουμε χαράξει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

α) Να συγκριθούν τα τμήματα ΑΓ, ΓΔ και ΔΒ.

β) Να βρεθούν οι λόγοι $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}, \frac{ΑΒ}{ΑΔ}, \frac{ΑΔ}{ΒΓ}$.



Λύση

α) Οι παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$, $ε_4$ ορίζουν ίσα τμήματα στην ευθεία $ζ_1$, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΒ. Άρα ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ.

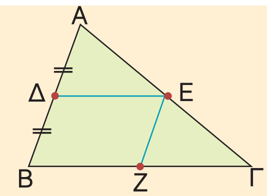
β) Αφού τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ είναι ίσα, έχουμε:

$$\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{1}{3}, \quad \frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{3}{2}, \quad \frac{ΑΔ}{ΒΓ} = \frac{2}{2} = 1$$

2 Αν Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ, ΔΕ // ΒΓ και ΕΖ // ΑΒ, να αποδειχτεί ότι:

α) Ζ το μέσον της πλευράς ΒΓ

β) $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε Δ μέσο ΑΒ και ΔΕ // ΒΓ, οπότε Ε μέσο της ΑΓ. Επειδή Ε το μέσο της ΑΓ και ΕΖ // ΑΒ, έχουμε Ζ μέσο ΒΓ.

β) Το τετράπλευρο ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα ΔΕ = ΒΖ. Όμως $ΒΖ = \frac{ΒΓ}{2}$, οπότε και $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$.

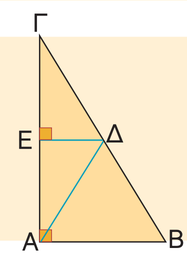
Άμεσα λοιπόν προκύπτει ότι:

Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

3 Αν ΑΔ διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90°$) και ΔΕ // ΑΒ, να αποδειχτεί ότι:

α) Ε μέσο της πλευράς ΑΓ

β) $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2}$



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε Δ μέσο της ΒΓ και ΔΕ // ΑΒ, οπότε Ε μέσο της ΑΓ.

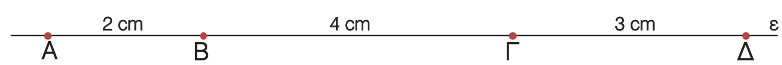
β) Επειδή ΔΕ // ΑΒ και ΑΒ ⊥ ΑΓ, θα είναι ΔΕ ⊥ ΑΓ. Άρα, ΔΕ μεσοκάθετος του ΑΓ και από τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου έχουμε ΑΔ = ΔΓ.

Όμως $ΔΓ = \frac{ΒΓ}{2}$, οπότε και $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2}$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

4 Αν Α, Β, Γ, Δ είναι διαδοχικά σημεία μιας ευθείας ε τέτοια ώστε ΑΒ = 2 cm, ΒΓ = 4 cm και ΓΔ = 3 cm, να αποδειχθεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ, ΑΓ.

Λύση

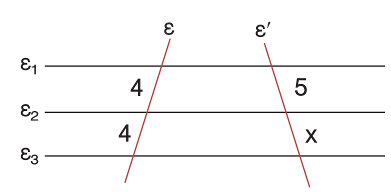


Είναι $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{2\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{1}{2}$ και $\frac{ΓΔ}{ΑΓ} = \frac{3\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{1}{2}$.

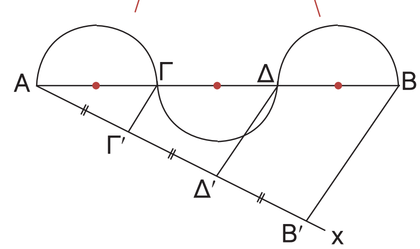
Άρα έχουμε $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΓΔ}{ΑΓ}$ που σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ, ΑΓ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

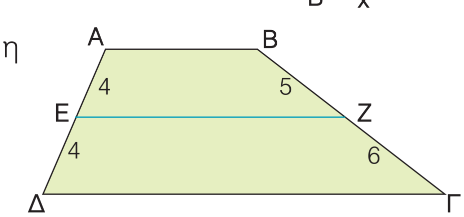
1 Στο διπλανό σχήμα είναι $ε_1 \,//\, ε_2 \,//\, ε_3$.
Να υπολογίσετε το x.



2 Αν Β′Β // ΓΓ′ // ΔΔ′ και η διάμετρος ΓΔ του δεύτερου ημικυκλίου είναι 4 cm, τότε να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.



3 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι η ΕΖ παράλληλη προς τις βάσεις του;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



4 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{\quad}{\quad}$ β) $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{\quad}{\quad}$

γ) $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{\quad}{\quad}$ δ) $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{\quad}{\quad}$

5 Αν ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ
να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = —$ β) $\frac{ΒΔ}{ΒΕ} = —$ γ) $\frac{ΑΓ}{ΑΕ} = —$ δ) $\frac{ΑΕ}{ΒΓ} = —$ ε) $\frac{ΑΓ}{ΓΕ} = —$

6 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν ΑΒ = 8 cm και ΓΔ = 12 cm, τότε $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{2}{3}$. ☐

β) Αν $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{2}{3}$, τότε ΑΒ = 2 και ΓΔ = 3. ☐

γ) Ο λόγος δύο πλευρών τετραγώνου είναι ίσος με 1. ☐

δ) Αν $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{2}{5}$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από το ΓΔ. ☐

ε) Ο λόγος της ακτίνας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του είναι 2. ☐

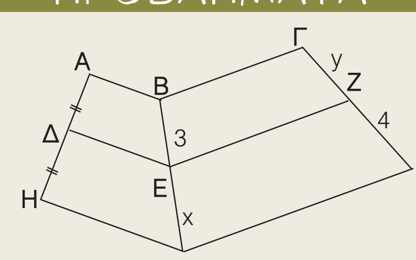
στ) Αν Μ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε $\frac{ΑΜ}{ΑΒ} = \frac{1}{2}$. ☐

ζ) Ο λόγος μιας πλευράς ισόπλευρου τριγώνου προς την περίμετρό του είναι $\frac{1}{3}$. ☐

7 Βλέποντας την αναλογία $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{1}{4}$ η Μαρία ισχυρίστηκε ότι ΑΒ = 1 και ΓΔ = 4, ενώ η Ελένη ισχυρίστηκε ότι το ΓΔ είναι τετραπλάσιο του ΑΒ. Ποια από τις δύο έχει δίκιο;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ // ΔΕ // ΗΘ και ΒΓ // ΕΖ // ΘΙ.
Αν ΑΔ = ΔΗ, να υπολογίσετε το x και το y.



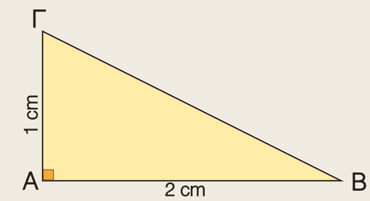
2 **α)** Με κανόνα και διαβήτη να διαιρέσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 7 cm σε πέντε ίσα ευθύγραμμα τμήματα και πάνω σε μια ευθεία ε να σχεδιάσετε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $ΓΔ = \frac{2}{5}ΑΒ$, $ΔΖ = \frac{4}{5}ΑΒ$ και $ΖΗ = \frac{6}{5}ΑΒ$.

β) Να υπολογίσετε τους λόγους:

i) $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}$ ii) $\frac{ΔΖ}{ΓΔ}$ iii) $\frac{ΑΒ}{ΖΗ}$ iv) $\frac{ΖΗ}{ΔΖ}$ v) $\frac{ΓΔ}{ΖΗ}$

3 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος να βρείτε τους λόγους:

α) $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ β) $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$ γ) $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$



4 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90^\circ$) είναι ΑΒ = 6 cm και ΒΓ = 10 cm. Να υπολογίσετε τους λόγους:

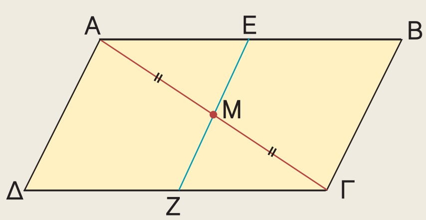
α) $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$ β) $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ γ) $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$

5 Να σχεδιάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 4 cm. Να υπολογίσετε το λόγο του ύψους του προς την πλευρά του.

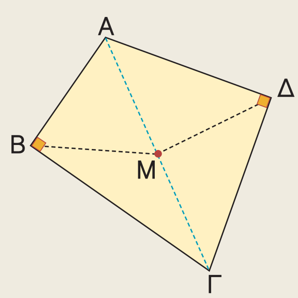
6 Από το μέσο Μ της διαγωνίου ΑΓ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να φέρετε ΕΖ // ΑΔ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Ε, Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΔΓ αντιστοίχως.

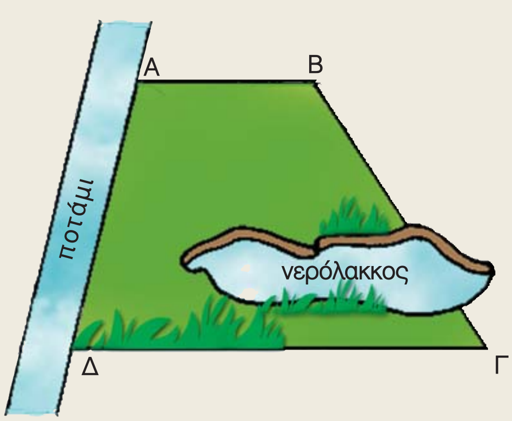
β) Τα τμήματα ΑΒ, ΑΓ είναι ανάλογα προς τα τμήματα ΑΕ, ΑΜ.



7 Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\widehat{Β} = \widehat{Δ} = 90^\circ$.
Αν Μ είναι το μέσον της διαγωνίου ΑΓ, να αποδείξετε ότι ΒΜ = ΜΔ.



8 Ένα αγρόκτημα έχει το σχήμα ενός τραπεζίου ΑΒΓΔ. Ο ιδιοκτήτης του θέλει να μετρήσει την περίμετρό του, προκειμένου να το περιφράξει αλλά τη ΒΓ δεν μπορεί να τη μετρήσει γιατί παρεμβάλλεται ένας νερόλακκος που σχηματίστηκε από την τελευταία βροχόπτωση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πώς θα μπορούσε να την υπολογίσει;



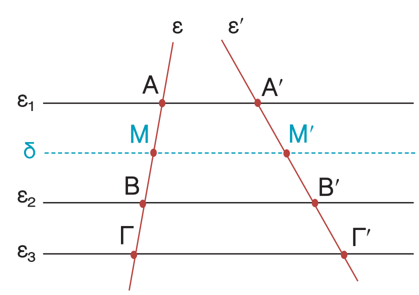
1.3 Θεώρημα του Θαλή

✔ *Μαθαίνω το θεώρημα του Θαλή και πώς να το χρησιμοποιώ για τον υπολογισμό του μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος και του λόγου δυο τμημάτων.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να χαράξετε μια ευθεία ε κάθετη στις γραμμές του τετραδίου σας και να επιλέξετε τρεις γραμμές του τετραδίου που να ορίζουν στην ε δύο ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε το ένα από αυτά να είναι διπλάσιο του άλλου.

2. Αν χαράξετε μια άλλη ευθεία ε' που δεν είναι κάθετη στις γραμμές του τετραδίου, τότε οι τρεις γραμμές που επιλέξατε προηγουμένως ορίζουν και στην ε' δύο ευθύγραμμα τμήματα, που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου;



Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 που τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Α, Β, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε $ΑΒ = 2 \cdot ΒΓ$.

Αν μια άλλη ευθεία ε' τέμνει τις ε_1, ε_2, ε_3 στα σημεία Α′, Β′, Γ′ αντιστοίχως, τότε θα αποδείξουμε ότι και για τα ευθύγραμμα τμήματα Α′Β′, Β′Γ′ ισχύει μια ανάλογη σχέση. Δηλαδή $Α'Β' = 2 \cdot Β'Γ'$.

