Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Μαλβίνα Παπαδάκη
Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Αθηνών
Καλλιδρομίου 64, 114 73 Αθήνα
mp@power.ece.ntua.gr

Στάμη Τσικοπούλου
3ο Ενιαίο Λύκειο Δάφνης
Απόλλωνος 42, 16343 Ηλιούπολη
stsikop@istos.zzn.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή γίνεται μία καταγραφή των αποδείξεων στα βιβλία των Μαθηματικών Α. Αλιμπινίση κ.α., Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου, εκδ. ΟΕΔΒ, τα οποία διδάσκονται από το 1987 έως σήμερα στα Γυμνάσια. Η σειρά αυτή των βιβλίων, αντικατέστησε τα προηγούμενα, τα οποία ήταν σύμφωνα με τα Νέα Μαθηματικά, ακολουθούσαν την αυστηρή μαθηματική ορολογία και ήταν προσηλωμένα στο συμβολισμό. Μετά από 15 χρόνια συνεχούς διδασκαλίας τους μπορεί να θεωρηθεί ότι ολοκλήρωσαν τον κύκλο τους και επομένως μπορούν να τεθούν υπό κριτική θεώρηση. Στην εργασία αυτή, αφού καταγραφούν οι αποδείξεις και η εν γένει διαπίστωση συλλογισμών, γίνεται προσπάθεια να καταταγούν αυτά στις τρεις γενικές κατηγορίες: *Διαισθητική – ενορατική, επαγωγική, παραγωγική απόδειξη*. Για κάθε ένα από είδη αυτά, παρουσιάζονται εν συνεχεία τα όρια και τα προβλήματα που μπορεί να δημιουργηθούν από τυχόν κατάχρησή του. Από την καταγραφή αυτή, φαίνεται ότι, η διαισθητική και επαγωγική απόδειξη κυριαρχεί στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου. Φαίνεται, δηλαδή, ότι η χρήση συγκεκριμένων παραδειγμάτων – περιπτώσεων, οι μετρήσεις με υποδεκάμετρο, η χρησιμοποίηση του διαφανούς χαρτιού, έχουν σχεδόν αποκλειστικά αντικαταστήσει την διαδικασία επιχειρημάτων και παραγωγικών συλλογισμών. Αποσπασματικά, στριμωγμένες στο τέλος κυριολεκτικά του βιβλίου, χωρίς ιδιαίτερη αξιολόγηση και έμφαση, παραθετικά, υπάρχουν άτακτα σκορπισμένες και μερικές αποδείξεις. Ακολούθως, υποστηρίζονται οι λόγοι της αξίας της παραγωγικής απόδειξης και σε επίπεδο Γυμνασίου και γενικότερα η αξία της διδασκαλίας της παραγωγής συλλογισμών και επιχειρημάτων. Θεωρείται ότι είναι χρήσιμα και απαραίτητα και τα τρία είδη των αποδείξεων σε επίπεδο σχολικής τάξης. Όμως, η παραγωγική απόδειξη είναι εκείνη η οποία νομιμοποιεί τις εικασίες που έχουν προηγηθεί, και μπορεί να εγγυηθεί την αλήθεια ενός συλλογισμού, γενικά και όχι μόνο σε μια συγκεκριμένη περίπτωση. Τέλος, εξηγείται, γιατί, οι νέες τεχνολογίες δεν μπορεί να εξοβελίσουν την απόδειξη, η οποία, παρά τις δυσκολίες, παραμένει ένα πολύτιμο διδακτικό εργαλείο.

1. Εισαγωγή

Τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου (πρώτη έκδοση, Αλιμπινίσης κ.α., 1987), αντικατέστησαν τα βιβλία που ακολουθούσαν την φιλοσοφία και τους στόχους των Νέων Μαθηματικών, που από τη δεκαετία του 60 κυριάρχησαν, με μικρές διαφορές σε όλο τον δυτικό κόσμο. Τα Νέα Μαθηματικά υπάκουαν σε μια αντίληψη, που τα χρόνια 78-81 καταγράφηκε με τον όρο «φορμαλισμός» και τα χαρακτήριζε η προσκόλληση σε αυστηρά μαθηματική ορολογία και την εμμονή στον συμβολισμό αφού στηρίζονταν στην υπόθεση πως «αν ο μαθητής κατανοήσει την εσωτερική δομή των μαθηματικών, τότε κατάλαβε «μαθηματικά»». Ήταν επομένως θεμιτό στα πλαίσια αυτής της προσέγγισης, ο ορισμός του αθροίσματος δύο φυσικών αριθμών να δίνεται ως ο πληθάριθμος της ένωσης δύο συνόλων!

Στις αρχές της δεκαετίας του 80 ξεκίνησε στην Ελλάδα, μία διαδικασία αντικατάστασης των Νέων Μαθηματικών με την εκπόνηση νέου Αναλυτικού Προγράμματος και νέων σχολικών βιβλίων. Τα βιβλία αυτά, που από το 1987 διδάσκονται μέχρι και σήμερα στα Γυμνάσια, προσπάθησαν να απαλλαγούν από τον «φορμαλισμό», μεταφέροντας και πάλι την τάση που ακολούθησαν τα σχολικά βιβλία των περισσότερων χωρών (Αγγλία, Γαλλία κτλ), την ίδια περίοδο. Σήμερα, μετά από15 χρόνια συνεχούς διδασκαλίας τους, μπορεί να πει κανείς πως δεν αποφεύγουν να πέσουν σε μια άλλη υπερβολή πως υποκύπτουν σε μια εμπειρικίστικη αντίληψη της επιστήμης και των Μαθηματικών με την συρρίκνωση της θεωρητικής σκέψης, την αποφυγή αποδείξεων και συλλογισμών. Η άποψη των σχολικών βιβλίων του Γυμνασίου, φαίνεται να είναι κυρίως η εποπτική θεμελίωση των μαθηματικών εννοιών και σχέσεων (οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία, Π.Ι.).

