ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ ΕΝΑΝΤΙ ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΥ

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\mu,1)$ και

$H_0: \mu \le \mu_0$ έναντι $H_1: \mu > \mu_0$.

Θεωρούμε ότι έχουμε τον έλεγχο:

$H_0: \mu = \mu_0$ έναντι $H_1: \mu = \mu_1$, με $\mu_1 > \mu_0$.

Κάνουμε τις πράξεις κατά τα γνωστά και καταλήγουμε στο ότι η κ.π. είναι:

$$C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) : \bar{X} > c_a\}.$$

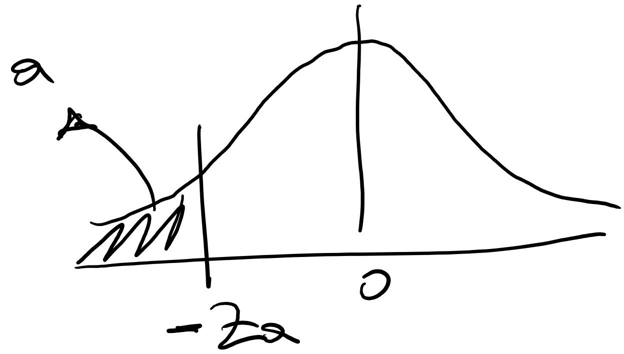
Θα έχουμε Ο.Ι.Ε. με μέγεθος a, όπου:

$$\sup_{\mu \le \mu_0} \underbrace{P_\mu(\bar{X} > c_a)}_{\Pi(\mu)} = a \implies$$

$$\sup_{\mu \le \mu_0} P_\mu\left(\frac{\bar{X}-\mu}{1/\sqrt{\nu}} > \frac{c_a-\mu}{1/\sqrt{\nu}}\right) =$$

$$= \sup_{\mu \le \mu_0} \Phi\left(\frac{\mu - c_a}{1/\sqrt{\nu}}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_0 - c_a}{1/\sqrt{\nu}}\right) = a$$

$$= \sup_{\mu \le \mu_0} \Phi(\;\cdot\;\sqrt{v}\,) - \Phi(\;\cdot\;\sqrt{v}\,)$$



Apα: $\dfrac{\mu_0 - c_\alpha}{1/\sqrt{v}} = -z_\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_0 - c_\alpha = -\dfrac{z_\alpha}{\sqrt{v}} \Rightarrow c_\alpha = \mu_0 + \dfrac{z_\alpha}{\sqrt{v}}$

Apα: $c_\alpha = \mu_0 + z_\alpha \dfrac{1}{\sqrt{v}}.$

P2
Τετάρτη, 22 Δεκεμβρίου 2021 1:45 μμ

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΛΟΓΟΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΩΝ

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$

και ο έλεγχος

$H_0: \theta \in \Theta_0$ έναντι $H_1: \theta \in \Theta_1$, όπου $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

Τότε, παίρνουμε το λόγο:

$$\lambda = \frac{\max\limits_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)}{\max\limits_{\theta \in \Theta} L(\theta)} = \frac{\max\limits_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)}{L(\hat{\theta})}.$$

Κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες ομαλότητας, γνωρίζουμε ότι η $-2\log\lambda$ ακολουθεί μια χ^2-κατανομή όταν $\nu \to \infty$.

Θ) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$

και ο έλεγχος:

$H_0: \theta \in \Theta_0$ έναντι $H_1: \theta \in \Theta_1$, $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

και έστω το στήριγμα της $f(x;\theta)$ είναι ανεξ. του θ. Τότε, κάτω από κάποιες συνθήκες ομαλότυχαία, η ασυμπτωτική κατανομή του $-2\log\lambda$ είναι χ^2_1

<u>Γενίκευση</u> | Αν έχουμε $f(x;\underline{\theta})$ με $\underline{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_r)$ και μια αρχική υπόθεση που θέτει περιορισμούς σε m από αυτά $(m\le r)$ τότε η $-2\log\lambda$ ακολουθεί χ^2_m.