Πράγματι, αν από το μέσο Μ του ΑΒ φέρουμε την ευθεία δ παράλληλη προς τις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, τότε οι παράλληλες ευθείες ε_1, δ, ε_2, ε_3 ορίζουν στην ευθεία ε ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ευθεία ε'. Δηλαδή ισχύει $Α'Μ' = Μ'Β' = Β'Γ'$ και επομένως $Α'Β' = 2 \cdot Β'Γ'$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, αν $ΑΒ = 2 \cdot ΒΓ$ θα ισχύει και $Α'Β' = 2 \cdot Β'Γ'$, οπότε:

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{2 \cdot ΒΓ}{2 \cdot Β'Γ'} \quad ή \quad \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'}.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα Α′Β′, Β′Γ′.

Γενικά

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:

$$\text{αν} \quad \varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2 \,//\, \varepsilon_3 \quad \text{τότε} \quad \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$$

Η προηγούμενη **πρόταση είναι γνωστή ως** **θεώρημα του Θαλή**.

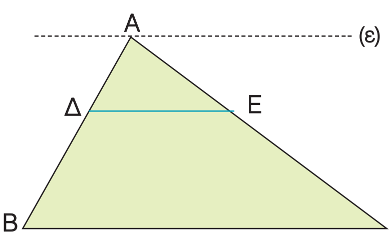
Από την ισότητα των τριών λόγων του Θεωρήματος του Θαλή έχουμε τις εξής αναλογίες

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} \quad \text{και} \quad \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}.$$

Αν στις αναλογίες αυτές εναλλάξουμε τους μέσους όρους, τότε προκύπτουν και οι εξής αναλογίες $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ και $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A'B'}{A'\Gamma'}$.

Για παράδειγμα, σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν ΔΕ // ΒΓ και από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε // ΒΓ, τότε οι παράλληλες ευθείες ε, ΔΕ, ΒΓ θα ορίζουν στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ τμήματα ανάλογα.

Δηλαδή, $\frac{A\Delta}{AE} = \frac{\Delta B}{E\Gamma}$, οπότε και $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$.



Αποδεικνύεται ακόμη ότι, αν ισχύει $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$, τότε ΔΕ // ΒΓ. Επομένως:

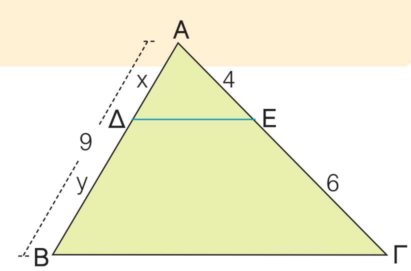
Για δύο σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντιστοίχως ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

- Αν ΔΕ // ΒΓ τότε $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$.
- Αν $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ τότε ΔΕ // ΒΓ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 9, ΑΕ = 4 και ΕΓ = 6.
Αν ΔΕ // ΒΓ να υπολογιστούν τα x, y.

Λύση

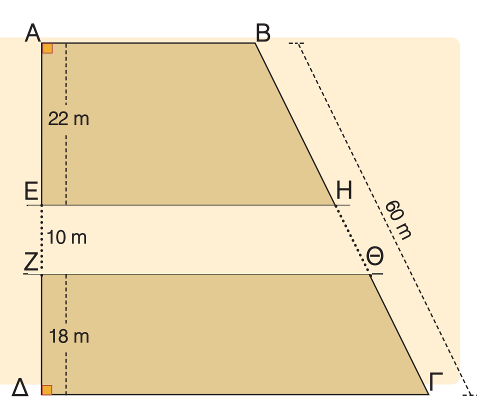


Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ, οπότε από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$\frac{A\Delta}{AE} = \frac{AB}{A\Gamma}$ ή $\frac{x}{4} = \frac{9}{10}$ ή $10x = 36$ ή $x = 3{,}6$.

Άρα $y = 9 - 3{,}6$ οπότε $y = 5{,}4$.

2 Μέσα από ένα οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος τραπεζίου με ΑΔ = 50 m και ΒΓ = 60 m πέρασε ένας δρόμος παράλληλος προς τις πλευρές του ΑΒ, ΓΔ που είχε πλάτος 10 m και χώρισε το οικόπεδο στα δύο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν είναι ΑΕ = 22 m και ΖΔ = 18 m, να υπολογιστούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΗ, ΘΓ, ΗΘ.



Λύση

Επειδή ΑΒ // ΕΗ // ΔΓ από το Θεώρημα Θαλή έχουμε:

$\dfrac{ΒΗ}{ΑΕ} = \dfrac{ΒΓ}{ΑΔ}$ ή $\dfrac{ΒΗ}{22} = \dfrac{60}{50}$ ή $50 \cdot ΒΗ = 1320$ ή $ΒΗ = 26{,}40$ m.

Επειδή ΑΒ // ΖΘ // ΔΓ από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε

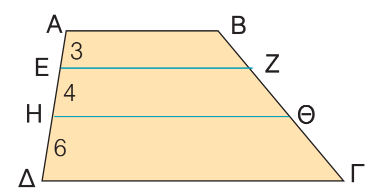
$\dfrac{ΘΓ}{ΖΔ} = \dfrac{ΒΓ}{ΑΔ}$ ή $\dfrac{ΘΓ}{18} = \dfrac{60}{50}$ ή $50 \cdot ΘΓ = 1080$ ή $ΘΓ = 21{,}60$ m.

Άρα $ΗΘ = 60 - (26{,}40 + 21{,}60)$ ή $ΗΘ = 12$ m.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Αν ΑΒ, ΕΖ, ΗΘ, ΔΓ είναι παράλληλες, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

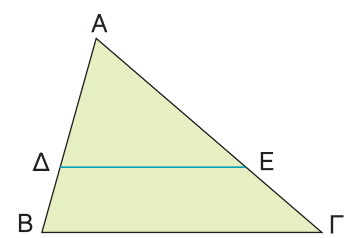
α) $\dfrac{ΒΖ}{ΘΓ} = \text{---}$ β) $\dfrac{ΖΘ}{ΖΓ} = \text{---}$ γ) $\dfrac{ΒΘ}{ΒΓ} = \text{---}$



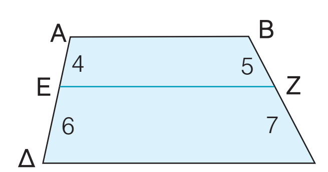
2 Αν ΔΕ // ΒΓ, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) $\dfrac{ΔΒ}{ΕΓ} = \dfrac{ΑΒ}{ΑΓ}$ ☐ β) $\dfrac{ΑΔ}{ΔΒ} = \dfrac{ΕΓ}{ΑΕ}$ ☐

γ) $\dfrac{ΑΒ}{ΑΔ} = \dfrac{ΑΓ}{ΕΓ}$ ☐ δ) $\dfrac{ΑΔ}{ΑΒ} = \dfrac{ΑΕ}{ΑΓ}$ ☐

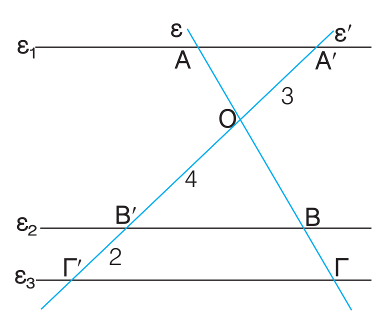


3 Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Είχε δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



4 Στο διπλανό σχήμα είναι $ε_1$ // $ε_2$ // $ε_3$. Να υπολογίσετε τους λόγους:

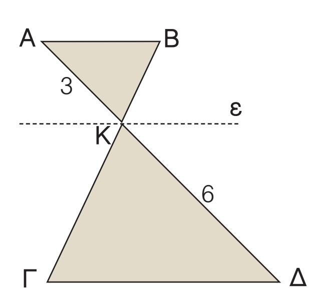
α) $\dfrac{ΟΒ}{ΒΓ}$ β) $\dfrac{ΒΓ}{ΟΓ}$ γ) $\dfrac{ΟΑ}{ΟΒ}$ δ) $\dfrac{ΑΒ}{ΒΓ}$



5 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ // ε // ΓΔ. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε λόγο της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.

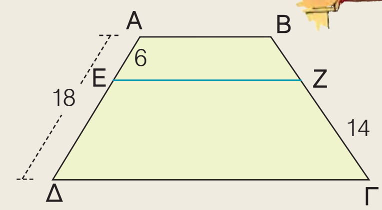
Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\dfrac{ΒΚ}{ΚΓ}$	1. $\dfrac{2}{3}$
β. $\dfrac{ΚΓ}{ΒΓ}$	2. $\dfrac{1}{3}$
γ. $\dfrac{ΒΓ}{ΒΚ}$	3. $\dfrac{1}{2}$
	4. 3

α	β	γ

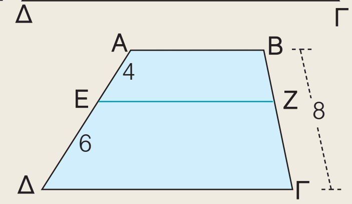


ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

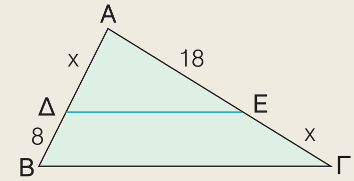
1 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΖ.



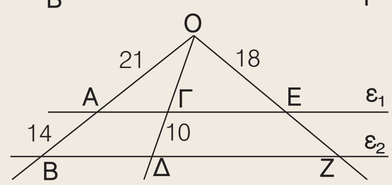
2 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΖΓ.



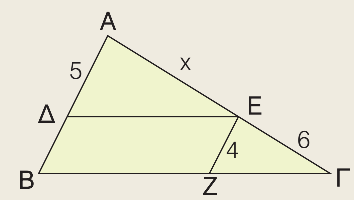
3 Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ. Να υπολογίσετε το x.



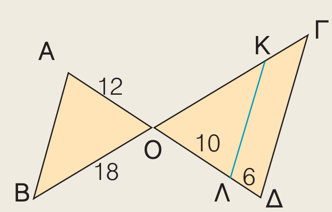
4 Στο διπλανό σχήμα είναι ε_1 // ε_2. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΓ και ΕΖ.



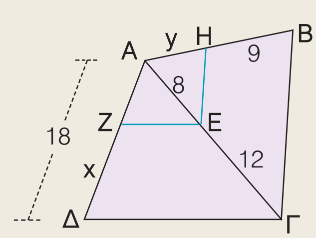
5 Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ, ΕΖ // ΑΒ.
Να υπολογίσετε το x.



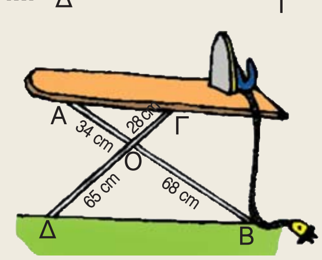
6 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ // ΚΛ // ΓΔ. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΚ και ΚΓ.



7 Στο διπλανό σχήμα είναι ΕΖ // ΔΓ και ΕΗ // ΒΓ.
Να υπολογίσετε τα x, y.



8 Κάποιος συναρμολόγησε μια πτυσσόμενη σιδερώστρα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και διαπίστωσε ότι η σανίδα δεν ήταν οριζόντια.
Πού έγινε το λάθος;



1.4 Ομοιοθεσία

- ✔ *Μαθαίνω να βρίσκω το ομοιόθετο ενός σχήματος.*
- ✔ *Γνωρίζω με ποιες σχέσεις συνδέονται τα ομοιόθετα σχήματα.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και στο εσωτερικό του να πάρετε ένα σημείο Ο.

2. Πάνω στις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′, ΟΔ′ διπλάσια των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Να σχηματίσετε το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ και να συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες του με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του αρχικού τετραπλεύρου.