Οι ίδιοι οι συγγραφείς των βιβλίων, εξηγούν ότι η απόδειξη πρέπει να παρουσιάζεται μόνο εκεί που έχει νόημα, εκεί που το αποτέλεσμα είναι «μάλλον απροσδόκητο» και δεν φαίνεται με μια πρώτη ματιά (Κλαουδάτος). Ομολογούν, δηλαδή πως ότι φαίνεται να είναι δεν χρειάζεται να δικαιολογηθεί πως είναι. Ισχυρίζονται, ακόμα, οι συγγραφείς, πως, «οι μαθητές πρέπει να χειρίζονται τα όργανα, να κάνουν μετρήσεις και να βγάζουν από αυτές τα όποια συμπεράσματα. Σε λίγες, μόνο επιλεγμένες περιπτώσεις, είναι απαραίτητες οι αποδείξεις». Κάτι τέτοιο πολύ συχνά δημιουργεί απορίες στους μαθητές, για την αναγκαιότητα και αυτών των λίγων αποδείξεων. Αφού και αυτό φαίνεται να είναι έτσι, γιατί τώρα χρειάζεται να αποδειχθεί; Τέλος, μόνοι τους οι συγγραφείς, φαίνεται σαν να απολογούνται, σαν να θέλουν να προκαταλάβουν τον αντίλογο. «Πρέπει να τονίσω ότι ένα είδος εμπειρισμού που μπορεί να διαπιστώσει ο αναγνώστης, με κανένα τρόπο δεν αποτελεί βασική φιλοσοφική γραμμή της συγγραφής» (Κλαουδάτος, 1987 -88). Σπεύδουν, δε, να προσθέσουν, ότι, «από τις πρώτες σελίδες κιόλας εισάγεται η έννοια της μεταβλητής», ώστε με την παραχώρηση στην αυστηρότητα να δικαιολογήσουν την έκπτωση στα επιχειρήματα και τους συλλογισμούς.

Στην συνέχεια της εργασίας αυτής θα παρουσιάσουμε τις αποδείξεις που περιέχονται στα βιβλία των Μαθηματικών που διδάσκονται στο Γυμνάσιο. Σημειώνουμε ότι μια σχετική ταξινόμηση και καταγραφή σε κατηγορίες της απόδειξης που απαντάται στα βιβλία των σχολικών Μαθηματικών υπάρχει στο Hanna, G, 1999

2. Είδη απόδειξης

Οι κύριοι τύποι των συλλογισμών και άρα της απόδειξης, πολύ γενικά και επιγραμματικά, μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρεις κατηγορίες:

Τη **διαισθητική (ενορατική)** απόδειξη, την **επαγωγική** απόδειξη και την **παραγωγική** απόδειξη. (Baroody, 1993)

Με τον όρο ***διαισθητική (ενορατική)* απόδειξη**, νοείται η ξαφνική σύλληψη της αλήθειας, σαν έμπνευση, χωρίς την παρέμβαση της λογικής, χωρίς, δηλαδή, την λογική απόδειξή της. Για παράδειγμα, μπορεί να μην έχουμε όλες τις αναγκαίες πληροφορίες για να πάρουμε μια απόφαση, για να καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα, οπότε βασιζόμαστε σε κάτι που φαίνεται προφανές ή στηριζόμαστε στις αισθήσεις μας. Π.χ. αποφασίζουμε αν θα σταθούμε στην ουρά του ταμείου Α ή Β μιας Τράπεζας, γιατί μας φαίνεται να προχωρά πιο γρήγορα.

Με τον όρο ***επαγωγική* απόδειξη**, ορίζεται η απόδειξη, όταν κάνει χρήση μιας κανονικότητας. Κατά την επαγωγική απόδειξη, βρίσκουμε μια κοινή ιδιότητα μεταξύ πολλών διαφορετικών παραδειγμάτων, περιπτώσεων, ή μοτίβων που επαναλαμβάνονται, και αυτή η ιδιότητα αποτελεί μια βάση για γενίκευση ή εξαγωγή συμπερασμάτων. Ο όρος επαγωγική απόδειξη, βέβαια, δεν έχει τίποτα να κάνει με την (τελεία) μαθηματική επαγωγή.

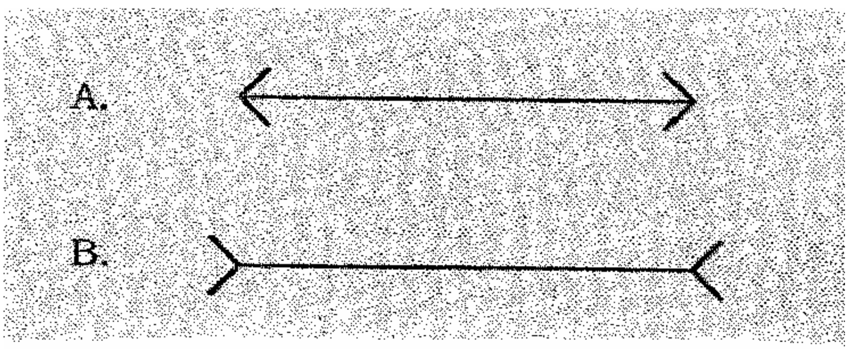
Τέλος, **η *παραγωγική* απόδειξη**, που συνήθως φαίνεται να φοβίζει τους πολλούς, στην πραγματικότητα, είναι απλά η διαδικασία της εξαγωγής συμπεράσματος, που αναγκαστικά ακολουθεί προηγούμενες γνώσεις και στηρίζεται σε αυτές.

Και οι τρεις προηγούμενοι τύποι αποδείξεων, *διαισθητική, επαγωγική και παραγωγική* παίζουν πολύ σπουδαίο ρόλο στην ανάπτυξη και την εφαρμογή των Μαθηματικών. Η μαθηματική έρευνα συχνά ξεκινά με ένα συμπέρασμα βασισμένο στην διαίσθηση, ή σε μια εικασία, σε μια «μαντεψιά»,σε μια πρόγνωση. Πολλές φορές, πάλι, χρειάζεται να εξετάσει συγκεκριμένες περιπτώσεις, προκειμένου ν α γίνει γενίκευση. Η παραγωγική απόδειξη εν συνεχεία, είναι το μέσο για να ελεγχθούν οι εικασίες που έχουν προηγηθεί. Μια επιτυχημένη, επομένως, διδασκαλία δεν μπορεί παρά να περιέχει και τους τρεις αυτούς τύπους αποδείξεων.

Έτσι, αν δεχθούμε πως ο κύριος σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών θα πρέπει να εδραιώνει στους μαθητές την πεποίθηση, ότι τα Μαθηματικά έχουν λογική και να καλλιεργεί την ικανότητά τους να βγάζουν συμπεράσματα, τότε η ανάπτυξη της επιτηδειότητας του συλλογίζεσθαι, είναι αναγκαία για να προχωρήσουν οι μαθητές παραπέρα από το επίπεδο της απομνημόνευσης, της απλής παρατήρησης, των κανόνων και των διαδικασιών.

