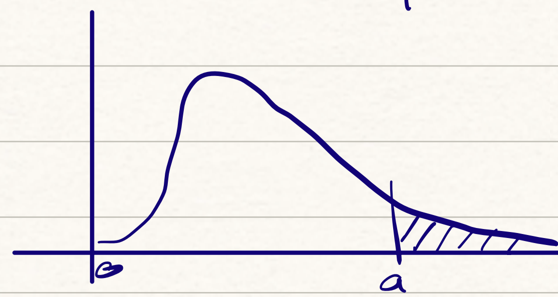
Κατανομή χ^2_ν

Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ ανεξάρτητες και ισότιμες από την $N(0,1)$
Η τ.μ. $U = X_1^2 + \dots + X_\nu^2$ ακολουθεί χ^2_ν με ν βαθμούς ελευθερίας (β.ε.)



Συμβολικά: $\chi^2_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} N(0,1)^2$

Προφανώς $\chi_1 = N(0,1)^2$

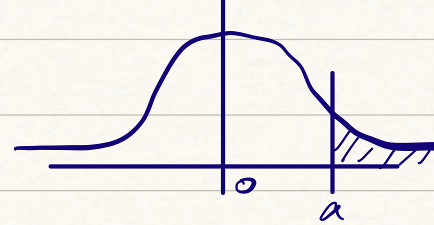
Έχουμε: $E(\chi^2_\nu) = \nu$, $V(\chi^2_\nu) = 2\nu$

$P(\chi^2_\nu > \chi^2_{\nu,a}) = a$, $f(U,\nu) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \cdot x^{\nu/2-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} =$

$= \frac{(1/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} \cdot x^{\nu/2-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}$

Κατανομή t (student-t)

Έστω $X \sim N(0,1)$ και $Y \sim X^2_\nu$ με X, Y ανεξάρτητες.
Η κατανομή της τ.μ. $T = X/\sqrt{Y/\nu}$ ονομάζεται t-κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας.



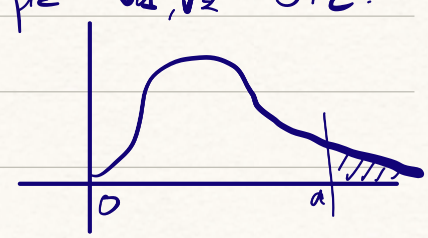
Συμβολίζεται: $t_\nu = N(0,1)/\sqrt{\chi^2_\nu/\nu}$

$E(t_\nu) = 0$, $V(t_\nu) = \frac{\nu}{\nu-2}$, $\nu > 2$

$P(T > t_{\nu,a}) = a$

Κατανομή F

Έστω $X_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$ και $X_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$ με X_1, X_2 ανεξάρτητες
Η κατανομή της τ.μ. $T = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}$ λέγεται F με ν_1, ν_2 β.ε.



$E(T) = \nu_2/(\nu_2-2)$

$V(T) = \frac{2\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)(\nu_2-4)}$, $\nu_2 > 4$

$P(T > F_{\nu_1,\nu_2,a}) = a$

Παρατήρηση

$$t_\nu^2 = \left[\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_\nu^2/\nu}}\right]^2 = \frac{\chi_1^2/1}{\chi_\nu/\nu} = F_{1,\nu}$$

Θεώρημα

Αν $X_1, \dots, X_\nu$ ανεξάρτητες τ.μ. από χ^2 κατανομές με $k_1, k_2, \dots, k_\nu$ β.ε. Τότε η τ.μ. $Y = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$ ακολουθεί χ_k^2 όπου $k = \sum_{i=1}^{\nu} k_i$

Απόδειξη

Έχουμε $Z \sim N(0,1)$ και $Z^2 \sim X_1^2$ και η ροπογεννήτρια της:

$$M_{Z^2}(t) = E[e^{tz^2}] = \int e^{tz^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2/2} dz = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(1-2t)z^2} dz =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{1/1-2t}} dz = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot (1/\sqrt{1-2t})} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{1/1-2t}} dz}_{1} = (1-2t)^{-1/2}$$

$Y = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$. Έχουμε $M_Y(t) = \prod_{i=1}^{\nu} M_x(t) = (1-2t)^{-\nu/2}$

Άρα $Y \sim \chi_\nu$.