3. Πάνω στις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα ΟΑ″, ΟΒ″, ΟΓ″, ΟΔ″, μισά των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Να σχηματίσετε το τετράπλευρο Α″Β″Γ″Δ″ και να συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες τους με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του αρχικού τετραπλεύρου. Τι παρατηρείτε;

Το ομοιόθετο σημείου

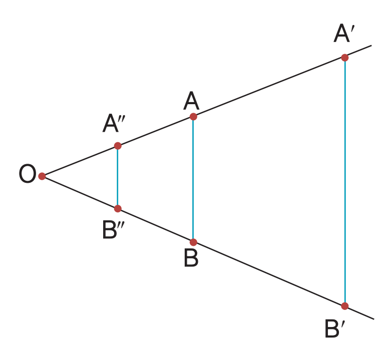
Αν πάρουμε δύο σημεία Ο, Α και στην ημιευθεία ΟΑ πάρουμε ένα σημείο Α′, τέτοιο ώστε ΟΑ′ $= 2 \cdot$ ΟΑ, τότε λέμε ότι το σημείο Α′ είναι **ομοιόθετο** του Α με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = 2$.

Αν Α″ σημείο της ημιευθείας ΟΑ, τέτοιο ώστε ΟΑ″ $= \frac{1}{2} \cdot$ ΟΑ,

τότε το Α″ είναι ομοιόθετο του Α με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.

Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε το ομοιόθετο ενός σημείου με κέντρο Ο και λόγο λ ονομάζεται **ομοιοθεσία**. Το σημείο Ο λέγεται **κέντρο** ομοιοθεσίας, ενώ ο αριθμός λ ονομάζεται **λόγος** ομοιοθεσίας. Είναι φανερό ότι το κέντρο Ο έχει ομοιόθετο τον εαυτό του.

Το ομοιόθετο ευθυγράμμου τμήματος



Στην ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = 2$ το ομοιόθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι το ευθύγραμμο τμήμα Α′Β′, όπου Α′, Β′ τα ομοιόθετα των άκρων του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Επειδή ΟΑ′ $= 2 \cdot$ ΟΑ και ΟΒ′ $= 2 \cdot$ ΟΒ, θα έχουμε $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = 2$, οπότε ΑΒ // Α′Β′.

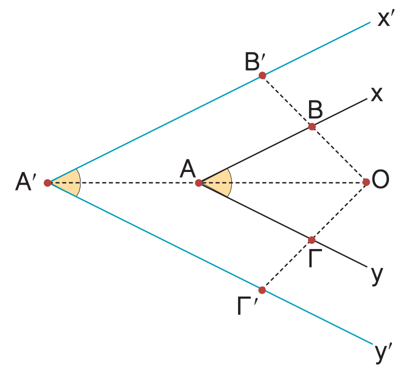
Επομένως

Τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα.

Αν συγκρίνουμε τα τμήματα Α′Β′ και ΑΒ, διαπιστώνουμε ότι Α′Β′ $= 2 \cdot$ ΑΒ ή $\frac{A'B'}{AB} = 2$.

Αν Α″Β″ είναι ομοιόθετο του ΑΒ με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$, τότε:
$Α''Β'' = \frac{1}{2} \cdot ΑΒ$ ή $\frac{Α''Β''}{ΑΒ} = \frac{1}{2}$.

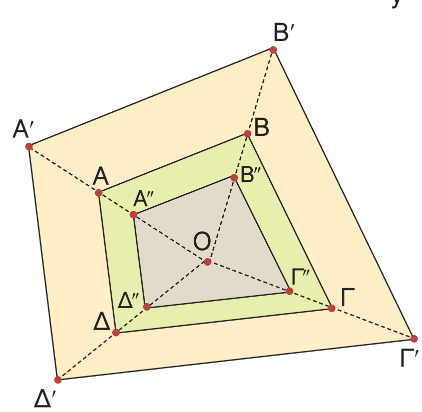
Το ομοιόθετο γωνίας



Για να βρούμε το ομοιόθετο μιας γωνίας $x\hat{A}y$ με κέντρο Ο και λόγο ένα θετικό αριθμό λ (π.χ. λ = 2), παίρνουμε ένα σημείο Β στην πλευρά Αx, ένα σημείο Γ στην πλευρά Αy και βρίσκουμε τα σημεία Β′, Α′, Γ′ που είναι αντιστοίχως τα ομοιόθετα των Β, Α, Γ. Ορίζεται έτσι η γωνία $x'\hat{A}'y'$, που είναι ομοιόθετη της γωνίας $x\hat{A}y$.
Αν συγκρίνουμε τις δύο γωνίες διαπιστώνουμε ότι είναι ίσες, δηλαδή $x\hat{A}y = x'\hat{A}'y'$. Επομένως

Οι ομοιόθετες γωνίες είναι ίσες.

Το ομοιόθετο πολυγώνου



Στην ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο λ = 2, το ομοιόθετο ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′, όπου Α′, Β′, Γ′, Δ′ είναι αντιστοίχως τα ομοιόθετα των κορυφών του Α, Β, Γ, Δ. Οι πλευρές και οι γωνίες του τετραπλεύρου Α′Β′Γ′Δ′ είναι ομοιόθετες με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του ΑΒΓΔ, οπότε ισχύουν:

$$\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = \frac{Β'Γ'}{ΒΓ} = \frac{Γ'Δ'}{ΓΔ} = \frac{Δ'Α'}{ΔΑ} = 2 \quad \text{και} \quad \hat{Α}' = \hat{Α},\ \hat{Β}' = \hat{Β},\ \hat{Γ}' = \hat{Γ},\ \hat{Δ}' = \hat{Δ}.$$

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο λ = 2 είναι **μεγέθυνση** του ΑΒΓΔ.

Αν Α″Β″Γ″Δ″ είναι το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$, ομοίως ισχύουν:

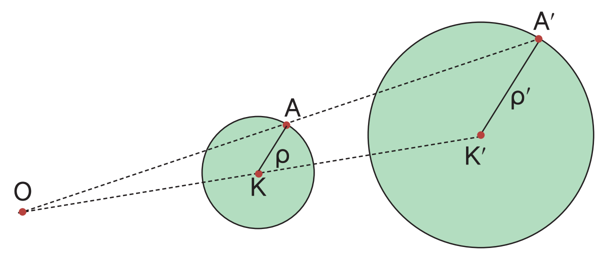
$$\frac{Α''Β''}{ΑΒ} = \frac{Β''Γ''}{ΒΓ} = \frac{Γ''Δ''}{ΓΔ} = \frac{Δ''Α''}{ΔΑ} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \hat{Α}'' = \hat{Α},\ \hat{Β}'' = \hat{Β},\ \hat{Γ}'' = \hat{Γ},\ \hat{Δ}'' = \hat{Δ}.$$

Το τετράπλευρο Α″Β″Γ″Δ″ που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$ είναι **σμίκρυνση** του ΑΒΓΔ.

Γενικά

- Δύο ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- Οι ανάλογες πλευρές δύο ομοιόθετων πολυγώνων που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.
- Αν το πολύγωνο Π′ είναι ομοιόθετο του Π με λόγο λ, τότε το Π′ είναι
  - μεγέθυνση του Π, όταν λ > 1
  - σμίκρυνση του Π, όταν 0 < λ < 1 και
  - ίσο με το Π, όταν λ = 1.

Το ομοιόθετο κύκλου



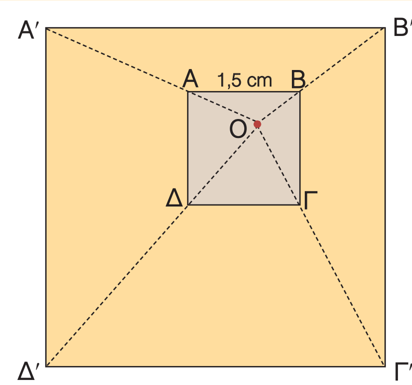
Για να βρούμε το ομοιόθετο ενός κύκλου (Κ, ρ) με κέντρο ομοιοθεσίας Ο και λόγο ένα θετικό αριθμό λ (π.χ. λ = 2), βρίσκουμε το ομοιόθετο του κέντρου Κ και το ομοιόθετο ενός σημείου Α του κύκλου, που είναι τα σημεία Κ′ και Α′ αντιστοίχως.

Ορίζεται έτσι ένας κύκλος (Κ′, ρ′), όπου ρ′ = Κ′Α′, που είναι ομοιόθετος του κύκλου (Κ, ρ). Το ευθύγραμμο τμήμα Κ′Α′ είναι ομοιόθετο του ΚΑ με κέντρο Ο και λόγο λ = 2, οπότε Κ′Α′ = 2 • ΚΑ, δηλαδή ρ′ = 2ρ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Με κέντρο ομοιοθεσίας ένα εσωτερικό σημείο Ο τετραγώνου ΑΒΓΔ, πλευράς 1,5 cm και λόγο λ = 3, να σχεδιαστεί το ομοιόθετό του και να αποδειχτεί ότι είναι τετράγωνο.**

Λύση



Στις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ παίρνουμε αντιστοίχως τα τμήματα ΟΑ′ = 3 • ΟΑ, ΟΒ′ = 3 • ΟΒ, ΟΓ′ = 3 • ΟΓ, ΟΔ′ = 3 • ΟΔ. Το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και λόγο λ = 3,

οπότε: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = 3.$

Άρα, Α′Β′ = 3 • ΑΒ = 3 • 1,5 = 4,5 cm.

Ομοίως έχουμε Β′Γ′ = Γ′Δ′ = Δ′Α′ = 4,5 cm

Επειδή τα ομοιόθετα σχήματα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες του ίσες, το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ θα έχει τις γωνίες του ορθές. Επομένως το τετράπλευρο Α′Β′Γ′Δ′ είναι τετράγωνο, αφού έχει τις πλευρές του ίσες και τις γωνίες του ορθές. Άρα

Το ομοιόθετο ενός τετραγώνου είναι τετράγωνο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

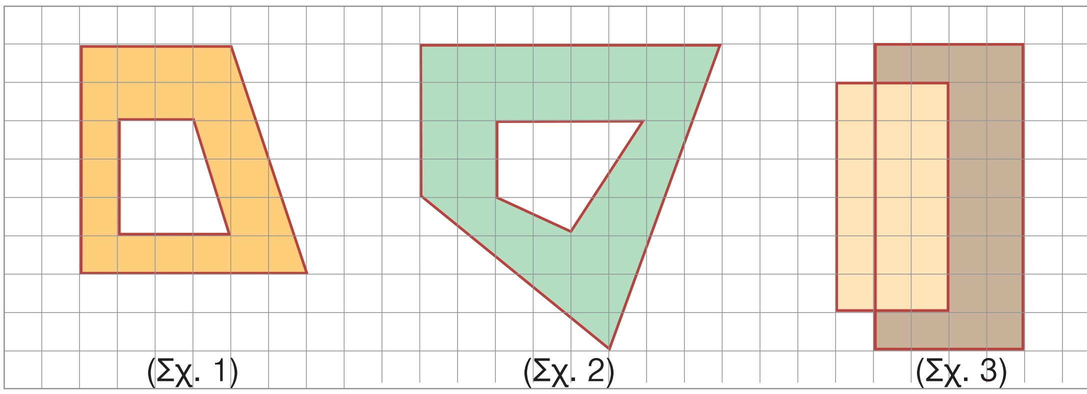
1 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.

Στην ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο

α) λ = 5 το ομοιόθετο του Α είναι το .... **β)** λ = 2 το ομοιόθετο του Β είναι το ....