3. Όρια και καταχρήσεις

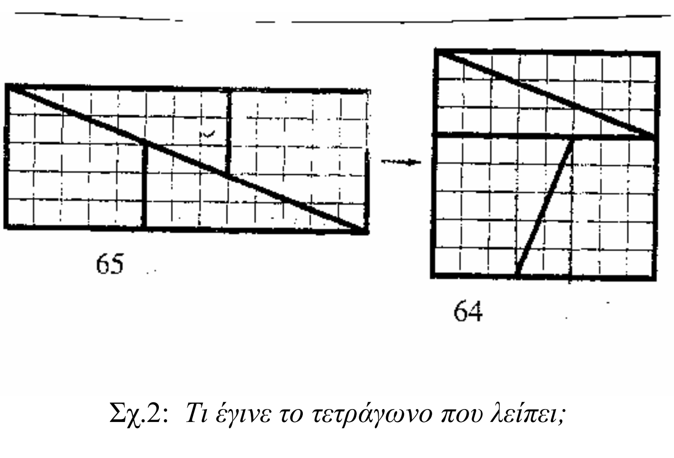
Μια πρώτη ενορατική προσέγγιση της αλήθειας, είναι απαραίτητη, γιατί, είναι πιο κοντά στην εμπειρία και την πραγματικότητα. Με αυτό τον τρόπο, οι μαθητές, εξοικειώνονται με την αλήθεια, πριν ακόμα αυτή αποδειχθεί, με συνέπεια η ορθολογική απόδειξη, όχι μόνο να βρει καλύτερη αποδοχή, αλλά σε πολλές περιπτώσεις, να γίνει από τους ίδιους τους μαθητές. Τότε, η αλήθεια γίνεται πιο γόνιμη, αφού, γίνεται κατανοητή πριν την απόδειξή της. Το σχήμα, η εποπτική εργασία, η αναλογική σκέψη, η εικόνα, η μοντελοποίηση, η εύρεση ενός pattern, τα γραφικά του υπολογιστή, καλλιεργούν στους μαθητές την ενόραση, απαραίτητη πρώτη φάση των επιχειρημάτων. Η *διαισθητική* απόδειξη, βασίζεται στην εντύπωση, «μου φαίνεται», ή σε παραδοχές. Δυστυχώς, όμως, η εντύπωση μπορεί να παρερμηνευτεί και μια παραδοχή μπορεί να είναι εσφαλμένη. Έτσι, η διαίσθηση μπορεί να είναι εξ ίσου σωστή ή λάθος. Για παράδειγμα:



(Σχ. 1)

Στο σχήμα, (Σχ.1), φαίνεται πολύ έντονα μια κλασική αίσθηση- εντύπωση. Διαισθητικά, το τμήμα Α είναι μικρότερο του Β. Αν τα μετρήσουμε, όμως, με ένα υποδεκάμετρο ή τα συγκρίνουμε με τον διαβήτη, θα διαπιστώσουμε ότι είναι ίσα. Δεν είναι, λοιπόν, αλάθητη πάντα η διαίσθησή μας.

Το γεωμετρικό σχήμα δίδει πλούσιες πληροφορίες από την εποπτεία. Πολλές φορές, όμως, μπορεί να οδηγήσει σε εντελώς εσφαλμένα συμπεράσματα ή ακόμα και σε παράδοξα.(Σχ. 2)



Σχ.2: *Τι έγινε το τετράγωνο που λείπει;*

4. Καταγραφή

Στη συνέχεια θα ακολουθήσει μια καταγραφή **διαισθητικών αποδείξεων** που περιέχονται στα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου.

α) *Στην Α΄Γυμνασίου:*

1) Από τους πίνακες τιμών και τις γραφικές παραστάσεις, με τις παρατηρήσεις που μπορεί να γίνουν στην Α΄ Γυμνασίου, προκύπτει πως το βάρος των μήλων και η αξία τους, είναι ανάλογα ποσά, αφού όταν διπλασιάζεται το ένα, διπλασιάζεται το άλλο κτλ. Στη συνέχεια αρκεί ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση ύψους και ηλικίας, με την παρατήρηση ότι το διάγραμμα είναι καμπύλη και όχι ευθεία, για να προκύψει ότι τα δεύτερα δεν είναι ανάλογα ποσά. Μια διαπίστωση σωστή μεν, που για να προκύψει όμως, χρησιμοποιούνται δύο ποσά –τα οποία από πουθενά δεν τεκμαίρεται στο βιβλίο πως συνδέονται καν με σχέση μεταξύ τους.
2) Το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος, κατασκευάζεται με το υποδεκάμετρο και διαπιστώνεται με διαφανές χαρτί. Αυτή η αντιμετώπιση, εκτός του ότι θέτει ερωτηματικά στους ίδιους τους μαθητές για την ακρίβεια της κατασκευής, δημιουργεί πρόβλημα στη συνέχεια, στην κατασκευή των τριών διαμέσων τριγώνου, που πολλές φορές δεν είναι εύκολο να περάσουν από το ίδιο σημείο, όσο προσεκτικά και αν βρουν οι μαθητές τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, όπως συνιστά το βιβλίο.
3) Η χρήση του διαφανούς χαρτιού είναι πολύ συχνή (στην διχοτόμο μιας γωνίας, στην σύγκριση δύο ορθών γωνιών κτλ)

β) *Στη Β ΄Γυμνασίου*

1) Στις εξισώσεις η μεταφορά των όρων από το ένα μέλος στο άλλο και η αλλαγή του πρόσημου αναφέρεται ως ένας «πρακτικός» κανόνας.
2) Στην συμμετρία ως προς άξονα όλες οι ιδιότητες διαπιστώνονται με δίπλωση, ενώ στη συμμετρία ως προς κέντρο με στροφή 180 μοιρών.
3) Για τον τύπο του μήκους ενός κύκλου, αναφέρεται ότι, επειδή είναι φανερό πως όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος τόσο μεγαλύτερο είναι και το μήκος του κύκλου, όταν η διάμετρος ενός κύκλου διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ, τότε θα διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ και το μήκος του. Άρα ο λόγος μήκους και διαμέτρου είναι σταθερός, οπότε εμφανίζεται το π. (εδώ η διαίσθηση συμπληρώνεται και με δόση φαντασίας)

γ) *Στην Γ΄ Γυμνασίου*

1) Στις συναρτήσεις που με τη βοήθεια των γραφικών τους παραστάσεων θα μπορούσε διαισθητικά να ανακαλυφθούν αρκετές από τις ιδιότητές τους, εδώ γίνεται πολύ περιορισμένη η χρήση της.
2) Στους τύπους του εμβαδού και του όγκου της σφαίρας. Η σχετική διδασκαλία του Serge Lang, στο «Μαθηματικές συναντήσεις», εκδ. Κάτοπτρο, δίδει μια διαφορετική αντίληψη του πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η επαγωγική διδασκαλία.