<u>Π.χ.</u> (συνέχεια) Έστω $X_1,X_2,\dots,X_\nu$ τ.δ. από $N(\mu,\sigma^2)$ με σ^2-γνωστό. Έχουμε

$H_0: \mu=\mu_0$ έναντι του $H_1: \mu\neq\mu_0$.

$$L_0(\mu)=L(\mu_0)=(2\pi\sigma^2)^{-\nu/2}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu_0)^2\right\}.$$

$$L(\hat{\mu})=L(\bar{x})=(2\pi\sigma^2)^{-\nu/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2\right\}$$

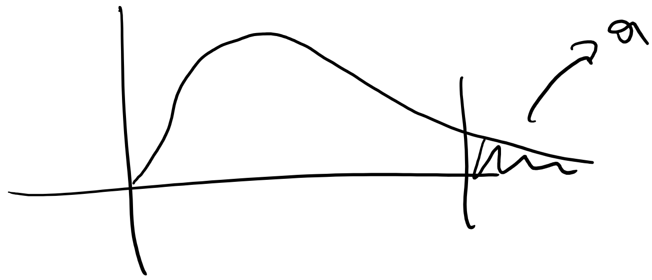
$$\lambda=\frac{L(\mu_0)}{L(\hat{\mu})}=\exp\left\{-\frac{\nu}{2\sigma^2}\cdot(\bar{x}-\mu_0)^2\right\}.$$

<u>και</u>: $$-2\log\lambda=\frac{\nu}{\sigma^2}\cdot(\bar{x}-\mu_0)^2=\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right)^2$$

η οποία ακολουθεί χ^2_1

η οποία ακολουθεί χ^2_1

Οπότε, απορ. αν $\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 > \chi^2_{1,\alpha}$.



ΤΥΧΑΙΟΠΟΙΗΜΕΝΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ

Πχ) (σελ. 367).

Ρίψη νομίσματος 6 φορές και έστω

$$S=\sum_{i=1}^{6} X_i$$

όπου: $X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η ρίψη } i \text{ έδωσε Γράμμα.} \\ 0, & \text{-"- Κεφ.} \end{cases}$

Θέλουμε να ελέγξουμε:

$H_0: p=1/2$ έναντι της $H_1: p=\frac{3}{4}$

σε Σ.Σ. $a=0,05$.

Έστω ότι αποφασίζουμε να έχουμε για κ.π.

$$C: S>c$$

όπου το c θα πρέπει να προσδιοριστεί από τη σχέση:

$$P(S>c)=a=0,05$$

$p=1/2$

<u>ii)</u>

$$a = \sum_{k=c+1}^{6} P_{p=1/2}(S=k) = \sum_{k=c+1}^{6} \binom{6}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6-k}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{6}\cdot \sum_{k=c+1}^{6}\binom{6}{k}.$$

- Αν $c=5$, τότε βρίσκουμε

$$(0,5)^6\cdot\sum_{k=6}^{6}\binom{6}{k} = (0,5)^6 = 0,016 < 0,05$$

- Αν $c=4$, τότε βρίσκουμε

$$(0,5)^6\cdot\sum_{k=5}^{6}\binom{6}{k} = 0,109 > 0,05$$

Θεωρούμε το κανόνα.

↳ Αν $S>5$ απορρίπτουμε την H_0.

↳ Αν $S<5$ <u>δεν</u> απορρίπτουμε την H_0.

↳ Αν $S=5$ δεχόμαστε την H_0 με κάποια πιθανότητα.

→ υπό την H_0

Σφάλμα: $P(\text{Σφ. τύπου I}) =$

$$= P(S=6) + r P(S=5) = 0{,}05$$

$$\Rightarrow 0{,}016 + r \cdot 0{,}093 = 0{,}05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dots \quad r \cong 0{,}37 = \frac{11}{30}$$

Συνεπώς, απορρίπτουμε την H_0 όταν

$\hookrightarrow S=6$

$\hookrightarrow S=5$ με πιθ. $11/30$.