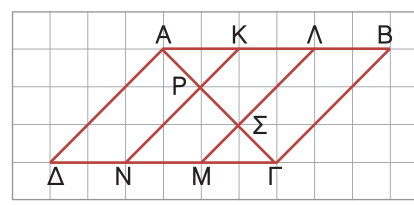
γ) $\lambda = \frac{1}{3}$ το ομοιόθετο του Γ είναι το .... **δ)** $\lambda = \frac{3}{5}$ το ομοιόθετο του Ε είναι το ....

2 Σε ποια από τα παρακάτω σχήματα τα πολύγωνα είναι ομοιόθετα;



3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ευθύγραμμο τμήμα	Κέντρο ομοιοθεσίας	Λόγος ομοιοθεσίας	Ομοιόθετο τμήματος
ΚΡ	Α	3	
ΡΝ	Γ		ΣΜ
ΣΜ			ΑΔ
ΒΓ	Α		ΚΡ
ΒΛ	Β	3	



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

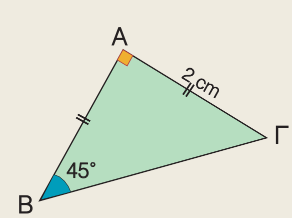
1 Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 3 cm.

α) Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Α και λόγο: i) $\lambda = \frac{1}{2}$ ii) $\lambda = 2$.

β) Να υπολογίσετε τις πλευρές των τετραγώνων που σχεδιάσατε.

2 Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με κάθετες πλευρές ΑΒ = 12 cm και ΑΓ = 9 cm. Με κέντρο την κορυφή Α και λόγο $\lambda = \frac{2}{3}$ να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του τριγώνου ΑΒΓ και να υπολογίσετε τις πλευρές του.

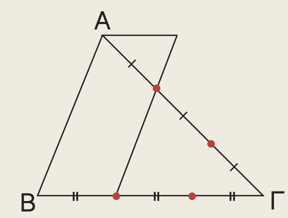
3 Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος με κέντρο ένα οποιοδήποτε σημείο Ο εκτός του τριγώνου και λόγο $\lambda = 3$.
Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του νέου τριγώνου.



4 Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο ενός κύκλου (Ο, ρ) με κέντρο ομοιοθεσίας Ο και λόγο $\lambda = 3$. Να αποδείξετε ότι ο νέος κύκλος θα έχει τριπλάσιο μήκος και εννεαπλάσιο εμβαδόν.

5 Να τοποθετήσετε στο σχήμα τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, Ρ αν γνωρίζετε ότι:

- Το Κ είναι ομοιόθετο του Α με κέντρο Γ και λόγο $\frac{1}{3}$.
- Το Α είναι ομοιόθετο του Λ με κέντρο Κ και λόγο 2.
- Το ΛΜ είναι ομοιόθετο του ΑΒ με κέντρο Γ και λόγο $\frac{2}{3}$.
- Το ΑΒ είναι ομοιόθετο του ΚΝ με κέντρο Γ και λόγο 3.



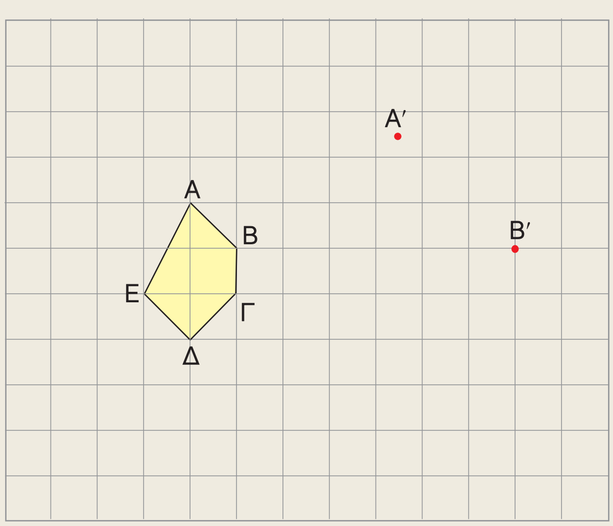
6 Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Κ. Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο 2 και κέντρο ομοιοθεσίας:
α) το σημείο Κ **β)** το σημείο Α **γ)** ένα εξωτερικό σημείο του παραλληλογράμμου.

Να συγκρίνετε τα τρία ομοιόθετα σχήματα και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

7 Σ' ένα τετραγωνισμένο χαρτί να χαράξετε ένα σύστημα αξόνων και να πάρετε τα σημεία Α(–1, 1), Β(2, 2) και Γ(0, –2).
α) Να σχεδιάσετε τρίγωνο Α′Β′Γ′ ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο την αρχή των αξόνων και λόγο $\lambda = 2$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του. Με ποια σχέση συνδέονται οι συντεταγμένες των κορυφών των δύο τριγώνων;
β) Να σχεδιάσετε τρίγωνο Α″Β″Γ″ ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο το σημείο Κ(1, 1), λόγο $\lambda = 2$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του. Ισχύει η ανάλογη σχέση για τις συντεταγμένες των κορυφών αυτών των τριγώνων;

8 Στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ να ορίσετε τα σημεία Δ, Ε αντιστοίχως, ώστε $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι ΔΕ // ΒΓ και $ΔΕ = \frac{1}{3}ΒΓ$.

9 Να κατασκευάσετε το ομοιόθετο του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ στην ομοιοθεσία κατά την οποία τα σημεία Α′, Β′ είναι ομοιόθετα των κορυφών Α, Β αντιστοίχως.

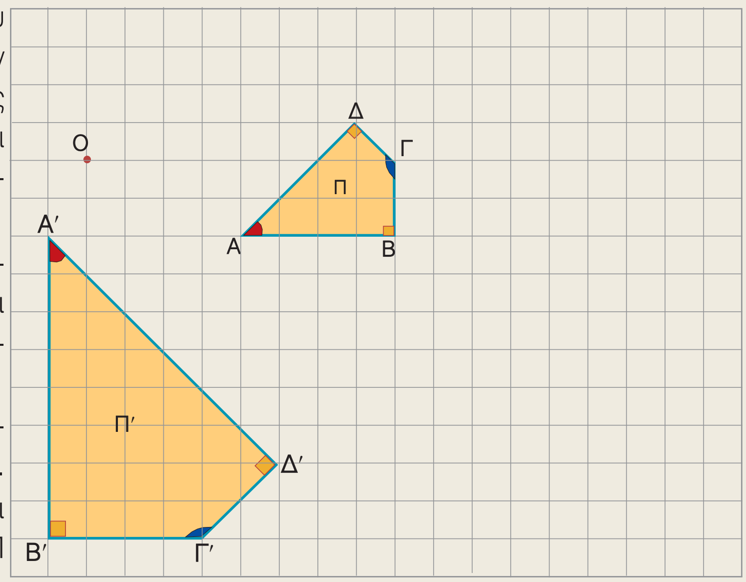


1.5 Ομοιότητα

- ✔ *Μαθαίνω πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια.*
- ✔ *Μαθαίνω πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο διπλανό σχήμα, οι πλευρές του τετραπλεύρου Α′Β′Γ′Δ′ (ή Π′) έχουν διπλάσιο μέγεθος από τις πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (ή Π) και οι αντίστοιχες γωνίες των τετραπλεύρων είναι ίσες.



1. Να σχεδιάσετε το τετράπλευρο Α″Β″Γ″Δ″ (ή Π″) που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και λόγο $\lambda = 2$.
2. Να συγκρίνετε το τετράπλευρο που σχεδιάσατε με το Π′.
3. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τα αρχικά τετράπλευρα Π και Π′;

Α Όμοια πολύγωνα

Αν έχουμε δύο ομοιόθετα πολύγωνα, τότε το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου. Δύο πολύγωνα Π και Π′ που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου τα λέμε **όμοια** και συμβολίζουμε $\Pi \approx \Pi'$. Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι:

Τα ομοιόθετα πολύγωνα είναι όμοια.

Αν όμως ένα πολύγωνο Π′, δεν είναι ομοιόθετο του Π ή δεν είναι εύκολο να εξηγήσουμε ότι είναι ομοιόθετο του Π, τότε πώς μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι είναι όμοιό του;
Ας πάρουμε δύο τετράπλευρα ΑΒΓΔ (ή Π) και Α′Β′Γ′Δ′ (ή Π′), ώστε οι πλευρές του Π′ να είναι διπλάσιες των πλευρών του Π και οι αντίστοιχες γωνίες τους να είναι ίσες. Αν σχεδιάσουμε ένα τετράπλευρο Α″Β″Γ″Δ″ (ή Π″) ομοιόθετο του Π με λόγο $\lambda = 2$, τότε τα τετράπλευρα Π′ και Π″ είναι ίσα, γιατί έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους ίσες. Το Π″ ως ομοιόθετο του Π, με λόγο 2 είναι μεγέθυνση του, άρα και το ίσο του πολυγώνο Π′ είναι μεγέθυνση του Π, οπότε τα τετράπλευρα Π και Π′ είναι όμοια.
Το ίδιο θα συνέβαινε αν το Π′ ήταν σμίκρυνση του Π.
Τα αρχικά τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α′Β′Γ′Δ′ τα σχεδιάσαμε, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = 2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \widehat{A'} = \widehat{A},\ \widehat{B'} = \widehat{B},\ \widehat{\Gamma'} = \widehat{\Gamma},\ \widehat{\Delta'} = \widehat{\Delta} \quad (2)$$

και διαπιστώσαμε ότι είναι όμοια.

Γενικά Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.

Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές ομοίων πολυγώνων έχουν τον ίδιο λόγο $\left(\text{π.χ. } \frac{Α'Β'}{ΑΒ} = 2\right)$, γι' αυτό λέγονται **ομόλογες** και ο λόγος τους λέγεται **λόγος ομοιότητας**.

Είδαμε λοιπόν ότι δύο πολύγωνα είναι όμοια, αν είναι ή μπορεί να γίνουν ομοιόθετα και επομένως θα ισχύουν και γι' αυτά οι ιδιότητες των ομοιοθέτων σχημάτων, δηλαδή:

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Από τη σχέση (1) και γνωστή ιδιότητα των αναλογιών έχουμε:

$$λ = \frac{Α'Β'}{ΑΒ} = \frac{Β'Γ'}{ΒΓ} = \frac{Γ'Δ'}{ΓΔ} = \frac{Δ'Α'}{ΔΑ} = \frac{Α'Β' + Β'Γ' + Γ'Δ' + Δ'Α'}{ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ} = \frac{\text{περίμετρος Π'}}{\text{περίμετρος Π}}.$$ Άρα

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.

Λόγος ομοιότητας – Κλίμακα

Οι χάρτες συνήθως παρουσιάζουν μια γεωγραφική περιοχή σε σμίκρυνση, δηλαδή παρουσιάζουν ένα σχήμα όμοιο με το πραγματικό. Το μέγεθος της σμίκρυνσης καθορίζεται από την κλίμακα του χάρτη που αναγράφεται πάνω σ' αυτόν. Η κλίμακα είναι ο λόγος της απόστασης στο χάρτη προς την αντίστοιχη πραγματική απόσταση, δηλαδή είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο σχημάτων.

Για παράδειγμα κλίμακα 1 : 2000000 σημαίνει ότι, ο λόγος ομοιότητας του σχήματος στο χάρτη προς το πραγματικό είναι $λ = \frac{1}{2000000}$, οπότε 1 cm στο χάρτη είναι 20 km στην πραγματικότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

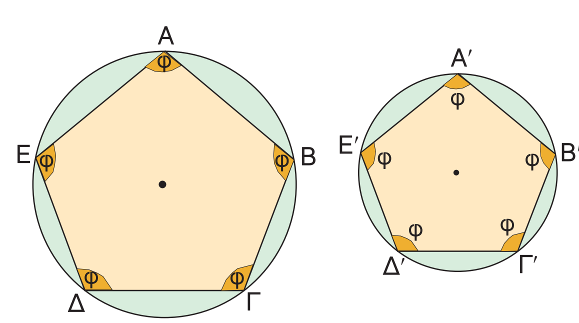
1 **Να αποδειχτεί ότι δύο κανονικά πεντάγωνα είναι όμοια.**

Λύση

Οι πλευρές ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίσες. Άρα τα κανονικά πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α'Β'Γ'Δ'Ε' έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \frac{ΔΕ}{Δ'Ε'} = \frac{ΕΑ}{Ε'Α'}$$

αφού και οι αριθμητές και οι παρονομαστές είναι μεταξύ τους ίσοι.