Όπως και η διαισθητική απόδειξη, έτσι και η **επαγωγική**, δεν είναι ικανή να αποδείξει την αλήθεια μιας πρότασης ή όχι. Μια επαγωγική διαδικασία, εξετάζει μερικές περιπτώσεις – παραδείγματα, οπότε μπορεί να αποδείξει την αλήθεια για αυτές μόνο τις ειδικές περιπτώσεις. Η επαγωγική απόδειξη δεν μπορεί να αποδείξει ότι μια πρόταση ισχύει για όλες τις περιπτώσεις.

Για παράδειγμα, αν θέσουμε την ερώτηση: «Ποια ιδιότητα ακολουθούν οι αριθμοί 2,4,6,… Βρείτε τον κανόνα που διέπει αυτούς τους αριθμούς», θα δούμε στη συνέχεια ότι ενώ μπορούμε να βρούμε τον επόμενο, τον μεθεπόμενο, τον 20ο αριθμό της ακολουθίας αυτής, όμως δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν ένας οποιοσδήποτε αριθμός εκτός από τους πιο πάνω, είναι άρτιος ή όχι. Η επαγωγική διαδικασία, δηλαδή, μπορεί να βεβαιώσει την αλήθεια μιας πρότασης – ιδιότητας, στις περιπτώσεις που εξετάζονται, δεν δίδει όμως εγγυήσεις για μια γενική περίπτωση, δηλαδή δεν πείθει για την ορθότητα της πρότασης σε όλες τις περιπτώσεις.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε μια καταγραφή **επαγωγικών αποδείξεων** που περιέχονται στα βιβλία των μαθηματικών του Γυμνασίου:

α) *Στην Α΄ Γυμνασίου*

1) Στην επιμεριστική ιδιότητα 4. 7+ 4.5 = 4(7+5), χρησιμοποιείται το εμβαδόν ενός συγκεκριμένου ορθογωνίου και διαπιστώνεται πως και στις δύο περιπτώσεις, αφού πρόκειται για το ίδιο σχήμα, το εμβαδόν είναι το ίδιο. Μετά, η γενίκευση είναι ένα τεράστιο άλμα, που επί πλέον δεν δικαιολογεί την αναγκαιότητα της επιμεριστικής.
2) Στα κριτήρια διαιρετότητας, «το 10 διαιρεί το 50, το 10 διαιρεί το 60, άρα αν ένας αριθμός τελειώνει σε 0», κτλ. Μένει μετέωρη, εδώ, βέβαια η απορία του γιατί.
3) Στα κλάσματα, ένα μόνο παράδειγμα αρκεί για να γίνει η γενίκευση και να εξαχθεί ένας γενικός τύπος. Για παράδειγμα, επειδή 8/12=4/6 και 8.6=4.12, βγαίνει το συμπέρασμα ότι, αν α/β = γ/δ, τότε και αδ = βγ.
4) Στην Γεωμετρία, η ιδιότητα της μεσοκάθετης προκύπτει από την παρατήρηση σε μια ειδική περίπτωση. Ακόμα, η διχοτόμος της γωνίας ορίζεται με τη βοήθεια διαφανούς χαρτιού, σε μια γωνία 60.

β) *Στη Β΄ Γυμνασίου*

1) Πράξεις και απαλοιφή παρενθέσεων προκύπτουν από τη γενίκευση συγκεκριμένων περιπτώσεων. Για παράδειγμα, η περίπτωση (-3) + (+3)=0 αρκεί για την ιδιότητα του ουδέτερου α+(-α) =0
2) Το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος αποδεικνύεται μόνο σε συγκεκριμένο τρίγωνο.
3) Η μεταβολές των τριγωνομετρικών αριθμών, εφαπτομένης, ημίτονου και συνημίτονου, εξετάζονται για τις περιπτώσεις της οξείας γωνίας. Ένα συμπέρασμα, σωστό μεν, όχι όμως γενικά σωστό.

γ) *Στην Γ΄ Γυμνασίου*

1) Ο όγκος και το εμβαδόν της σφαίρας.

Οι *παραγωγικές* αποδείξεις, μπορούν να ξεκαθαρίσουν κατά πόσο μια εντύπωση ή μια εικασία είναι λογικά αποδεκτές και κατά πόσο αυτές ισχύουν μόνο για τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν ή ισχύουν γενικά. Παρόλο που η παραγωγική απόδειξη και άρα και οι παραγωγικοί συλλογισμοί, είναι μια πολύ ισχυρή διαδικασία προκειμένου να αποφανθεί κανείς ότι μια διαίσθηση ή μια επαγωγή ισχύει γενικά, έχει και αυτή όρια και μπορεί να γίνει κατάχρηση επίσης.

Μια **παραγωγική απόδειξη** για να εγγυηθεί ένα σωστό συμπέρασμα, χρειάζονται δύο προϋποθέσεις. Η πρώτη: Η (αρχική) υπόθεση να είναι σωστή και η δεύτερη: οι συλλογισμοί που περιέχει να είναι λογικοί. Αν μία από αυτές τις δύο προϋποθέσεις δεν ισχύουν, τότε η παραγωγική απόδειξη μπορεί να καταλήξει σε εσφαλμένο συμπέρασμα.