Θεώρημα

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από κανονικό πληθυσμό με μ και σ^2

Τότε:

i) $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/\nu)$

ii) Τα στατιστικά $\bar{X}, s^2$ είναι ανεξάρτητα

iii) Η δειγματική κατανομή του $\frac{(\nu-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{\nu-1}^2$

Απόδειξη

iii) Έχουμε $\frac{(\nu-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu+\mu-\bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}[(X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu)]^2}{\sigma^2} =$

$$= \sum_{i=1}^{\nu}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 + \nu\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)^2 - 2\frac{(\bar{X}-\mu)\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu)}{\sigma^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 + \nu\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)^2 - 2\nu\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{\nu}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2}_{\chi^2_\nu} - \underbrace{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right)^2}_{\chi^2_1}$$

Συνεπώς $\frac{(\nu-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu-1}$

Πόρισμα : $E(S^2)=\sigma^2$ (άρα η S^2 αμερόλ. εκτιμήτρια)

Θεώρημα

Έστω $X_1,\dots,X_\nu$ τ.δ. από $N(\mu,\sigma^2)$. Τότε η $\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{\nu}}$ ακολουθεί $t_{\nu-1}$. Συμβολικά: $\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{\nu}} \sim t_{\nu-1}$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε $\bar{X}\sim N(\mu,\sigma^2/\nu)$ και $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}\sim N(0,1)$ και $\frac{(\nu-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{\nu-1}$ με $\bar{X}\sim s^2$ ανεξάρτητες

Άρα $T=\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right)\Big/\sqrt{\frac{(\nu-1)s^2}{\sigma^2(\nu-1)}} = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{\nu}} \sim t_{\nu-1}$

Θεώρημα

Έχω 2 ανεξάρτητους πληθυσμούς μεγεθών ν_1,ν_2 και παραμέτρων (μ_1,σ_1^2), (μ_2,σ_2^2). Τότε $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F_{\nu_1-1,\nu_2-1}$

Απόδειξη

$\frac{(\nu_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{\nu_1-1}$ και $\frac{(\nu_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{\nu_2-1}$ και ανεξάρτητες

Άρα: $T = \dfrac{\frac{(\nu_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/\nu_1-1}{\frac{(\nu_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/\nu_2-1} = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{\nu_1-1,\nu_2-2}$

Παράδειγμα

Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. $N(0,\theta)$. Ν.δ.ο η σ.σ. $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2/\nu$ αμεξ. εκτιμήτρια του θ με διασπορά $2\theta^2/\nu$

Λύση

$E(T) = E\left[\frac{\sum X_i^2}{\nu}\right] = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} E[X_i]^2 = \frac{1}{\nu}\cdot\nu\cdot V(X_i) = \theta$

$V(T) = V\left[\frac{\sum X_i^2}{\nu}\right] = \frac{1}{\nu^2}\sum V[X_i]^2 \quad (1)$

Γνωρίζουμε $X_i \sim N(0,\theta) \Rightarrow \frac{X_i}{\sqrt{\theta}} \sim N(0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (X_i/\sqrt{\theta})^2 = X_i^2/\theta \sim \chi^2_1$

Άρα $\sum_{i=1}^{\nu} \frac{X_i^2}{\theta} = \sum_{i=1} X_i^2/\theta \sim \chi^2_\nu$ και έχουμε:

$E\left[\frac{\sum X_i^2}{\theta}\right] = \nu \Rightarrow E\left[\frac{\sum X_i^2}{\nu^2}\right] = \theta$ (εναλλακτικός υπολογισμός $E(T)$)

$V\left[\frac{\sum X_i^2}{\theta}\right] = 2\nu \Rightarrow \frac{1}{\theta^2} V(\sum X_i^2) = 2\nu \Rightarrow V(\sum X_i^2) = 2\nu\theta^2$

Άρα $(1) \Rightarrow V(T) = \frac{2\theta^2}{\nu}$