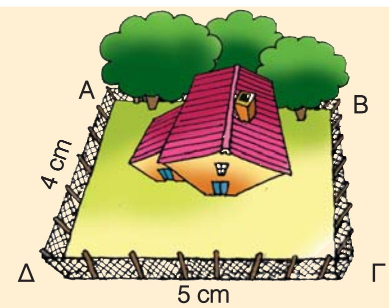
Τα κανονικά πεντάγωνα έχουν και τις γωνίες τους ίσες εφόσον καθεμιά από αυτές είναι $φ = 180° - \frac{360°}{5} = 180° - 72° = 108°$.

Άρα τα κανονικά πεντάγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, οπότε είναι όμοια.

Γενικά

Δύο κανονικά πολύγωνα που έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.

2 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η αεροφωτογραφία ενός αγροκτήματος που έχει σχήμα ορθογωνίου και έχει περιφραχτεί με συρματόπλεγμα μήκους 270 m. Να βρεθούν οι πραγματικές διαστάσεις του αγροκτήματος. Με ποια κλίμακα έχει φωτογραφηθεί το αγρόκτημα;



Λύση

Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ της αεροφωτογραφίας είναι σμίκρυνση του πραγματικού αγροκτήματος Α′Β′Γ′Δ′, οπότε είναι όμοιο προς αυτό.

Άρα ισχύει $\dfrac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \dfrac{ΔΓ}{Δ'Γ'} = λ$ (1).

Ο λόγος ομοιότητας λ είναι ίσος με το λόγο των περιμέτρων τους.
Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι $2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 18$ cm, ενώ του Α′Β′Γ′Δ′ είναι ίση με το μήκος του συρματοπλέγματος, δηλαδή 270 m ή 27000 cm.

Άρα $λ = \dfrac{18}{27000} = \dfrac{1}{1500}$ οπότε $\dfrac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \dfrac{ΔΓ}{Δ'Γ'} = \dfrac{1}{1500}$.

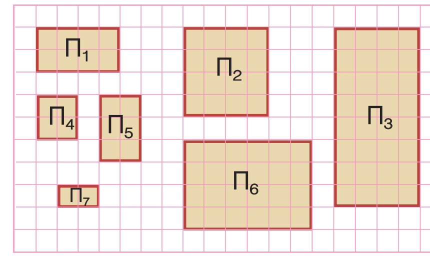
Επομένως έχουμε:
$Α'Δ' = 1500 \cdot ΑΔ = 1500 \cdot 4 = 6000$ cm ή $Α'Δ' = 60$ m.
$Δ'Γ' = 1500 \cdot ΔΓ = 1500 \cdot 5 = 7500$ cm ή $Δ'Γ' = 75$ m.
Δηλαδή, οι πραγματικές διαστάσεις του αγροκτήματος είναι 60 m και 75 m. Η κλίμακα φωτογράφισης είναι ίση με το λόγο ομοιότητας $λ = \dfrac{1}{1500}$ δηλαδή 1 : 1500.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

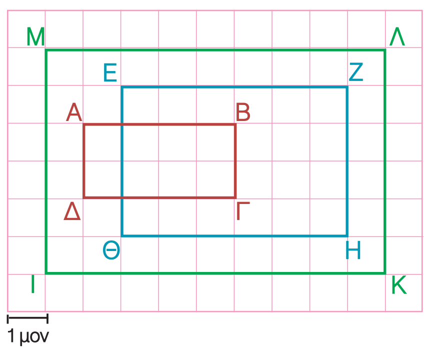
1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Δύο τετράγωνα είναι όμοια. ☐
β) Δύο ορθογώνια είναι όμοια. ☐
γ) Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια. ☐
δ) Δύο ρόμβοι είναι σχήματα όμοια. ☐
ε) Αν δύο πολύγωνα είναι ίσα, τότε είναι όμοια. ☐
στ) Δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια. ☐

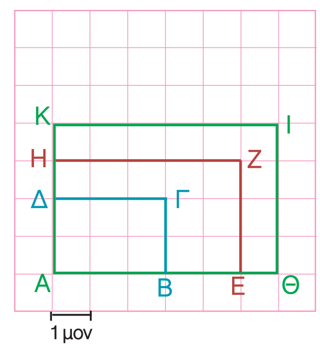
2 Ποια από τα πολύγωνα του διπλανού σχήματος είναι όμοια;



3 Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις διαστάσεις των αντιστοίχων παραλληλογράμμων και να βρείτε ποια απ' αυτά είναι όμοια.

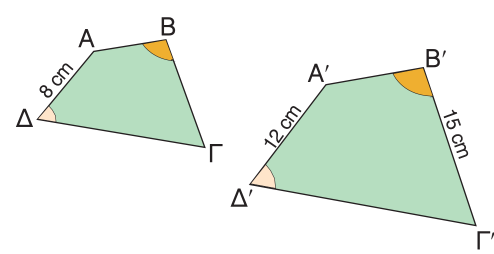


	Διαστάσεις	
ΑΒΓΔ		
ΕΖΗΘ		
ΙΚΛΜ		



	Διαστάσεις	
ΑΒΓΔ		
ΑΕΖΗ		
ΑΘΙΚ		

4 Αν τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α′Β′Γ′Δ′ είναι όμοια, να συμπληρώσετε τις προτάσεις:



α) Ο λόγος ομοιότητας του ΑΒΓΔ προς το Α′Β′Γ′Δ′ είναι ....

β) Ο λόγος ομοιότητας του Α′Β′Γ′Δ′ προς το ΑΒΓΔ είναι ....

γ) Αν η γωνία $\widehat{B}$ είναι 110°, τότε και η γωνία .... είναι 110°.

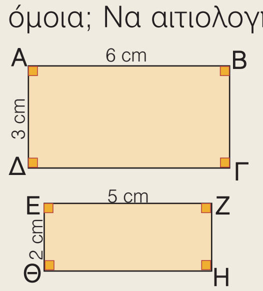
δ) Ο λόγος $\lambda = \dfrac{A'B' + B'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta'A'}{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}$ είναι ίσος με ....

ε) Η πλευρά ΒΓ είναι ίση με .... cm.

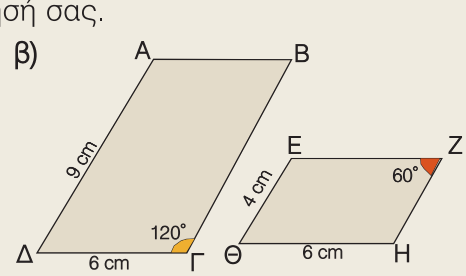
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

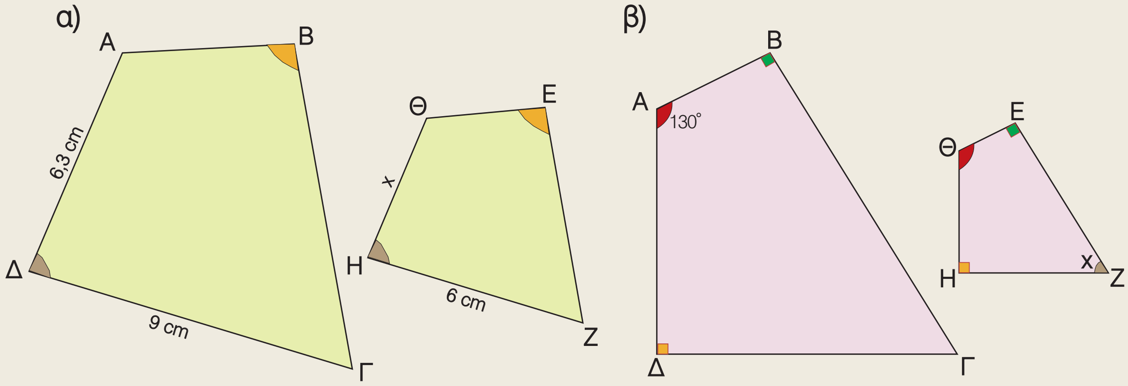
α)



β)



2 Αν τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοια, να βρείτε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:



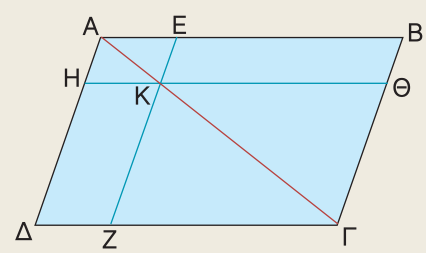
3 Ένα παραλληλόγραμμο έχει πλευρές 24 cm και 18 cm. Ένας μαθητής θέλοντας να κατασκευάσει ένα παραλληλόγραμμο όμοιο μ' αυτό αλλά που να έχει τη μεγαλύτερη πλευρά 20 cm, σκέφτηκε να μειώσει και την άλλη πλευρά κατά 4 cm. Ήταν σωστή η σκέψη του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4 Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που προκύπτει αν ενώσουμε τα μέσα των ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ είναι παραλληλόγραμμο όμοιο με το ΑΒΓΔ.

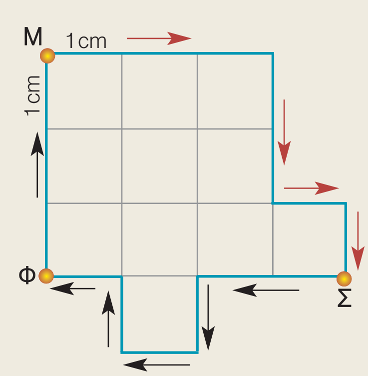
5 Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $ΑΚ = \frac{1}{4}ΑΓ$, ΕΖ // ΑΔ και ΗΘ // ΑΒ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Το παραλληλόγραμμο ΑΕΚΗ είναι όμοιο με το ΑΒΓΔ.

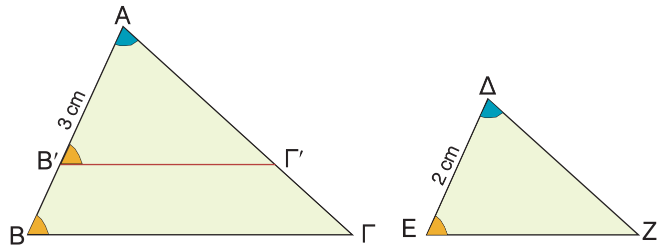
β) Το παραλληλόγραμμο ΑΕΚΗ είναι όμοιο με το ΚΘΓΖ.



6 Ένας μαθητής ξεκίνησε το πρωί από το σπίτι του Μ και αφού ακολούθησε τη διαδρομή που φαίνεται στο σχέδιο, έφτασε στο σχολείο του Σ. Το μεσημέρι επέστρεψε σπίτι του από άλλο δρόμο προκειμένου να περάσει και από το σπίτι ενός φίλου του που βρισκόταν στο σημείο Φ. Αν η συνολική διαδρομή που έκανε ο μαθητής ήταν 640 m, να βρείτε πόσο απέχουν τα σπίτια των δύο φίλων. Ποια είναι η κλίμακα του σχεδίου;



Β Όμοια τρίγωνα



Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, όπως και δύο πολύγωνα, είναι όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Δηλαδή αν έχουν $\frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{ΑΓ}{ΔΖ} = \frac{ΒΓ}{ΕΖ}$ και $\hat{Α} = \hat{Δ}$, $\hat{Β} = \hat{Ε}$, $\hat{Γ} = \hat{Ζ}$.

Για να είναι λοιπόν δύο τρίγωνα όμοια πρέπει να ισχύουν όλες οι προηγούμενες ισότητες; Ευτυχώς όχι.