Για παράδειγμα, το θεώρημα: «Ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων είναι το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει» Ας εξετάσουμε αν το θεώρημα αυτό μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις. Οι περισσότεροι πιστεύουν πως μπορεί. Αν εφαρμόσουμε, όμως το θεώρημα αυτό στην επιφάνεια μιας σφαίρας και όχι στο επίπεδο, γρήγορα θα διαπιστώσουμε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει Έχει, δηλαδή, μεγάλη σημασία να ξέρει κανείς σε ποιο χώρο βρίσκεται, να ελέγχει αν όλες οι προυποθέσεις κάθε φορά ισχύουν. Οι βεβαιότητες που δημιουργούνται στα σχολικά Μαθηματικά, αλλά κυρίως η έλλειψη αντιπαραδειγμάτων ώστε με τη βοήθεια των τελευταίων να μπορεί κανείς να ελέγχει τις υποθέσεις, μπορούν να εδραιώσουν πεποιθήσεις, που αργότερα δύσκολα μπορούν να ανατραπούν.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια καταγραφή **παραγωγικών αποδείξεων** που περιέχονται στα βιβλία των μαθηματικών του Γυμνασίου:

α) *Στην Α΄ Γυμνασίου*

1) Η πρώτη παραγωγική απόδειξη στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου, η πρώτη, δηλαδή, επαφή που αποκτούν οι μαθητές με την απόδειξη στο Γυμνάσιο, είναι στη Γεωμετρία, την πρόταση «Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, είναι μεταξύ τους παράλληλες». Το συμπέρασμα, λέει το βιβλίο, δεν μπορεί να δικαιολογηθεί εμπειρικά, δηλαδή με παρατήρηση ή με μετρήσεις. Και αυτό, όχι γιατί είμαστε σίγουροι για την ορθότητα του συμπεράσματός μας, αλλά γιατί «δεν μπορούμε να βρούμε στο φυσικό μας περιβάλλον, ευθείες που να προεκτείνονται επ' άπειρον. Αν μπορούσαμε, δηλαδή, να βρούμε, δεν θα υπήρχε κανένα πρόβλημα. Σε αυτή την περίπτωση, η εμπειρική δικαιολόγηση θα ήταν αποδεκτή. Προς τι, λοιπόν, μια παραγωγική απόδειξη; Ποια η αξία και η σημασία της, διερωτώνται συχνά οι μαθητές. Εδώ, να σημειώσουμε την αντίληψη, που υποκρύπτεται, ότι φυσικό περιβάλλον και γεωμετρικός χώρος, είναι ένα και το αυτό πράγμα. Μετά από όλη αυτή την εισαγωγή, υπάρχει η απόδειξη, με την μέθοδο της απαγωγής εις το άτοπο, περιγραφικά γραμμένη, χωρίς ιδιαίτερη μνεία στον όρο, καθώς και τον τρόπο της απόδειξης. Η πρώτη απόδειξη που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, δεν δηλώνεται ως απόδειξη, δεν τονίζεται η αξία της, υπάρχει εκεί μαζί με όλα τα άλλα, σαν κάτι το ίδιο σημαντικό ή ασήμαντο.
Άλλη, απόδειξη που υπάρχει είναι για την ισότητα των κατακορυφήν γωνιών. Έπεται της μέτρησής τους για να δικαιολογήσει την έλλειψη ακρίβειας.
2) Το θεώρημα που μιλά για «το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου», είναι μια άλλη πρόταση της οποίας υπάρχει απόδειξη. Εδώ, παρόλο που γίνεται κάποια συζήτηση για ακρίβεια οργάνων, η γνωστή απόδειξη, παρουσιάζεται σαν ο από μηχανής θεός, στην συγκεκριμένη περίπτωση του σχήματος. Στο σχήμα αυτό, έχουμε ένα τρίγωνο με γωνίες 42, 63 και 75 τις οποίες παρακινούνται οι μαθητές να βρουν με μέτρηση. Στη συνέχεια, επειδή, όπως αναφέρεται στο βιβλίο, το άθροισμα που θα βρουν οι μαθητές θα είναι ένας αριθμός *κοντά* στο 180, εξ αιτίας αυτού του «κοντά», δικαιολογείται η απόδειξη. Το πρώτο, που μπορεί να παρατηρήσει κανείς είναι ότι, 42+63+75 είναι ακριβώς 180.
3) Τα κριτήρια ισότητας τριγώνων προκύπτουν από την κατασκευή τριγώνων από δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία, τις τρεις πλευρές, ή τη μία πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες. Έτσι, μιας και «όπως φαίνεται» και στις τρεις περιπτώσεις μπορούμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο, τα κριτήρια είναι αποδεκτά και ξαφνικά, σε εφαρμογές ή σε ασκήσεις εμφανίζονται παραγωγικές αποδείξεις, που τα χρησιμοποιούν.
4) Στις ιδιότητες των παραλληλογράμμων, σαν εφαρμογή των κριτηρίων ισότητας τριγώνων.

β) *Στη Β΄ Γυμνασίου*

1) Το θεώρημα για τη σχέση της εγγεγραμμένης γωνίας και της αντίστοιχης επικέντρου, παρουσιάζεται μεν, αλλά για συγκεκριμένη θέση στο σχήμα και αφού γίνει σύγκριση για γωνίες 60 και 30 μοιρών.
2) Η απόδειξη για τις εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο, αποδεικνύεται για γωνίες 40 μοιρών, ενώ θα μπορούσε να υπάρχει η πλήρης απόδειξη.
3) Οι τύποι του κανονικού πολυγώνου (πλευρά, γωνίες), το μήκος του τόξου και το εμβαδόν του κυκλικού τομέα, υπάρχουν, ίσως γιατί εδώ, προκειμένου να αποδειχθούν, χρειαζόμαστε μόνο αλγεβρικές πράξεις,

γ) *Στην Γ΄ Γυμνασίου*

Εδώ υπάρχουν αρκετές αποδείξεις τόσο στη Γεωμετρία , όσο και στην Άλγεβρα.

1) Οι ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών (γινόμενο και άθροισμα), αποδεικνύονται πλήρως.
2) Οι ιδιότητες της διάταξης των πραγματικών αριθμών.

Εδώ, να σημειώσουμε, ότι, οι μαθητές, έχουν φθάσει στην Γ΄ Γυμνασίου, χωρίς να ξέρουν να κάνουν συλλογισμούς και να τεκμηριώνουν αυτά που ισχυρίζονται. Στην Γ΄ Γυμνασίου έχουν αποκτήσει μια αντίληψη διαισθητική και εποπτική για τα Μαθηματικά. Έτσι, συναντούν αρκετή δυσκολία να παρακολουθήσουν ή να αυτενεργήσουν στις αποδείξεις αυτές (1,2)

3) Οι βασικές ταυτότητες έχουν αποδειχθεί μόνο αλγεβρικά.
4) Σε ασκήσεις και εφαρμογές υπάρχουν παραγωγικές αποδείξεις που κάνουν χρήση των κριτηρίων ισότητας.
5) Το θεώρημα του Θαλή με τμήματα των οποίων οι λόγοι είναι φυσικοί αριθμοί, μαζί με το θεώρημα για την ευθεία που είναι παράλληλη σε πλευρά τριγώνου.
6) Κριτήρια ομοιότητας και ασκήσεις που τα χρησιμοποιούν.
7) Νόμοι ημίτονων και συνημίτονων.