Για παράδειγμα, ας πάρουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ που έχουν δύο γωνίες τους ίσες ($\hat{Α} = \hat{Δ}$ και $\hat{Β} = \hat{Ε}$).

Αν τοποθετήσουμε το τρίγωνο ΔΕΖ πάνω στο ΑΒΓ, ώστε η γωνία $\hat{Δ}$ να συμπέσει με την ίση της γωνία $\hat{Α}$, τότε η πλευρά ΕΖ θα συμπέσει με τη Β′Γ′ και οι γωνίες $\hat{Β}$, $\hat{Β}'$ θα είναι ίσες. Άρα Β′Γ′ // ΒΓ και από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{ΑΒ'}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ'}{ΑΓ} = \frac{2}{3} \quad ή \quad ΑΒ' = \frac{2}{3} \cdot ΑΒ \quad και \quad ΑΓ' = \frac{2}{3} \cdot ΑΒ$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒ′Γ′ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ στην ομοιοθεσία με κέντρο Α και λόγο $\frac{2}{3}$, οπότε ΑΒ′Γ′ ≈ ΑΒΓ. Επειδή τα τρίγωνα ΔΕΖ, ΑΒ′Γ′ είναι ίσα, θα είναι και ΔΕΖ ≈ ΑΒΓ.

Επομένως

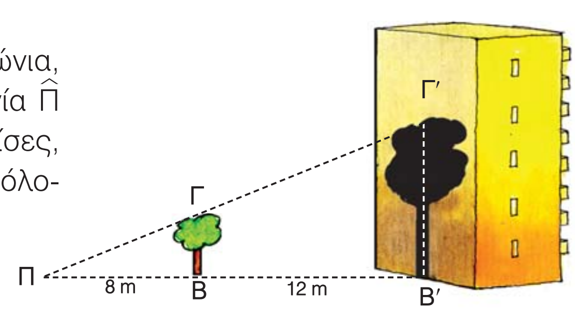
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Είδαμε λοιπόν, ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια, οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Ένας προβολέας Π βρίσκεται στο έδαφος και φωτίζει ένα δέντρο ΒΓ. Η σκιά του δέντρου στο απέναντι κτίριο φτάνει μέχρι την οροφή του 4ου ορόφου. Αν το ισόγειο και κάθε όροφος έχουν ύψος 3 m και η απόσταση του δέντρου από τον προβολέα είναι 8 m, ενώ από το κτίριο είναι 12 m, να βρεθεί το ύψος του δέντρου.**

Λύση



Τα τρίγωνα ΠΒΓ και ΠΒ′Γ′ είναι ορθογώνια, αφού $\hat{Β} = \hat{Β}' = 90°$ και έχουν τη γωνία $\hat{Π}$ κοινή. Επομένως, έχουν δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή

$$\frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΠΒ}{ΠΒ'} \quad (1).$$

(220-224) 3-11-06 11:46 ™ÂÏ›‰·221

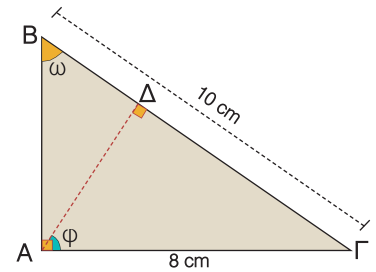
Η σκιά καλύπτει το ισόγειο και 4 ορόφους, οπότε θα έχει ύψος $Β'Γ' = 5 \cdot 3 = 15$ m. Άρα η ισότητα *(1)* γίνεται $\frac{ΒΓ}{15} = \frac{8}{8+12}$ ή $20 \cdot ΒΓ = 120$, οπότε το ύψος του δέντρου είναι $ΒΓ = 6$ m.

2 **Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 10 cm και ΑΓ = 8 cm να χαραχθεί το ύψος ΑΔ. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια και να γραφούν οι ίσοι λόγοι. Να υπολογιστούν τα τμήματα ΔΓ και ΔΒ.**

Λύση

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ορθογώνια, αφού $\widehat{Α} = \widehat{Δ} = 90^\circ$ και έχουν τη γωνία $\widehat{Γ}$ κοινή. Δηλαδή, έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των τριγώνων είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους.

Ίσες γωνίες	$\widehat{Α} = \widehat{Δ} = 90^\circ$	$\widehat{Γ}$ κοινή	$\widehat{ω} = \widehat{φ}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΒ	ΑΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΓ	ΑΓ	ΑΔ	ΔΓ



Άρα έχουμε $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΓ}{ΔΓ}$ *(1)*.

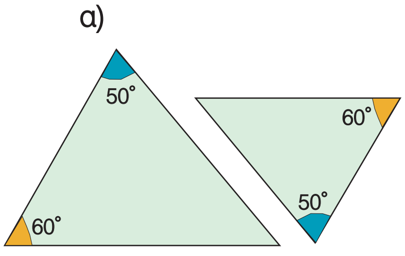
Από τις ισότητες (1) έχουμε $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΔΓ}$ ή $\frac{10}{8} = \frac{8}{ΔΓ}$.

Άρα $10 \cdot ΔΓ = 64$, οπότε $ΔΓ = 6{,}4$ cm. Επειδή $ΒΓ = 10$ cm και $ΔΓ = 6{,}4$ cm έχουμε $ΒΔ = 10 - 6{,}4$ δηλαδή $ΒΔ = 3{,}6$ cm.

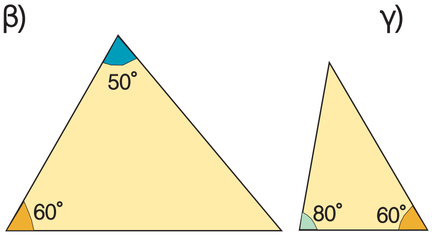
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια;

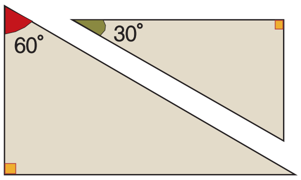
α)



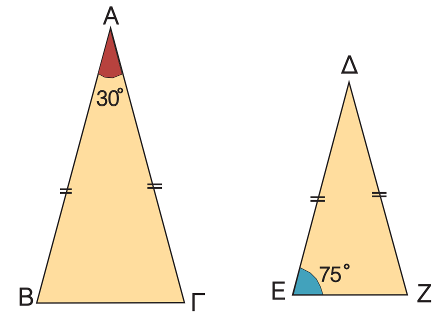
β)



γ)

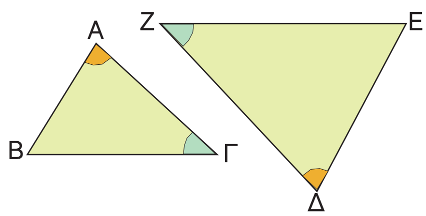


2 Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι όμοια.

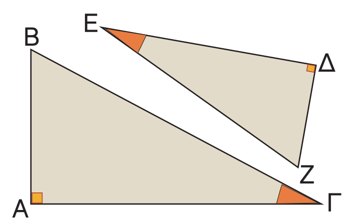


3 Να γράψετε τους ίσους λόγους στα παρακάτω ζεύγη των ομοίων τριγώνων.

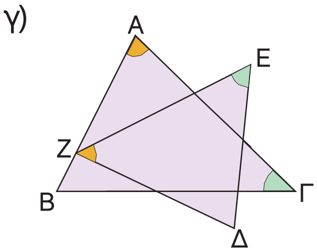
α)



β)



γ)



—— = —— = ——   —— = —— = ——   —— = —— = ——

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια. ☐

β) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία ίση, είναι όμοια. ☐

γ) Δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. ☐

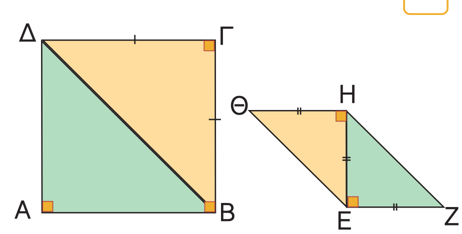
δ) Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια. ☐

ε) Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν μία γωνία 40˚, είναι όμοια. ☐

στ) Ο λόγος των περιμέτρων δύο ομοίων τριγώνων, είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους. ☐

5 α) Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΖΗ είναι όμοια.

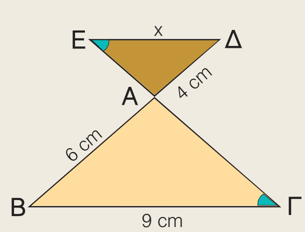
β) Αν δύο πολύγωνα αποτελούνται από τον ίδιο αριθμό ομοίων τριγώνων, είναι πάντοτε όμοια;



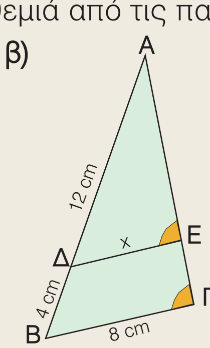
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

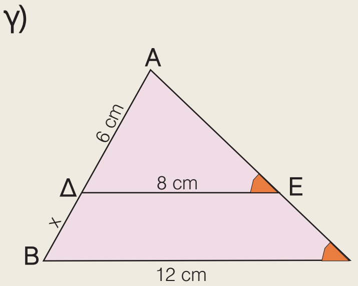
α)



β)



γ)



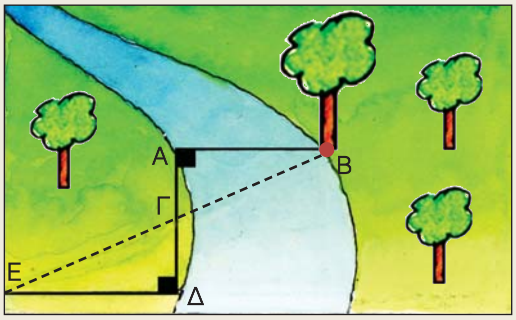
2 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90^\circ$) και ΑΔ το ύψος του. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι όμοια. Αν ΔΒ = 4 cm και ΔΓ = 9 cm, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΑΔ.

3 Στις κάθετες πλευρές ΑΒ = 8 cm και ΑΓ = 12 cm ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε αντιστοίχως τα σημεία Δ και Ε, ώστε ΑΔ = 2 cm και ΑΕ = 3 cm. Να αποδείξετε ότι:

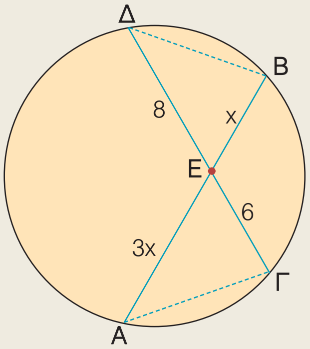
α) ΔΕ // ΒΓ

β) τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΒΓ είναι όμοια.

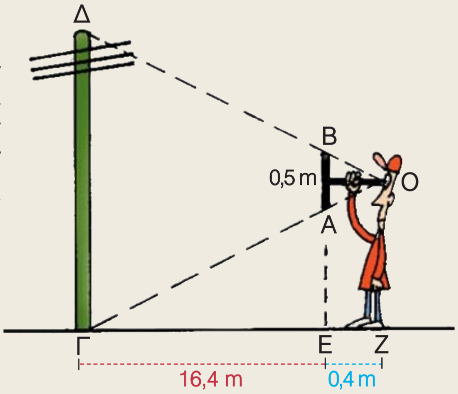
4 Να βρείτε το πλάτος ΑΒ του ποταμού, αν ΑΓ = 12 m, ΓΔ = 28,8 m, ΕΔ = 60 m και $\widehat{Α} = \widehat{Δ} = 90^\circ$.



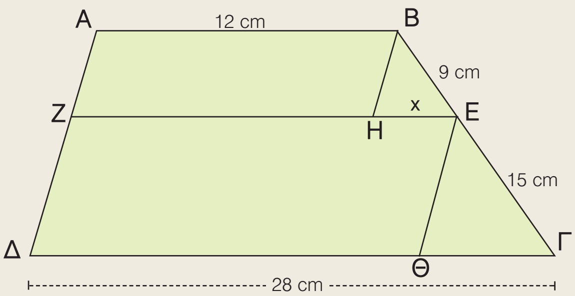
5 Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ, ΒΕΔ είναι όμοια και να υπολογίσετε το x.



6 Μπροστά στο μάτι μας και σε απόσταση 0,4 m κρατάμε κατακόρυφα ένα ραβδί ΑΒ = 0,5 m. Αν μετακινηθούμε και σταθούμε σε ένα σημείο Ζ τέτοιο, ώστε οι ευθείες ΟΑ, ΟΒ να καταλήγουν στη βάση και στην κορυφή της κεραίας ενός ραδιοφωνικού σταθμού, διαπιστώνουμε ότι η απόστασή μας από την κεραία είναι ΓΖ = 16,8 m. Μπορείτε να υπολογίσετε το ύψος της κεραίας;

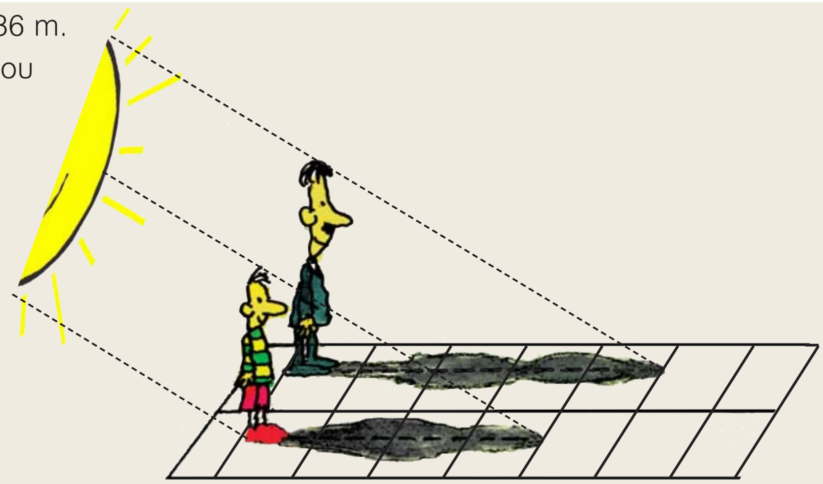


7 Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ΕΖ // ΔΓ, ΒΗ // ΑΔ και ΕΘ // ΑΔ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΗΕ, ΕΘΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το x.



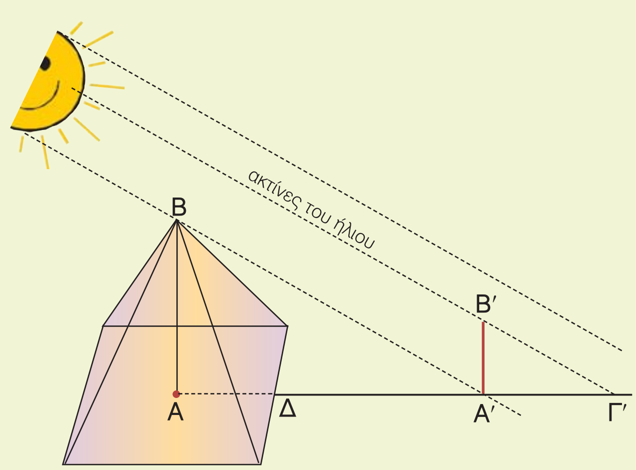
(220-224) 3-11-06 11:46 ™ÂÏ›‰·224

8 Ο γιος έχει ύψος 1,36 m. Ποιο είναι το ύψος του πατέρα του;



ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η θεωρία των ομοίων σχημάτων ήταν γνωστή από τα μέσα του 7ου αιώνα π.Χ. Με τη βοήθεια της θεωρίας αυτής ο **Θαλής ο Μιλήσιος** (624 - 547 π.Χ.), ένας από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας, κατόρθωσε να υπολογίσει το ύψος της μεγάλης πυραμίδας του Χέοπος από το μήκος της σκιάς της, αποσπώντας το θαυμασμό του βασιλιά της Αιγύπτου, του Άμασι.
Δε γνωρίζουμε ακριβώς τις τεχνικές που χρησιμοποίησε ο Θαλής σ' αυτό το επίτευγμά του. Ο Πλούταρχος, ωστόσο, μας διηγείται τα εξής:



«Αφού έστησε το ραβδί του ο Θαλής στο τέλος της σκιάς της πυραμίδας από τα δύο όμοια τρίγωνα που προκύπτουν από την επαφή της ακτίνας του ήλιου, απέδειξε ότι ο λόγος που είχε η σκιά της πυραμίδας προς τη σκιά της ράβδου ήταν ο ίδιος με το λόγο που είχε το ύψος της πυραμίδας προς το μήκος της ράβδου».

Ο Διογένης ο Λαέρτιος, μάλιστα, ισχυρίζεται ότι ο Θαλής μέτρησε τη σκιά της πυραμίδας, όταν το μήκος της ράβδου έγινε ίσο με το μήκος της σκιάς της.

Μπορείτε να εξηγήσετε, πώς ο Θαλής υπολόγισε τελικά το ύψος της πυραμίδας, αφού μπορούσε να μετρήσει το μήκος της πλευράς της τετραγωνικής βάσης της πυραμίδας και της σκιάς ΔΑ′;

1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

✔ *Μαθαίνω τη σχέση που συνδέει τα εμβαδά ομοίων πολυγώνων.*

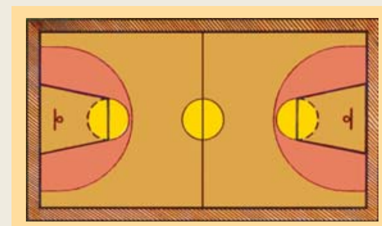
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας μηχανικός σχεδίασε ένα γήπεδο μπάσκετ με κλίμακα 1 : 50. Το σχέδιο είχε διαστάσεις 60 cm x 30 cm.

1. Να υπολογίσετε τις πραγματικές διαστάσεις του γηπέδου.

2. Να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του σχεδίου προς το αντίστοιχο εμβαδό του γηπέδου.

3. Να συγκρίνετε το λόγο που βρήκατε με το τετράγωνο της κλίμακας του σχεδίου.

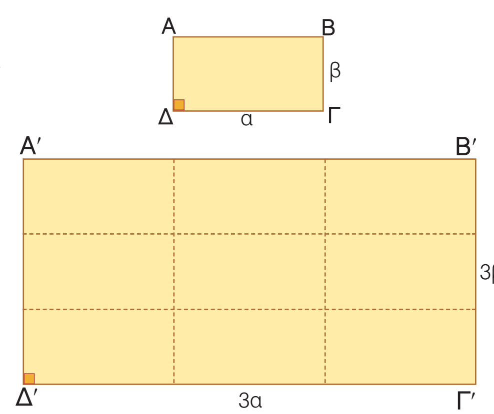


Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις α, β. Αν σχεδιάσουμε και το ορθογώνιο Α′Β′Γ′Δ′ με τριπλάσιες διαστάσεις, τότε το ορθογώνιο αυτό είναι όμοιο προς το αρχικό με λόγο ομοιότητας $\lambda = 3$. Τα εμβαδά Ε′, Ε των δύο ορθογωνίων είναι:

$$E' = 3\alpha \cdot 3\beta \;\; \text{και} \;\; E = \alpha \cdot \beta$$

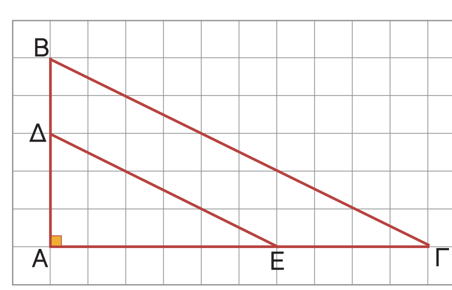
οπότε ο λόγος τους είναι:

$$\frac{E'}{E} = \frac{3\alpha \cdot 3\beta}{\alpha \cdot \beta} = 3^2$$



Παρατηρούμε λοιπόν ότι, ο λόγος των εμβαδών των ομοίων αυτών ορθογωνίων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Ομοίως, αν στις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ πάρουμε τα σημεία Δ, Ε αντιστοίχως, ώστε $ΑΔ = \frac{3}{5}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{3}{5}ΑΓ$, τότε σχηματίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ, που είναι ομοιόθετο του ΑΒΓ με κέντρο ομοιοθεσίας Α και λόγο $\frac{3}{5}$. Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{5}$.



Για τα εμβαδά (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) των ομοίων αυτών τριγώνων ισχύει:

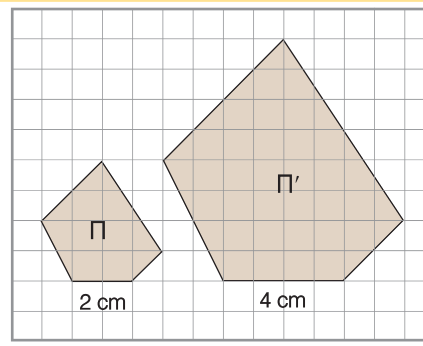
$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot ΑΔ \cdot ΑΕ}{\frac{1}{2} \cdot ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \cdot \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο λόγος των εμβαδών των ομοίων τριγώνων ΑΔΕ, ΑΒΓ είναι και πάλι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Γενικά

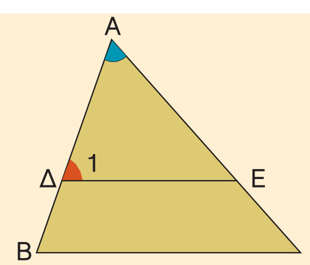
Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Για παράδειγμα, στο διπλανό σχήμα το πολύγωνο (Π) είναι όμοιο με το πολύγωνο (Π′) και δύο ομόλογες πλευρές τους είναι 2 cm και 4 cm αντιστοίχως. Ο λόγος ομοιότητας του (Π) προς το (Π′) είναι $\lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, οπότε για τα εμβαδά τους Ε και Ε′ ισχύει $\frac{E}{E'} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Στην πλευρά ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε $ΑΔ = \frac{2}{3}ΑΒ$. Από το Δ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 18 cm², να βρεθεί το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΕΓΒ.



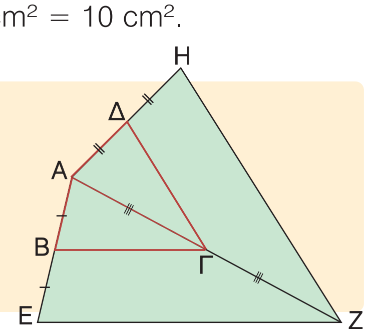
Λύση

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν τη γωνία $\hat{Α}$ κοινή και $\hat{Δ}_1 = \hat{Β}$, γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Δηλαδή, τα τρίγωνα αυτά έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$. Άρα για τα εμβαδά (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) ισχύει

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad ή \quad \frac{(ΑΔΕ)}{18} = \frac{4}{9} \quad ή \quad (ΑΔΕ) = 8 \text{ cm}^2.$$

Το τραπέζιο ΔΕΓΒ έχει εμβαδόν (ΔΕΓΒ) = 18 cm² – 8 cm² = 10 cm².

2 Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τις ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ κατά ίσα τμήματα και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΑΕΖΗ. Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΖΗ από το εμβαδόν του ΑΒΓΔ;



Λύση

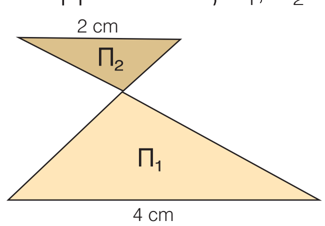
Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο Α και λόγο 2.