Εδώ, να προσθέσουμε ότι, κάποιες από τις αποδείξεις, όπως αυτή του θεωρήματος «το τμήμα που συνδέει τα μέσα των πλευρών τριγώνου», με νεώτερη οδηγία του Π.Ι τέθηκε εκτός ύλης.

5. Παρατηρήσεις - Συμπεράσματα

Από την παραπάνω καταγραφή των διαφορετικών ειδών αποδείξεων, παρατηρούμε ότι το είδος των αποδείξεων που κυριαρχεί στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών του Γυμνασίου, είναι η *διαισθητική και η επαγωγική* απόδειξη. Άλλωστε, αυτή φαίνεται να είναι η κύρια διαφορά μεταξύ των δύο βαθμίδων της εκπαίδευσης κατά τη γνώμη των συντακτών των αναλυτικών προγραμμάτων: Του Γυμνασίου και του Λυκείου. Στο Γυμνάσιο, το βάρος είναι στην εποπτεία, ενώ στο Λύκειο, στην αξιωματική θεμελίωση (Αναλυτικό Πρόγραμμα, οδηγίες Π.Ι.). Στην πρώτη περίπτωση θυσιάζονται, έτσι, τα επιχειρήματα και οι συλλογισμοί, δηλαδή τα Μαθηματικά, ενώ στη δεύτερη, η εμμονή στην μεγάλη, πολλές φορές, αυστηρότητα, που αναγκαστικά δεν μπορεί να είναι εντελώς συνεπής σε επίπεδο Λυκείου, θυσιάζει και πάλι τα Μαθηματικά.

Είναι γενικά αποδεκτό, ότι η εποπτεία και η εμπειρία βοηθούν τη διαίσθηση, την εμπλουτίζουν, θέτουν ερωτήματα, δημιουργούν αμφιβολίες. Η εξαγωγή μιας μαθηματικής έννοιας από μια συγκεκριμένη κατάσταση – πρόβλημα, υπαρκτό ή ενδομαθηματικό, η γενίκευση μετά από την εξέταση περιπτώσεων, που μπορεί να παρατηρηθούν εν συνεχεία, οι διαισθητικές αιτιολογήσεις, όλα αυτά, αποτελούν τρόπους σκέψης. Χωρίς την εξοικείωση του μαθητή με αυτές τις άτυπες διεργασίες σκέψης, δεν μπορεί να καταλάβει ποτέ τον αληθινό ρόλο της απόδειξης, που δεν είναι άλλος από το να επικυρώνει και να νομιμοποιεί τις κατακτήσεις της διαίσθησης.

Η αποκλειστική, στο μεγαλύτερο μέρος των σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών του Γυμνασίου, παρουσία διαισθητικών – εποπτικών και επαγωγικών αποδείξεων, εκτός των άλλων διαμορφώνει και εν πολλοίς παγιώνει την αντίληψη των μαθητών για την ίδια την επιστήμη των Μαθηματικών. Γιατί, η ανάγκη υποστήριξης και δικαιολόγησης δια επιχειρημάτων, η ύπαρξη αντιπαραδειγμάτων, είναι δυνατόν να γίνει μέσω και με την παραγωγική απόδειξη (Hanna, 1996). Επιπλέον, μια παραγωγική, μαθηματική απόδειξη, θέτει δημόσια και με διαφάνεια τα επιχειρήματα προκειμένου να στηρίξει μια αλήθεια, οπότε, κάθε πληροφορία και όλοι οι κανόνες είναι εντελώς ανοικτοί σε κριτική. Είναι τελείως μέσα στην λογική της ίδιας της απόδειξης το αν είναι σωστό ή όχι το συμπέρασμα να προκύπτει από την ίδια την απόδειξη και όχι από καμιά αυθεντία. Η χρήση της απόδειξης στην τάξη είναι αντι-αυταρχική.(Hanna, 1996)

Η υποκατάσταση της απόδειξης από την διαδικασία της εποπτικής δικαιολόγησης, η υποκατάσταση, δηλαδή, της διατύπωσης επιχειρημάτων και επομένως συλλογισμών από διαισθητικές διαδικασίες, μετατοπίζει τον χαρακτήρα των Μαθηματικών από την τέχνη του συλλογίζεσθαι σε ένα αντικείμενο, που δέχεται άκριτα την «αλήθεια». Οι αποσπασματικές αποδείξεις των σχολικών βιβλίων, όπως είναι διασπαρμένες, ξεκρέμαστες εδώ και κει, φαίνεται να παρατίθενται, απλά μεταξύ των πολλών άλλων γνώσεων, πληροφοριών, πράξεων κτλ. Φαίνεται, κυρίως, να στριμώχνονται στην άκρη ή κυριολεκτικά στο τέλος του βιβλίου, στο τέλος, δηλαδή, μιας διαδικασίας που πασχίζει με χίλιους τρόπους να φτιάξει μαθητές που θα αρκούνται στο «μου φαίνεται», «ας κάνω μερικές δοκιμές και μου αρκούν», «ας μετρήσω με το υποδεκάμετρο ή το μοιρογνωμόνιο», που πασχίζει, δηλαδή, και κάνει ότι μπορεί για να τις καταργήσει. Αυτό άλλωστε αποδεικνύουν οι γεμάτες απορία, «αθώες» ερωτήσεις ορισμένων μαθητών που επιμένουν να ζητούν να μάθουν γιατί, όταν χωρίσουν ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 3,8 cm σε δύο ίσα μέρη μετρώντας το (όπως προτείνει το βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου), τα δύο ευθύγραμμα τμήματα όταν τα συγκρίνουν με το διαβήτη δεν είναι ίσα.

Απαραίτητα είναι, επομένως, τα επιχειρήματα, γιατί είναι εκείνα που πείθουν. Με επιχειρήματα μπορεί κανείς να γενικεύσει, αλλά και να πεισθεί πως αυτό που ανακάλυψε δεν ισχύει μόνο για την συγκεκριμένη περίπτωση, αλλά ισχύει γενικά. Οι μετρήσεις μπορεί να δημιουργήσουν αυταπάτες ή αμφιβολίες. Το διαφανές χαρτί, το ίδιο. Η μεταφορά επιφανειών, ακόμα περισσότερο.

Διαδικασίες, όπως η αναγωγή του προβλήματος σε απλούστερες περιπτώσεις είναι εξαιρετικά χρήσιμες και παραγωγικές. Όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός του αριθμού των διαγωνίων ενός πολυγώνου ή ο υπολογισμός του αθροίσματος των 100 πρώτων φυσικών αριθμών. Είναι όμως και αυτές έξω από τα σχολικά Μαθηματικά, βαφτίζονται «δραστηριότητες», βρίσκονται στο περιθώριο των ασκήσεων ή εφαρμογών. Σε καμιά περίπτωση δεν είναι ενσωματωμένες στη διδασκαλία, σε καμιά περίπτωση δεν εξοικειώνονται οι μαθητές με αυτές κατά τις Γυμνασιακές και Λυκειακές τους σπουδές. Παρά την διδακτική αξία των παραπάνω διαδικασιών ωστόσο, πρέπει να έχουμε υπόψη μας και να είμαστε προετοιμασμένοι για το απροσδόκητο, γιατί, ακόμα και να μπορούσαμε να βρούμε «υψηλής» ποιότητας τέτοιες ευρετικές, δηλαδή επαρκείς και ασφαλείς μεθόδους για να οδηγήσουν στον χειρισμό μαθηματικών προβλημάτων, κάποιες φορές ένας τύπος, ένας κανόνας δουλεύει για πάρα πολλές περιπτώσεις, για την εκατομμυριοστή, όμως δεν ισχύει. (Van Bendegem, J. P.,2003)

Είναι γνωστό πως υπάρχουν πολλών ειδών αποδεκτές για τους μαθηματικούς, αποδείξεις. Η απαγωγή στο άτοπο ή η μαθηματική επαγωγή είναι δύο από αυτές. Αλλά και αποδείξεις «χωρίς λόγια», είναι επίσης αποδεκτές. Για παράδειγμα η γεωμετρική απόδειξη των αλγεβρικών ταυτοτήτων.

Η αποσπασματική παρουσία παραγωγικών αποδείξεων στα σχολικά βιβλία, αποστερεί την διδασκαλία των Μαθηματικών από έναν από τους κύριους σκοπούς της. Είναι γνωστό ότι, όπως τα Μαθηματικά τα ίδια, έτσι και η μάθησή τους είναι μια κοινωνική δραστηριότητα (Schoenfeld, 1992). Μια διδασκαλία που δίδει έμφαση στην παραγωγή και διατύπωση επιχειρημάτων, στην πραγματικότητα διδάσκει τους μαθητές να επικοινωνούν μεταξύ τους στη σχολική τάξη, να κριτικάρουν τις απόψεις τους, αλλά και τις απόψεις του δασκάλου τους, τις στρατηγικές που ακολουθούν. Επίσης, μια τέτοια διδασκαλία, ενθαρρύνει τους μαθητές να αναπτύξουν την αυτοπεποίθησή τους και να αποκτήσουν σχέσεις συνεργασίας και όχι ανταγωνισμού (Baroody, 1993).

Τα τελευταία χρόνια, η ανάπτυξη των νέων τεχνολογιών και η εισδοχή όλο και περισσότερο των υπολογιστών στη ζωή μας, δεν θα μπορούσε να αφήσει άθικτη την απόδειξη. Πολλοί πιστεύουν, ότι, η διείσδυση του υπολογιστή και στον χώρο των καθαρών Μαθηματικών (π.χ. πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων), πρέπει να επηρεάσει την διδασκαλία στο επίπεδο της σχολικής αίθουσας, με το να εξασθενίσει την σημασία της παραδοσιακής μαθηματικής απόδειξης, προς όφελος πιο εμπειρικών και δοκιμαστικών τρόπων. (de Villiers, M.,1998) Σύμφωνα με αυτή την αντίληψη, την εγκυρότητα των κάποιων μαθηματικών προτάσεων, μπορεί να την εξασφαλίσει και η «πειραματική» διαδικασία μιας υπολογιστικής απόδείξης. Η απόδειξη με χρήση υπολογιστή στο περίφημο πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων, έθεσε το ερώτημα κατά πόσο μπορεί μια τέτοια απόδειξη να αποτελέσει αποδεκτή απόδειξη. Ερωτήματα που τίθενται και από τη σκοπιά της Φιλοσοφίας των Μαθηματικών, τα οποία αναγκαστικά επαναπροσδιορίζουν την έννοια της απόδειξης, αλλά και κατ επέκταση των ίδιων των Μαθηματικών και που αποσιωπώνται στο σχολείο. Αποσιωπάται, δηλαδή, η πολυπλοκότητα της απόδειξης. (Van Bendegem, J.P. 2003, Θεσ/κη)

Ο υπολογιστής, όπως όλα τα διδακτικά μέσα, ούτε μπορεί ούτε πρέπει να θεωρηθεί πανάκεια, που θα λύσει όλα τα προβλήματα της εκπαίδευσης. Ούτε μπορεί, ούτε πρέπει βέβαια, να υποκαταστήσει τα επιχειρήματα από την διδασκαλία (Λάππας, 1999). Και για να επικαλεστούμε ακόμα μια φορά την G, Hanna, «το να διδάσκεις τους μαθητές να αναγνωρίζουν και να παράγουν σωστά μαθηματικά επιχειρήματα, είναι, σίγουρα, μια πρόκληση. Όλοι ξέρουμε, πολύ καλά, ότι, πολλοί μαθητές έχουν δυσκολίες να παρακολουθήσουν κάθε είδους λογικά επιχειρήματα και πολύ περισσότερο μια μαθηματική απόδειξη. Για τους μαθητές «απόδειξη» σημαίνει μια σειρά από διαφορετικά πράγματα και είναι πολύ πιθανό να διαφέρει από την αντίληψη ενός δασκάλου των Μαθηματικών, αλλά και από δάσκαλο σε δάσκαλο. Λέξεις και σημασίες, όπως *δείξε, απόδειξε, εφάρμοσε, επαλήθευσε, δικαιολόγησε, ή επικύρωσε το συμπέρασμα,* έχουν διαφορετικό νόημα ή δεν λένε τίποτα για τους μαθητές, οι οποίοι, μάλιστα, συχνά θέτουν το ερώτημα «Γιατί είναι αναγκαίο να αποδειχθεί κάτι που είναι γνωστό ότι είναι αληθές;» (Tall,1989) Δεν μπορούμε, όμως, να αποφύγουμε αυτή την πρόκληση. Χρειαζόμαστε να βρούμε δρόμους, μέσω της έρευνας και της διδακτικής εμπειρίας, να βοηθήσουμε τους μαθητές να αποκτήσουν τις ικανότητες που απαιτούνται για να κατακτήσουν την απόδειξη. Η αποτυχία μας σε αυτό το στόχο, θα μας στερήσει ένα πολύτιμο διδακτικό εργαλείο και θα αποκλείσει τους μαθητές μας από ένα κρίσιμο στοιχείο της μαθηματικής γνώσης.». Αυτό που τα σχολικά μαθηματικά θα έπρεπε να κάνουν, είναι να δίδουν στους μαθητές πλούσιες σε έννοιες καταστάσεις και να τους ενθαρρύνουν να κάνουν συλλογισμούς και να διατυπώνουν επιχειρήματα.