Άρα ΑΕΖΗ ≈ ΑΒΓΔ, οπότε $\frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΑΕΖΗ)} = \left(\frac{ΑΒ}{ΑΕ}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

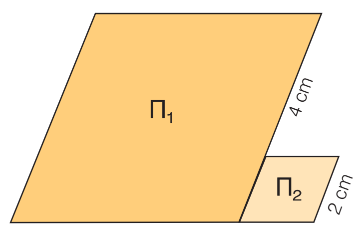
Επομένως, (ΑΕΖΗ) = 4(ΑΒΓΔ), δηλαδή το τετράπλευρο ΑΕΖΗ έχει τετραπλάσιο εμβαδόν από το τετράπλευρο ΑΒΓΔ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

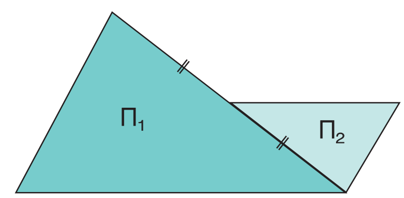
1 Αν τα πολύγωνα $Π_1$, $Π_2$ είναι όμοια, να συμπληρώσετε τη σχέση που συνδέει τα εμβαδά τους $Ε_1$, $Ε_2$.



$Ε_1 = ...Ε_2$



$Ε_1 = ...Ε_2$



$Ε_1 = ...Ε_2$

2 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

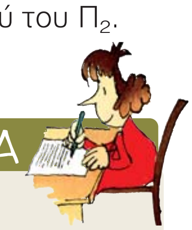
α) Αν τριπλασιάσουμε κάθε πλευρά ενός τετραγώνου, τότε το εμβαδόν του γίνεται .... φορές μεγαλύτερο.

β) Αν διπλασιάσουμε κάθε πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου, τότε το εμβαδόν του γίνεται .... φορές μεγαλύτερο.

γ) Αν ένας ρόμβος έχει πλευρά 6 cm και ένας άλλος όμοιός του ρόμβος έχει πλευρά 3 cm, τότε ο δεύτερος ρόμβος έχει εμβαδόν .... φορές μικρότερο από το εμβαδόν του πρώτου ρόμβου.

3 Ένα ορθογώνιο $Π_1$ είναι όμοιο με το ορθογώνιο $Π_2$ με λόγο ομοιότητας $\frac{2}{5}$.

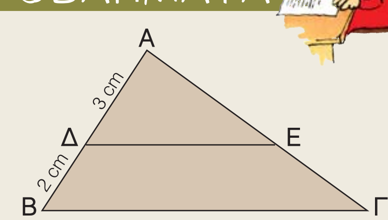
Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι το εμβαδόν του $Π_1$ είναι το 16% του εμβαδού του $Π_2$. Έχει δίκιο;



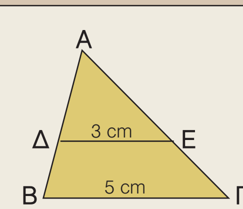
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ // ΒΓ.

Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$



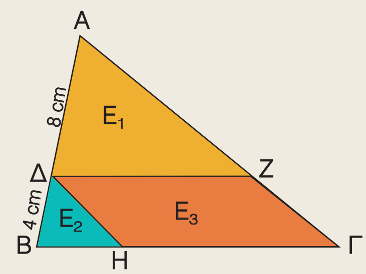
2 Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ // ΒΓ.
Αν το τρίγωνο ΑΔΕ έχει εμβαδόν 18 cm^2, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



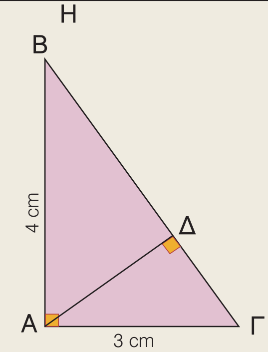
3 Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ = 1 cm και ΓΔ = 5 cm, οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο. Να υπολογίσετε πόσες φορές το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΔ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

4 Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ αντιστοίχως, τότε να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\dfrac{(ΑΖΕ)}{(ΑΒΓ)}$ **β)** $\dfrac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)}$

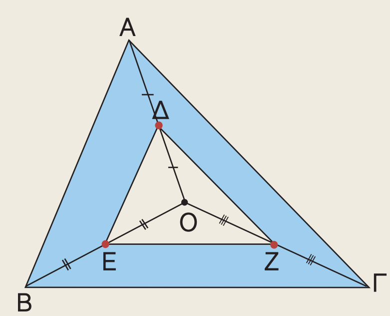


5 Αν Ε είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, ΔΖ // ΒΓ και ΔΗ // ΑΓ, τότε να αποδείξετε ότι για τα εμβαδά E_1, E_2, E_3 ισχύουν: $E_1 = \dfrac{4}{9}E$, $E_2 = \dfrac{1}{9}E$ και $E_3 = E_1$.



6 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να φέρετε το ύψος ΑΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\dfrac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)}$ **β)** $\dfrac{(ΑΒΔ)}{(ΑΒΓ)}$



7 Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε τυχαίο σημείο Ο. Αν Δ, Ε, Ζ είναι αντιστοίχως τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, τότε να αποδείξετε ότι:

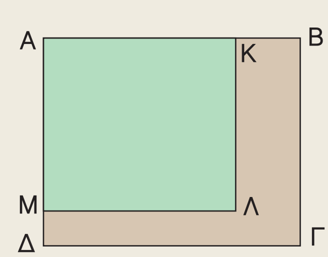
α) το τρίγωνο ΔΕΖ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

β) το εμβαδόν της χρωματισμένης επιφάνειας είναι ίσο με τα $\dfrac{3}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

8 Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 40 cm^2. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου που θα προκύψει, αν φωτοτυπηθεί:

α) μεγέθυνση 120% **β)** σμίκρυνση 75%.

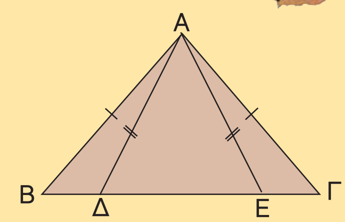
9 Αν κάθε πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 30%, τότε να βρείτε πόσο % θα αυξηθεί το εμβαδόν του.



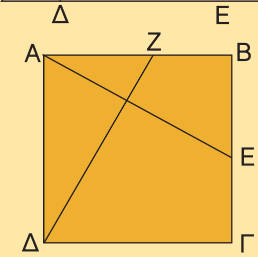
10 Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου οικοπέδου μειώθηκαν κατά 20%, γιατί αυξήθηκε το πλάτος των διπλανών δρόμων. Να βρείτε πόσο % μειώθηκε το εμβαδόν του οικοπέδου.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελή, να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.



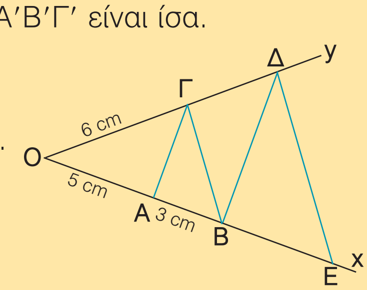
2 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ζ, Ε των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντιστοίχως, τέτοια ώστε ΑΖ = ΒΕ. Να αποδείξετε ότι: **α)** ΔΖ = ΑΕ **β)** ΔΖ ⊥ ΑΕ.



3 Σε ευθεία ε να πάρετε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ. Προς το ίδιο μέρος της ευθείας να κατασκευάσετε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΖ και ΒΓΗ. Να αποδείξετε ότι ΑΗ = ΓΖ.

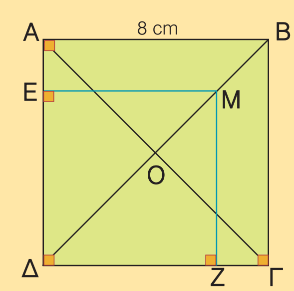
4 Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ΒΓ = Β′Γ′, $\hat{B} = \hat{B}'$ και οι διχοτόμοι ΒΜ και Β′Μ′ είναι ίσες. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.

5 Στο διπλανό σχήμα είναι ΒΔ // ΑΓ και ΔΕ // ΓΒ.
α) Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΔ και ΟΕ.
β) Να αποδείξετε ότι $OB^2 = OA \cdot OE$.

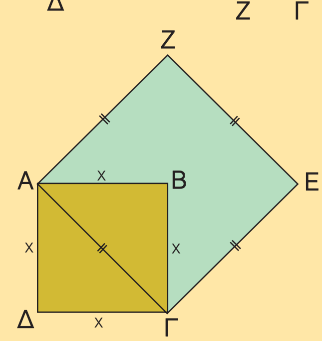


6 Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 6 cm. Να βρείτε την πλευρά ενός άλλου ισοπλεύρου τριγώνου που έχει διπλάσιο εμβαδόν.

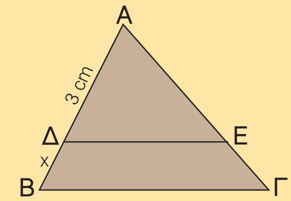
7 Οι διαγώνιοι τετραγώνου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Ο. Από το μέσον Μ του ΟΒ να φέρετε ΜΕ ⊥ ΑΔ και ΜΖ ⊥ ΓΔ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΜΕΔΖ.



8 Με πλευρά τη διαγώνιο ΑΓ, τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς x, να σχηματίσετε το τετράγωνο ΑΓΕΖ.
α) Να υπολογίσετε το λόγο $\dfrac{(ΑΓΕΖ)}{(ΑΒΓΔ)}$.
β) Αν (ΑΓΕΖ) = 200 cm^2, να υπολογίσετε την πλευρά x.

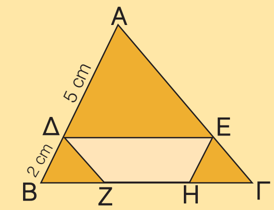


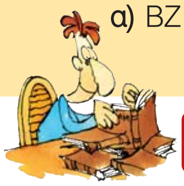
9 Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ΔΕ // ΒΓ και (ΑΔΕ) $= \frac{9}{16}$(ΑΒΓ). Να υπολογίσετε το x.



10 Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ΔΕ // ΒΓ, ΔΖ // ΑΓ και ΕΗ // ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΖ = ΓΗ **β)** (ΔΕΗΖ) $= \frac{16}{49} \cdot$ (ΑΒΓ)





ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Α. ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

- **Ίσα τρίγωνα** λέγονται τα τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- **Κριτήρια ισότητας τριγώνων.** Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:
  - Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση (Π – Γ – Π).
  - Μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (Γ – Π – Γ).
  - Τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (Π – Π – Π).
- **Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.** Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:
  - Δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία.
  - Μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

Β. ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ – ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

- Παράλληλες ευθείες, αν ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.
- **Λόγος** ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι ο αριθμός λ για τον οποίο ισχύει ΓΔ = λ · ΑΒ.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι **ανάλογα** προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ, όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.
- **Θεώρημα Θαλή.** Τρεις ή περισσότερες ευθείες, αν τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη.

Γ. ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ – ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

- **Ομοιόθετο ενός σημείου Α** ως προς το κέντρο Ο και λόγο λ ονομάζεται το σημείο Α′ της ημιευθείας ΟΑ για το οποίο ισχύει ΟΑ′ = λ · ΟΑ.
- Τα **ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα** που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα.
- Οι **ομοιόθετες γωνίες** είναι ίσες.
- Δύο **ομοιόθετα πολύγωνα** έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- **Όμοια πολύγωνα** λέγονται τα πολύγωνα που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.
- Δύο πολύγωνα είναι όμοια, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και αντιστρόφως.
- Τα ομοιόθετα πολύγωνα είναι όμοια.
- Δύο τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.
- Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε:
  - Ο λόγος των περιμέτρων τους είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.
  - Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.