Σε καμιά, όμως, περίπτωση δεν προτείνουμε ότι πρέπει να υπάρχουν σχολικά βιβλία Μαθηματικών τα οποία να περιέχουν μια σειρά μόνο από παραγωγικές αποδείξεις θεωρημάτων, ούτε πιστεύουμε ότι θα πρέπει να προστεθούν ακόμα μερικές αποδείξεις στα υπάρχοντα βιβλία και ότι αυτό θα είναι αρκετό. Αντίθετα, θεωρούμε πως ένα σχολικό βιβλίο θα πρέπει να είναι γραμμένο με τέτοιο πνεύμα ώστε να επιδιώκει με ποικίλους τρόπους (αντιπαραδείγματα, παράδοξα, διαφόρων ειδών αποδείξεις κτλ) να προτρέπει τους μαθητές να σκέφτονται και να δικαιολογούν. Υπάρχουν, άλλωστε, αρκετά επίπεδα αυστηρότητας στα Μαθηματικά. Οι μαθητές θα πρέπει σταδιακά να μαθαίνουν να αναζητούν, να σκέφτονται και να δικαιολογούν, να ασκούν κριτική σε όσα μαθαίνουν στο επίπεδο, όμως πάντα, που ανταποκρίνεται στην πείρα και το υπόβαθρό τους (Τουμάσης, 1999).

Θα μπορούσε, τέλος, να αναδειχθούν στα σχολικά Μαθηματικά και άλλες όψεις της απόδειξης υπερβαίνοντας τον ρόλο της σαν του αποκλειστικού μέσου επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης. ‘Όπως; αυτή της συνεκτικής παρουσίασης και δημοσιοποίησης της μαθηματικής γνώσης, της επινόησης ή δημιουργίας νέων μαθηματικών δεδομένων, που προκύπτουν ως λογική αναγκαιότητα από την ανάλυση και τη διερεύνηση ήδη γνωστών προτάσεων, ή της συγκρότησης μιας εμπειρικής θεωρίας μέσα από τη διατύπωση και τον έλεγχο εικασιών. (Χασάπης, 2003 Θεσ/κη)

.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αλιμπινίσης, Α. κ.α (1987) Μαθηματικά Α΄ ,Β΄, Γ΄ Γυμνασίου, ΟΕΔΒ
2. Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία, ΟΕΔΒ
3. Baroody, A. (1993) “Problem solving, Reasoning, and communicating”, Maxwell Macmillan
4. Ευσταθόπουλος, Ε. (Ιαν. 1990) Οι αριθμητικές δραστηριότητες στα βιβλία Μαθ/κών της Α΄ Γυμνασίου, Ευκλείδης Γ΄, τ.24
5. Κλαουδάτος, (1987-88) Μερικές βασικές αρχές της συγγραφής του μαθ. Βιβλίου της Α΄ Γυμνασίου”, 4ο Παν. Συνέδριο Μαθ/κής Εταιρείας.
6. Λειβαδάς, Σ. (1995) “Νέες τάσεις οριοθετούνται στα Μαθηματικά. Μια σύντομη κριτική ανασκόπηση”, Ευκλείδης Γ΄, τ.42
7. Schoenfeld, A. (1985) Mathematical problem solving, New York, Academic Press
8. Hanna, G. (1996), The ongoing value of proof, Proceedings of the international group for the Psychology of Math Education, Valencia, Spain, Vol. 11.
9. Hanna, G.(1999), Opportunity to learn Proof in Ontario grade twelve mathematics texts, Ontario mathematics Gazette 37 (4), 23 –29
10. Λάππας, Δ. (1999) Οι νέες τεχνολογίες, 16ο Συνέδριο ΕΜΕ, Λάρισα
11. Τουμάσης, Μπ. (1999) Αλλάζει η φύση της μαθηματικής απόδειξης: παιδαγωγικές συνέπειες, Ευκλείδης Γ΄, τ. 52.

12. Χασάπης, Δ. (2003, Θες/κη) Επιχείρημα και απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά. Το θέμα και το πλαίσιο μιας συζήτησης, 2ο Διήμερο Διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, Μάρτιος 2003.
13. Van Bendegem, J. P. (2003 Θες/κη), Η δημιουργική ανάπτυξη των Μαθηματικών, 2^{ο} Διήμερο Διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, Μάρτιος 2003.
14. Tall, D. (1989) The nature of mathematical proof, Mathematics teaching, 127, 28-32
15. Epstein D, Levy S, (1995) Experimantation and proof in Mathematics, Notices of AMS
16. de Villiers, M. (1998), An alternative approach to proof in dynamic Geometry, in lehrer R., Chazan D, (eds) New directions in teaching and learning geometry.

ABSTRACT

In this paper, a classification of the proofs that are given in the textbooks of high school Mathematics in Greece, is presented. These textbooks replaced the ones, which were written following New Mathematics concepts in a formal mathematical language, full of symbols. Since 1987, these textbooks have continuously been taught, so they can be seen under a critical perspective. The proofs are classified into three main classes: intuitive, inductive and deductive proof. For each of them, this paper shows the limitations and the misuses. From this classification it becomes clear that, the intuitive and inductive proofs cover the largest part of the mathematics textbooks. That is, the use of specific examples, the measurements with or without transparent paper have almost replaced the procedure of argument and deductive thought. At the end of the book there are some proofs given, but not emphasized, without any special note, in the middle of other, unimportant issues. Then, the value of the deductive proof in the high school level is discussed. From this paper's point of view, all the three types of proof are useful and helpful for teaching. However, the deductive proof is the one which can guaranty the truth of an argument and certify the conjectures that had been made before. Finally, in this paper, it is explained that new technologies and particularly the computers cannot replace deductive proof, which despite its difficulties, is a valuable teaching tool and a crucial element of Mathematics.